TEORIA de JUEGOS

La finalidad de la Teoría de Juegos es investigar de qué modo los individuos deberían relacionarse cuando sus intereses entran en conflicto. Para ello, utiliza el lenguaje de los juegos de salón al discutir la lógica de las relaciones estratégicas.

En su desarrollo actual, la Teoría de Juegos sólo proporciona soluciones en «situaciones simples», pero éstas ya han conducido a cambios fundamentales en la manera de pensar de los economistas teóricos y tal vez no esté lejos el momento en que pasará lo mismo en todas las ciencias sociales. Mientras tanto se ha asentado en la biología y en la ciencia política.

Ken Binmore, con su redacción divertida y desenfadada y estructurando los temas con una didáctica ejemplar, ha conseguido plasmar con rigor los aspectos fundamentales de la Teoría de Juegos: «Aunque he tratado de desarrollar la teoría dándole un aire informal, este es un libro serio sobre un tema serio».

TEORIA de JUEGOS

Ken Binmore

TEORIA DE JUEGOS

KEN BINMORE
University of Michigan
Ann Arbor

Traducción
ANTONI MALET TOMAS
Universidad Autónoma de Barcelona

Revisión técnica
CLARA PONSATI OBIOLS
Universidad Autónoma de Barcelona

McGraw-Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARIS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

Las ilustraciones de John Tenniel de las páginas v, vii, 1, 23, 65, 93, 125, 165, 213, 269, 337, 381, 431, 483 y 551, así como la «Carta de navegación oceánica» de la página xv de Henry Holiday están tomadas de *The Complete Illustrated Works of Lewis Carroll*, publicado por Chancellor Press, Londres, 1982.

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A.
Edificio Oasis A, planta 1.ª
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la primera edición en inglés de FUN AND GAMES. A Text on Game Theory.

ISBN: 0-669-24603-4

ISBN: 84-481-0192-8
Depósito legal: M. 32.128-1993

Editor: Juan Stumpf
Cubierta: F. Piñuela. Grafismo electrónico.
Compuesto en MonoComp, S. A.
Impreso en Lavel, S. A. Industria gráfica.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Dedico
Teoría de juegos
a mi esposa,
Josephine

Prólogo

La teoría de juegos es una actividad como el esquí o el tenis, que sólo es divertida si uno intenta hacerla bien. Pero habitualmente aprender a hacer algo bien no es fácil, ni se consigue rápidamente, y la teoría de juegos no es una excepción. Además, a diferencia del esquí o del tenis, es realmente importante aprender a usar bien la teoría de juegos. Su finalidad es investigar de qué modo los individuos racionales deberían relacionarse cuando sus intereses entran en conflicto. En su desarrollo actual, la *Teoría de juegos* sólo proporciona soluciones en situaciones simples, pero estas soluciones ya han conducido a cambios fundamentales en la manera de pensar de los economistas teóricos, y tal vez no esté lejos el momento en que pasará lo mismo en todas las ciencias sociales.

Así pues, aunque he tratado de desarrollar la teoría dándole un aire informal, éste es un libro serio sobre un tema serio. Este es, principalmente, un libro de iniciación. No es como uno de estos programas de televisión en los que usted observa por encima del hombro un artista que aplica con celeridad pinturas preparadas a un lienzo previamente preparado usando técnicas que nunca se explican del todo, no fuera a ser que el espectador perdiera el interés y cambiara de canal. Animar a la gente a apreciar el arte es sin duda una actividad meritoria, pero yo no estoy interesado en hacer lo mismo por la teoría de juegos. Mis objetivos son más ambiciosos. Yo espero que, tras leer este libro, usted no sólo podrá admirar cómo otros individuos han utilizado la teoría de juegos. Confío en que usted *por sí solo* podrá aplicar recursos de la teoría de juegos a problemas simples.

Este quiere ser un libro serio de teoría de juegos, adecuado para enseñar tanto a nivel de licenciatura como de postgrado. Me consta que el libro funciona a ambos niveles porque lo he venido utilizando, a él y a sus no tan bien acabados predecesores, durante más de quince años en diferentes instituciones de Europa y Estados Unidos. También me consta que otros planteamientos que parece que podrían funcionar no funcionan. La práctica impone limitaciones drásticas a la realización de un curso serio de teoría de juegos para estudiantes de licenciatura, limitaciones que afectan a lo que es sensato intentar, en términos tanto del contenido como de la presentación. A ellas he añadido otras dos limitaciones. La primera es que el libro se centra en teoría de juegos *no cooperativos*. Poca cosa se dice acerca de teoría de juegos *cooperativos*. Esto es en parte una consecuencia de la segunda limitación, que es tal vez menos popular. Tengo que confesar que soy renuente cuando se trata de enseñar a estudiantes de licenciatura cosas que podrían resultar ser falsas. Sé que es divertido para el profesor sopesar los pros y contras de nuevas ideas, pero los estudiantes de licenciatura tienden a tratar cualquier cosa dicha en clase como si Moisés la hubiera bajado de la montaña grabada en tablas de piedra. Por tanto, donde la honestidad intelectual lo permite, me he esforzado en lo posible por excluir totalmente ideas teóricas controvertidas[1].

Este libro es apropiado para ser utilizado por estudiantes de diferentes carreras. Sin embargo, una limitación determinante en la práctica es que hay que atraer, y mantener, una audiencia entre los estudiantes lo suficientemente grande como para que la teoría de juegos permanezca en la lista de cursos de licenciatura ofrecidos por un departamento de Ciencias Económicas. Tal vez el reconocimiento creciente de la importancia de la teoría de juegos cambiará la situación en el futuro, pero por ahora no se puede, desde un punto de vista realista, esperar mucho de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes; tampoco se puede restringir la entrada a los estudiantes que se especializan en Economía —a no ser que uno abandone la ambición de enseñar un curso de iniciación serio y se dedique por el contrario a proporcionar un paseo superficial a través de una colección de aplicaciones supersimplificadas cuya importancia el estudiante no puede evaluar de forma alguna—. La Guía didáctica que se incluye a continuación explica las implicaciones en detalle. Dicho brevemente, existe un límite para la cantidad de técnicas matemáticas que se pueden ir explicando por el

[1] La teoría de juegos todavía se desarrolla a un ritmo muy rápido. En estas circunstancias es inevitable que muchas de las nuevas ideas que se ensayan resultarán inaceptables y serán descartadas después de disfrutar de un breve período de popularidad. He adoptado la política, muy conservadora, de incluir sólo aquellas ideas que creo van a sobrevivir con seguridad. Esto todavía deja más del doble del material necesario para llenar un curso semestral de licenciatura.

camino, y existe la necesidad de respetar los intereses amplios de los lectores al escoger los ejemplos usados para ilustrar la teoría.

Este no es un libro académico. No contiene referencias y, con pocas excepciones, sólo son mencionados los grandes pioneros de la teoría de juegos. Esta es una práctica estándar en libros de este nivel en disciplinas más establecidas. Si hay que pedir disculpas a este respecto en un libro de teoría de juegos, es sólo porque muchos de los resultados son recientes y sus autores, en su mayor parte, están vivos y coleando. Lo único que puedo decir a los que creen que deberían haber sido citados explícitamente es que están muy bien acompañados. Sin embargo, quiero expresar mi agradecimiento a algunas personas cuyos esfuerzos ayudaron a dar forma a este libro, o bien directamente o bien indirectamente por medio de sus publicaciones.

En primer lugar está el artista victoriano John Tenniel, de quien me he apropiado descaradamente de sus magníficas ilustraciones para *Alicia a través del espejo*, de Lewis Carroll, y de otros sitios. En segundo lugar doy las gracias a Donald Knuth y Leslie Lamport por facilitar el programa LaTeX en que fue escrito el texto. En tercer lugar quiero agradecer a mi editor D. C. Heath que tolerase manías como la de puntuar «así» en lugar de «asá». George Lobell y Jennifer Brett me ayudaron mucho a poner el libro en marcha. En cuarto lugar, a Pat O'Connell-Young hay que agradecerle el pasar a máquina la mayor parte de la presente versión, y a Mimi Bell el pasar a máquina una versión previa del libro. En quinto lugar, están quienes revisaron el texto para D. C. Heath: James Bergin, Engelbert Dockner, Ray Farrow, Chris Harris, David Levine, George Mailath, Andrew McLennan, Michael Meurer y Max Stinchcombe. Finalmente, hay una larga lista de economistas y matemáticos con los que he contraído una deuda de gratitud: Steve Alpern, Bob Aumann, Pierpaolo Battigalli, Ted Bergstrom, Adam Brandenburger, James Friedman, Drew Fudenberg, David Gale, John Harsanyi, David Kreps, Hervé Moulin, Roger Myerson, Barry O'Neill, Adam Ostaszewski, Barry Nalebuff, John Nash, Andy Postelwaite, Phil Reny, Bob Rosenthal, Ariel Rubinstein, Larry Samuelson, Reinhard Selten, Avner Shaked, John Sutton, Jean Tirole, Hal Varian y Robert Wilson.

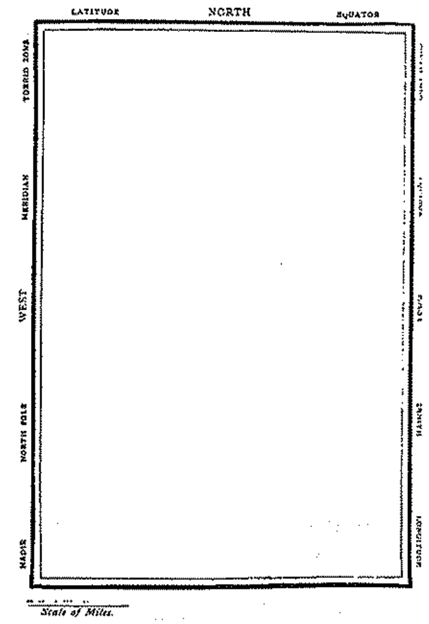
Finalmente, respecto a lo que intentan ser chistes en el texto, déjenme decir que me siento con el mismo derecho a la inmunidad contra la crítica que el de aquel pianista de un *saloon* del Oeste de cuyo piano, según Oscar Wilde, colgaba un cartel diciendo, «Por favor, no dispare contra el pianista. Lo está haciendo lo mejor que puede». No es fácil mantener una atmósfera ligera en un trabajo de este tipo. Tal vez fue demasiado ambicioso prometer las dos cosas, *diversión y juegos**. Ciertamente, me pareció prudente escribir en un estilo más inexpresivo en los primeros capítulos. Espero, sin embargo, que algunos lectores reconozcan que por lo menos al final intenté estar a la altura de mi título.

K. B.

* Esta es una referencia al título original inglés, *Fun and Games. A Text on Game Theory*. (*N. del T.*)

Contenido

Guía didáctica



Carta de navegación oceánica

Escogiendo un rumbo

Este libro ha sido escrito a dos niveles distintos porque se dirige a dos clases distintas de estudiantes. Cada profesor, por tanto, debe escoger cuidadosamente entre el material aquí contenido, porque las cosas podrían ir mal si los alumnos no encajaran con los temas escogidos. O, para decir lo mismo de un modo más expresivo, cuando usted pretenda revelar la naturaleza de la liebre a sus estudiantes ándese con cuidado, no sea que acabe mostrándoles un gato por error. Como dijo Lewis Carroll, su público en este caso «suave y repentinamente se desvanecerá», como la tripulación de Bellman en *Hunting of the Snark.* Sin embargo, Bellman sólo tenía la carta de navegación oceánica que aparece aquí arriba para guiarse.

Un objetivo de esta *Teoría de juegos* es ofrecer un curso semestral de teoría de juegos a nivel de licenciatura. Para seguirlo, los estudiantes de licenciatura no necesitarán tener grandes conocimientos previos de ninguna disciplina, pero sí tendrán que estar muy motivados. Obsérvese, en particular, que los estudiantes no han de ser necesariamente estudiantes de la licenciatura de Ciencias Económicas. Esto último es muy importante, porque en muchas instituciones un curso de licenciatura de teoría de juegos al nivel de este libro puede no ser viable si se dirige exclusivamente a estudiantes de Económicas. Mi experiencia, sin embargo, es que uno consigue atraer un público considerable[1], si uno está dispuesto a admitir estudiantes de todas las disciplinas, y a tener en cuenta el amplio abanico de intereses así representados a la hora de escoger material para enseñar.

Otro objetivo es proporcionar material de teoría de juegos para estudiantes de doctorado en Económicas. En este papel el libro no pretende competir con los excelentes libros escritos por Fudenberg y Tirole y por Myerson. Sólo pretende servir para que aquellos que no sienten la necesidad de sumergirse directamente en lo más escabroso puedan introducirse por la vía fácil en el material difícil.

Los dos objetivos con frecuencia encajan muy bien, y la línea de encaje entre los dos niveles de exposición no siempre sería fácil de identificar, si no se indicara explícitamente. Los propios profesores deben decidir si han de cruzar a menudo esta línea divisoria. Por mi parte, yo ciertamente la cruzo cuando las peculiaridades del público que tengo parecen exigirlo. Sin embargo, no es prudente cruzarla con demasiada frecuencia, porque el riesgo de asustar a un público y de aburrir al otro es considerable. Por supuesto, nada podrá o nada debería impedir que estudiantes de licenciatura muy motivados leyeran el material más avanzado que se da paralelamente. Al mismo tiempo, los estudiantes de doctorado necesitarán mirarse por encima el material más elemental para poder entender los temas escritos específicamente para ellos. En clase, sin embargo, recomiendo mantenerse en el lado que toca de la línea de demarcación casi todo el tiempo.

El material del que se puede prescindir cuando se da un curso semestral a nivel de licenciatura se indica por medio de una versión estilizada del Mad Hatter de John Tenniel en el margen. Cuando el Mad Hatter desaparece corriendo, sopese muy seriamente si el material que viene a continuación es apropiado para sus estudiantes de licenciatura. Si no lo es, sáltese el material y vaya directamente al número de sección indicado debajo del Mad Hatter que corre. Cuando enseño a estudiantes de licenciatura de Económicas, por ejemplo, mis instrucciones son que hay que seguir al Mad Hatter dondequiera que vaya, excepto si se está saltando algo de economía. Cuando enseño a estudiantes de licenciatura de Matemáticas, mis instrucciones son más complicadas.

[1] Durante el último semestre, enseñé teoría de juegos en la Universidad de Michigan en un curso en el que estaban matriculados 46 estudiantes de licenciatura y al que asistían como oyentes un número indeterminado de individuos de procedencias diversas.

Nada en absoluto, en el libro, es demasiado difícil para estudiantes de doctorado. Ciertamente, éstos *no* deben seguir el Mad Hatter a ninguna parte. Por el contrario, su aparición debe señalar el hecho que el material que sigue contiene algo que merece ser considerado atentamente.

A veces, el Mad Hatter del margen no está corriendo, sino que aparece como vacilando y algo aprehensivo, como esperando a ver qué pasa. Lo que suele pasar a continuación es normalmente algo de matemáticas. Estos apartados pueden ser difíciles para algunos estudiantres de licenciatura, pero no pueden ser saltados sin romper la continuidad de la exposición.

Revisión

Mates

Econ

Como en los ejemplos dados aquí, a todos los Mad Hatters marginales les es dada una etiqueta que indica el tipo de material a que hacen referencia. Las cinco etiquetas utilizadas son

Revisión **Mates** **Econ** **Filo** **Fun**

Las mismas etiquetas se utilizan para catalogar muchos de los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo. ¿Qué significan estas etiquetas?

Revisión. Mi experiencia es que uno no puede dirigir un curso viable para estudiantes de licenciatura si los prerrequisitos matemáticos son demasiado elevados. Lo más que uno puede hacer de forma realista es restringir la admisión a estudiantes que han aprobado un primer curso universitario de introducción al cálculo infinitesimal. Algunos estudiantes tendrán un nivel superior, los otros tendrán que ir aprendiendo por el camino las matemáticas extra que necesitan. Los estudiantes parecen dispuestos a poner el trabajo necesario adicional a condición de que quede muy claro lo que se les está exigiendo. Esto explica la presencia de las secciones de REVISIÓN. Los temas principales cubiertos en estas secciones son probabilidad, matrices y vectores y convexidad. El cálculo infinitesimal no recibe el mismo tratamiento porque se supone que los estudiantes ya conocen lo poco que se necesita. Sin embargo, a veces se dan en notas a pie de página recordatorios sobre cómo hacer algunas cosas[2].

No piense ni por un momento en enseñar el material de REVISIÓN en la pizarra. Ya he boicoteado este proyecto por medio de la etiqueta REVISIÓN. Parece un movimiento reflejo universal de la especie humana el desconectar

[2] Aunque sé que los que necesitan estos recordatorios no leen cosas como notas a pie de página, apéndices e introducciones.

tan pronto como esta palabra es mencionada en un aula. Lo que yo personalmente suelo hacer es destacar aquellos conceptos matemáticos de las secciones de REVISIÓN que son indispensables, y además introducir subrepticiamente discusiones acerca de ellos en las horas dedicadas a los ejercicios.

De hecho, estas secciones de REVISIÓN contienen mucho más que lo que los estudiantes de licenciatura necesitarán para estudiar este libro. Al escribirlas, también estaba pensando en los estudiantes de doctorado. Si mi experiencia es algo a tener presente, se recomienda a muchos estudiantes de doctorado que se miren estas secciones matemáticas de REVISIÓN con mucha atención.

Mates. Al enseñar a estudiantes de licenciatura, probablemente le convendrá saltarse prácticamente todas las secciones de MATES en las que el Mad Hatter aparece alejándose corriendo, excepto si la mayoría de los estudiantes pertenecen a la licenciatura de Matemáticas. Sin embargo, los matemáticos no deberían concluir que esto significa que las secciones de MATES están escritas en un estilo formal. Ninguno de los argumentos que aquí se ofrecen en sentido alguno puede considerarse que satisfaga los estándares de una prueba matemática. Generalmente sigo a Bellman y uso el principio de que lo que le repito tres veces es verdad. Por otra parte, he hecho todos los esfuerzos posibles para ser intelectualmente honesto. Todos los argumentos que aquí se ofrecen pueden ser rellenados y convertidos en pruebas formales sin otras técnicas matemáticas que las que un estudiante normal podría utilizar si tuviera las ganas de dedicar a ello un cierto tiempo y esfuerzo. Confío en que estos esquemas de demostración serán particularmente útiles a los estudiantes de doctorado, a quienes demasiado a menudo se estafa con una lista de técnicas dadas como recetas de cocina cuya validez han de aceptar como acto de fe.

Econ. He enseñado teoría de juegos en numerosas instituciones. Las clases de estudiantes de licenciatura están formadas principalmente por estudiantes de Económicas, pero siempre hay un número importante de estudiantes de otras licenciaturas cuya presencia anima bastante las cosas. Estas licenciaturas incluyen matemáticas, ingeniería, filosofía y ciencias políticas. Algunas de las secciones ECON tienen como objetivo familiarizar a estos estudiantes con ideas de la ciencia económica elementales pero importantes. Estas secciones están pensadas para ser leídas como complementos. Secciones ECON posteriores indican algunas de las aplicaciones más directas de la teoría de juegos a la ciencia económica. Aunque el Mad Hatter aparece alejándose corriendo de estas secciones (porque habitualmente no son estrictamente necesarias para seguir el curso de la exposición), los economistas necesitarán enseñar este material de no ser que haya sido cubierto adecuadamente en otras asignaturas. Mi experiencia con estudiantes de otras licenciaturas es que a éstos les agrada tener la oportunidad de aprender un poco de economía.

Si este libro alcanza una segunda edición, tengo previsto incluir un suplemento sobre aplicaciones sencillas de la teoría de juegos a la economía y a otros campos. Por ahora, tres cosas merecen ser observadas. En primer lugar, las aplicaciones tratadas en el texto no lo son superficialmente. Es decir, el texto proporciona los detalles suficientes para que el estudiante pueda desarrollar problemas sobre el material correspondiente. En segundo lugar, muchos de los ejercicios ECON al final de los capítulos son muy instructivos. (Confío en que los estudiantes de doctorado no despreciarán el intentar resolver tantos de ellos como puedan.) Personalmente, yo prefiero animar a los estudiantes a que aprendan por ellos mismos, vía estos ejercicios, como aplicar la teoría de juegos a la ciencia económica. Finalmente, recuerde que algunos individuos de su clase no serán estudiantes de Económicas.

Filo. No es prudente intentar enseñar de una manera formal los fundamentos de la teoría de juegos a estudiantes de licenciatura. Por otra parte, los estudiantes más atrevidos no se contentarán con respuestas facilonas. De alguna forma hay que satisfacer a los escépticos sin desbordar al resto de la clase. He intentado hacerlo por medio de las secciones FILO. Mi recomendación es que estas secciones deben ser edulcoradas para presentarlas a estudiantes de licenciatura. Personalmente, estas cuestiones me parecen fascinantes. Sin embargo, el intentar discutirlas seriamente con estudiantes de licenciatura puede ser a veces muy frustrante. Afortunadamente, la mayoría de estudiantes de licenciatura se sienten más que satisfechos dejando las cuestiones filosóficas para los filósofos.

Los estudiantes de doctorado, por otra parte, no pueden pasar sin enfrentarse con estas cuestiones. Una visión completa, sin embargo, tendrá que ser obtenida en otras fuentes, porque en este libro he hecho todos los esfuerzos por mantenerme al margen de temas controvertidos. Pero tal vez las secciones FILO señalarán claramente cuáles son algunas de las cuestiones con las que es necesario enfrentarse. Tal vez servirán también para infundir un poco de escepticismo sobre algunas de las opiniones actualmente de moda.

Fun. Confío en que no se salte todas las secciones FUN. Algunas de ellas son muy instructivas*.

Hasta dónde llegar

Mi consejo a estudiantes de doctorado es simple. Recomiendo que se lea todo (incluyendo el capítulo final sobre póquer), tanto por las técnicas matemáticas como por el contenido. Por lo que se refiere al núcleo al que hay que prestar más atención, sugiero que el objetivo sea llegar a los Capítulos 7, 8, 10 y 11 tan pronto como sea posible. Por otra parte, a un estudiante de doctorado

* «*Fun*» se puede traducir por «divertido, entretenido, interesante». (*N. del T.*)

sólo hay que decirle que es una pérdida de tiempo leer cualquier cosa sin intentar resolver por lo menos algunos de los ejercicios. Sin embargo, para estudiantes de licenciatura la cuestión es más complicada.

Incluso si el Mad Hatter es seguido dondequiera que vaya, el libro todavía contiene mucho más material del que sería prudente intentar enseñar a estudiantes de licenciatura en un curso semestral. Si se dispone de una cantidad de tiempo adecuada para la discusión de ejercicios, hay que hacer una elección sobre los temas a cubrir. En gran medida, esto requiere una evaluación personal. Sin embargo, si se quiere utilizar este libro, yo no recomendaría cambiar el *orden* en que los temas han sido introducidos, incluso cuando el orden que he escogido puede parecer curioso. He experimentado con diferentes planteamientos durante más de quince años, y mis razones para hacer las cosas a mi manera tal vez no resultarán siempre inmediatamente obvias. Por ejemplo, ¿por qué el capítulo sobre negociación precede al capítulo sobre juegos de suma cero? La razón es que el capítulo de juegos de suma cero es técnicamente más difícil de lo que podría parecer para estudiantes de licenciatura. En particular, sea cual sea su formación inicial, no es posible confiar en que los estudiantes sepan algo útil sobre convexidad. Sin embargo, tras el capítulo sobre negociación ellos ya no pensarán que un conjunto convexo es un objeto matemático misterioso e incomprensible. ¿Por qué la noción de equilibrio de Nash es introducida en el Capítulo 1, para dejarla entonces «cociendo a fuego lento», y no es discutida en profundidad hasta el Capítulo 7? Esto se hace porque los estudiantes de licenciatura pueden sentirse desbordados si pretendemos decírselo todo al mismo tiempo. A menudo, necesitan tiempo para acumular confianza en su habilidad para responder antes de ser bombardeados con demasiadas cosas. ¿Por qué dar tanta importancia a los hexágonos en el Capítulo 1? Porque serán utilizados en el Capítulo 7 en una discusión sobre teoremas del punto fijo[3]. Esta letanía de preguntas y respuestas podría continuar indefinidamente. Brevemente: hay material posterior que depende del material anterior de una forma que puede no ser inmediatamente aparente.

La lista de capítulos que se da a continuación indica lo que cada capítulo pretende conseguir. A continuación se proponen tres itinerarios a través de ellos, de los cuales yo recomendaría el primero para la primera vez que se enseña teoría de juegos a estudiantes de licenciatura.

Introducción. La introducción proporciona municiones para una charla introductoria, si una cosa así se considera necesaria. Trata sobre los orígenes de la teoría de juegos, sobre la dirección que lleva, lo que puede hacer y por qué es importante.

1. **Ganar.** La definición formal no se introduce de golpe. Este capítulo introduce juegos de dos jugadores con información perfecta y sin movimientos al azar. Algunos resultados sobre el caso estrictamente no competitivo son probados cuidadosamente para sugerir qué se encontrará más adelante. Las ideas de equilibrio de Nash y de equilibrio subjuego-perfecto hacen una primera aparición.
2. **Arriesgarse.** Se introducen los movimientos al azar y las loterías. Se revisan y se utilizan las ideas probabilísticas elementales.
3. **Sobre gustos.** Una revisión de la teoría elemental de la utilidad es seguida por un largo ejemplo que se ocupa de la modelización de la información imperfecta, y que subraya que la conducta racional puede depender de las actitudes de los jugadores frente al riesgo. A continuación se discute la teoridad de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern.
4. **Cobrar.** La idea de pago de Von Neumann y Morgenstern es explotada sistemáticamente. Tras una revisión extensa de vectores y matrices, se explica la idea de eliminar sucesivamente estrategias dominadas. Se menciona brevemente la idea de conocimiento público, y se subraya la distinción entre equilibrios de Nash y subjuego-perfecto.
5. **Cerrar tratos.** Este capítulo trata de negociación. Después de revisar la noción de convexidad, introduce la solución de negociación de Nash. (Este es el único uso que hace el libro de teoría cooperativa de juegos.) El resto del capítulo usa el modelo de negociación de Rubinstein para hacer más familiar la idea de equilibrio subjuego-perfecto.
6. **Mixturas.** Las estrategias mixtas son introducidas como un preliminar a un análisis convencional de juegos de suma cero. (Obsérvese que las estrategias mixtas son necesarias en todos los capítulos posteriores, y que las ideas de minimax son relevantes al estudiar juegos con repetición.)
7. **Mantener el equilibrio.** Ahora que ya se conoce el equilibrio de Nash, se estudian sus propiedades con algún detalle. Aquí es donde se discute por primera vez el dilema del prisionero. Curvas de reacción, aplicaciones a oligopolios, selección de equilibrios y existencia se encuentran en este largo capítulo. Tampoco se dejan de lado los métodos matemáticos del punto fijo.
8. **Repetirse.** Este capítulo trata de juegos con repetición. Empieza con un ejemplo que pretende subrayar cómo se pueden dar estrategias complicadas en este contexto. El ejemplo sirve para motivar el uso en este capítulo de autómatas finitos para describir estrategias. Se da una versión simple del teorema *folk*, junto con un poco de filosofía sobre contratos sociales.
9. **Adaptarse a las circunstancias.** Este capítulo describe algunos procesos simples de adaptación por tanteo. Incluye una introducción al uso de la teoría de juegos en biología evolutiva, así como una discusión de la «evolución de la cooperación».

[3] Sin embargo, si se sigue al Mad Hatter, nos saltaremos gran parte de la discusión sobre el Hex y toda la discusión sobre teoremas del punto fijo, aunque yo he enseñado con éxito ambos tópicos a estudiantes de licenciatura.

10. **Saber cuál es tu sitio.** Este capítulo contiene una descripción excepcionalmente cuidadosa del papel de la teoría del conocimiento en la teoría de juegos. Los conjuntos de información son finalmente precisados de forma apropiada, y se introduce la señalización. El conocimiento público es aireado a conciencia, y se plantean algunas cuestiones de fundamentación.
11. **Saber a quién creer.** Se discute en detalle la información incompleta. Este capítulo incluye material sobre señalización, subastas, el principio de revelación y el diseño de mecanismos. Se mencionan las razones por las que la teoría del refinamiento es objeto de controversia.
12. **Farolear.** Aparentemente este capítulo es sobre póquer, pero en realidad es un largo ejercicio para el uso de las técnicas que el libro ha introducido.

Existen por lo menos tres itinerarios viables a través del libro para un curso semestral dirigido a estudiantes de licenciatura. Que se empiece, en cualquiera de estos itinerarios, por prefijar un poco de propaganda extraída de la Introducción sobre la importancia de la teoría de juegos, es una cuestión de gustos. A mí me parece que sobra un poco de tiempo para unas pocas excursiones fuera de los itinerarios principales. Los rodeos efectuados dependen de a quién estoy enseñando. Cuando estoy enseñando a economistas mayoritariamente, por ejemplo, no siempre sigo al Mad Hatter cuando se salta secciones de economía.

- **Itinerario 1.** Empezar en el Capítulo 1 y seguir el Mad Hatter sin abandonarle hasta el final del Capítulo 7.
- **Itinerario 2.** Seguir el primer itinerario hasta el final del Capítulo 4, y entonces saltar hacia adelante hasta el Capítulo 7 y seguir el Mad Hatter a partir de aquí (tal vez omitiendo el Capítulo 9, pero deteniéndose en cambio en alguno de los materiales más avanzados de los Capítulos 10 y 11). Serán necesarios algunos parches en el tema de las estrategias mixtas en el Capítulo 7.
- **Itinerario 3.** Dedicar el menor tiempo posible a los Capítulos 1, 2 y 3, y después seguir el Mad Hatter a partir del Capítulo 4 (tal vez omitiendo alguno de los Capítulos 5, 6 ó 9 para dejar más tiempo para los Capítulos 10 y 11).

Si se sigue el tercer y más ambicioso de los itinerarios, algunas observaciones cautelares pueden ser útiles. Los Capítulos 2 y 3 pueden ser reducidos a discusiones de los juegos del duelo y de la ruleta rusa. No se podrá evitar tener que decir algo sobre loterías y utilidad esperada, pero lo que se diga puede ser muy breve[4]. Sin embargo, el Capítulo 1 no se comprime tan fácilmente. Será necesario cubrir por lo menos las formas extensivas y estratégicas de un juego, alguna versión del algoritmo de Zermelo, la noción del valor de un juego estrictamente competitivo, como el ajedrez, y las ideas de equilibrio de Nash y de equilibrio subjuego-perfecto. Sin embargo, tengo dos razones para sugerir que este capítulo no se dé con excesiva rapidez. La primera es que nunca es prudente apresurarse en las primeras clases de un curso. La segunda es que el Capítulo 1 ha sido diseñado en parte para desempeñar el papel de escaparate. Algunos de los razonamientos que aquí se ofrecen han sido argumentados más rigurosamente de lo que era tal vez estrictamente necesario para no dar una falsa impresión sobre lo que viene a continuación.

[4] En el supuesto que los estudiantes confían en su habilidad para enfrentarse a problemas probabilísticos simples. Personalmente, lamento mucho saltarme la teoría de la decisión bajo riesgo de Von Neumann y Morgenstern. Todo tipo de confusiones se producen de forma habitual porque esta teoría no ha sido entendida. Sin embargo, reconozco que es un juicio de valor.

Preguntas y respuestas

Yo concedo una gran importancia a la realización de ejercicios en cualquiera de mis cursos. Ésta es la razón por la que este libro contiene una gran cantidad de ejercicios para que los estudiantes los hagan por su cuenta. Normalmente, insisto en que se me entreguen por escrito alrededor de unos cinco ejercicios por semana. En este caso, es importante explicar que usted sabe que todos somos humanos y que no es tan poco razonable como para esperar respuestas perfectas a todos los problemas. Algunos de los problemas son, y deben ser, difíciles. Lo que usted quiere de los estudiantes es un buen esfuerzo. Esto, sin embargo, incluye tomándose en serio la presentación de sus respuestas. Los estudiantes aprenden de forma asombrosamente rápida que no es aceptable encerrar una respuesta correcta en unas pocas líneas de garabatos indescifrables, o sumergir la respuesta en unas cuantas páginas de irrelevante bla-bla. Mi impresión es que a ellos les gusta que les hagan hacer las cosas bien.

Evidentemente los estudiantes se preocuparan por su política de notas; por tanto, deje bien claro desde el principio que usted sabe que ellos no constituyen una muestra elegida al azar de entre la población estudiantil. Ellos constituyen un grupo muy seleccionado y sus notas reflejarán esta realidad. Después de poner algunos ejercicios difíciles, se puede reforzar esta pieza de propaganda felicitándoles por la inteligencia con la que la clase en conjunto se ha planteado las dificultades —aunque tal vez sólo algunos de ellos habrán sido capaces de descubrir un camino que conduzca a una conclusión correcta—. Habitualmente, esto no será más que la pura verdad. Las cosas irán por el buen camino si, después de un cierto tiempo, al entrar en clase usted se encuentra a los estudiantes discutiendo acerca de los ejercicios de la última semana. Por lo que se refiere a los exámenes, me parece razonable decirles a los estudiantes que usted piensa preguntarles cuestiones semejantes a las que les han sido puestas para hacer en casa, o bien incluso más semejantes a otros ejercicios de dificultad comparable que aparecen en el libro.

Los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo constituyen un conjunto desigual. Van desde cuestiones que requieren poco más que repetir una definición hasta problemas que podrían hacer vacilar al mismo Von Neumann. Un poco de atención es, por tanto, necesaria al seleccionar problemas para que los estudiantes los solucionen. La lista que sigue es un posible conjunto de tareas asignadas semanalmente. Los *items* con asterisco (*) sólo son adecuados para estudiantes de doctorado. Los marcados con una daga (†) cubren temas que tal vez usted preferirá incorporar al conjunto de temas del curso propiamente dicho.

Tarea	Sección	Ejercicios
1	1.10	2 3 7 10 20
2†	1.10	21 22 23 24 25
3	2.6	5 7 11 21 23
4	3.7	5 9 11 14 22
5	4.8	2 16 21 24 25
6	5.9	13 15 21 23 25
7	6.10	4 14 15 18 19
8	6.10	27 29 34 36 41
9	7.9	1 11 13 14 18
10†	7.9	27 29 34 35 40
11	8.6	5 8 10 21 23
12*	9.8	2 7 15 17 23
13	10.9	1 11 12 15 17
14*†	10.9	20 23 30 31 35
15	11.10	1 2 3 4 11
16*†	11.10	22 23 24 27 29
17*†	11.10	38 41 42 43 44

Estoy agradecido a Bruce Linster por proporcionar esquemas de respuestas a una selección de diez cuestiones de cada capítulo al final del libro. Para los primeros capítulos, las respuestas pertenecen a cuestiones que en su mayoría sería razonable pedir a estudiantes de licenciatura que las intentaran resolver. Como complemento a estas respuestas ordinarias se encontrarán

algunas pistas sobre cómo resolver el ocasional comecocos con que se ha dado un punto de sal a los ejercicios. No hay intersección entre las cuestiones para las que se proporcionan respuestas y las que aparecen en las sugerencias para ser asignadas semanalmente.

¿Por qué enseñar de esta forma?

Intro ⟶

Obsérvese el Mad Hatter en el margen invitándole a saltar a la Introducción y a escapar de las observaciones filosóficas que vienen a continuación. La cuestión filosófica a considerar es por qué he escogido escribir un libro como éste en lugar de ofrecer un *divertimento* a través de algunas sencillas «aplicaciones» de la teoría en modelos económicos de fácil descripción.

Esta mañana, temprano, uno de los estudiantes más inteligentes de mi curso de licenciatura en Microeconomía Intermedia en la University of Michigan me ha preguntado cuándo se le iba a enseñar algo con un poco de sustancia: algo con lo que pelearse de verdad. Le tuve que decir que la Microeconomía Intermedia es entre los cursos ordinarios de la licenciatura en Económicas uno de los más difíciles. Esta misma mañana, más tarde, tendré que dar un curso de doctorado, Teoría Microeconómica II. El contenido de este curso de doctorado no es intrínsecamente difícil, y los estudiantes son inteligentes, pero muchos de ellos tienen que esforzarse muchísimo para poder hacer suya la materia. Están muy dispuestos a esforzarse mucho, pero un esfuerzo como éste no sería necesario en un mundo ideal. En un mundo así, una persona al terminar su licenciatura habría sido equipada con las habilidades de aprendizaje necesarias para poder enfrentarse a material serio presentado seriamente. No me estoy refiriendo a la falta de habilidades técnicas, aunque esto es ciertamente parte del problema. Lo que frena a los/las estudiantes es la falta de confianza en ellos/ellas mismos. Antes de que muchos de ellos y ellas puedan empezar a aprender en serio, primero necesitan aprender que realmente son capaces de aprender. Esta confianza sólo se obtiene estudiando por lo menos un tema difícil *en profundidad*. Nadie puede sentirse seguro de sus habilidades de aprendizaje si sólo se le ha ofrecido la oportunidad de arañar en la superficie de los temas que se le han enseñado. Sin embargo, a muchos estudiantes de licenciatura nunca se les ofrece la oportunidad de hacer otra cosa.

Generalmente lo que se considera una educación universitaria, tanto en Estados Unidos como en Europa, me parece que se asemeja bastante a una conspiración inconsciente entre profesores y estudiantes para estafar a quien sea que esté corriendo con los gastos. Los profesores fingen que enseñan cosas, y los estudiantes fingen que las aprenden, pero todos saben en su fuero interno que estas cosas están tan desnaturalizadas que no es posible entenderlas en la forma en que se presentan. Incluso los estudiantes más flojos llegan a cansarse de esta dieta de papilla predigerida. Ellos y ellas entienden perfectamente bien que «el apreciar los conceptos» no los conduce a ninguna parte, salvo que cada vez se acercan más a un pedazo de papel que les faculta a escribir iniciales a continuación de sus nombres. Pero la mayoría de estudiantes quieren algo más que esto. Quieren aprender cosas *de verdad*, de manera que se encuentren capaces de sentir que pueden defender lo que se les ha enseñado sin necesidad de recurrir a la autoridad de sus profesores o del libro de texto. Evidentemente, aprender cosas de verdad puede ser pesado. Pero mi experiencia es que los estudiantes raramente protestan cuando se les hace trabajar mucho, a condición de que el estudio se les programe de forma que puedan ver rápidamente que sus esfuerzos producen dividendos tangibles.

Sin embargo una cosa es percibir que nuestro sistema educativo puede ser mejorado, pero otra muy distinta hacer algo al respecto. Al enseñar cursos tradicionales de economía y de las otras ciencias sociales, el sistema tiende a atraparle a uno. Es particularmente difícil organizar un curso serio de manera que permita a los estudiantes percibir que sus esfuerzos obtienen recompensa rápidamente. Típicamente los profesores de cursos introductorios, discutiendo de forma diluida la mayoría de ideas intelectualmente excitantes, ya habrán «descremado» el material que se supone que usted ha de enseñar. Pero usted en raras ocasiones podrá confiar en que los estudiantes conocen suficientemente bien lo que se enseña en estos cursos introductorios como para poder usar sus conocimientos. De hecho, lo que se aloja en las mentes de los estudiantes al «apreciar los conceptos» en los cursos introductorios es a veces tan confuso, que necesitan ser «desenseñados» para hacer posible que progresen. Una gran cantidad de aquello que los estudiantes despreciarán como «material de revisión» es, por tanto, inevitable, a no ser que uno esté dispuesto a ser innovador en el temario. Pero dedicarse a jugar con el temario raramente es una opción práctica, excepto cuando los colegas que enseñan cursos asociados con el suyo son excepcionalmente tolerantes.

Enseñar la teoría de juegos proporciona la oportunidad de liberarse de alguna de estas limitaciones porque las tradiciones acerca de cómo debe ser enseñada todavía están formándose. En particular, sólo se le dedica una mención de pasada en los cursos introductorios. La mayoría de los estudiantes que se matriculan en teoría de juegos, por tanto, vienen con una actitud abierta y con la esperanza de que se les enseñará algo nuevo e interesante. A veces incluso piensan que el aprender este material puede ser divertido. También saben que el tema no depende demasiado directamente del material que debiera haber sido dominado en cursos anteriores pero que ahora es ya agua pasada desde hace mucho tiempo. En ninguna de estas esperanzas quedarán desilusionados. También es cierto que la teoría de juegos ha asumido un papel central dentro de la teoría económica, y estudiantes que están considerando el doctorado pueden felicitarse de estar haciendo algo que les será ciertamente útil. Al mismo tiempo, se les puede decir confiadamente a los estudiantes que el papel de la teoría de juegos está destinado a crecer en el futuro, y no sólo dentro de la teoría económica, sino también en las demás ciencias sociales. Por ejemplo, ya ha conseguido asentar firmemente un pie en biología y en la ciencia política.

Todo esto significa que alguien enseñando teoría de juegos se puede permitir ser más ambicioso que el profesor de una disciplina más tradicional. Los estudiantes vienen con una actitud positiva, y se les puede llevar rápidamente a áreas que les resultarán nuevas y excitantes. Existe aquí una oportunidad, por tanto, de proporcionar genuinamente educación: entrenar algunas inteligencias en pensar seriamente sobre problemas serios. Aunque el contenido sustantivo de la teoría de juegos es ciertamente de gran importancia, creo que es esta oportunidad lo que debería excitarnos por encima de todo. Es decir, al enseñar teoría de juegos es realmente cierto que el medio es por lo menos tan importante como el mensaje.

Otros libros

Robert Aumann, *Lectures on Game Theory*, Westview Press (Underground Classics in Economics), 1989. Estos son los apuntes de clase de uno de los grandes teóricos de la teoría de juegos.

Robert Aumann y Sergio Hart, *Handbook of Game Theory*. Esta será una colección completa de artículos de síntesis sobre la teoría de juegos y sus aplicaciones dirigida a los investigadores de la especialidad.

Elwyn Berlekamp, John Conway y Richard Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, 1982. Este es un libro ingenioso e increíblemente inventivo sobre teoría de juegos combinatoria. Los autores se esfuerzan muchísimo por hacer las ideas accesibles al profano, pero sospecho que el libro requiere entrenamiento matemático para sostener la atención.

Ken Binmore, *Essays on the Foundations of Game Theory*, Blackwell, 1990. Algunos de estos ensayos se enfrentan con las cuestiones controvertidas que el presente libro evita, pero que nadie espere respuestas definitivas. (Los lectores de este libro, *Teoría de juegos*, podrán saltarse los Capítulos 2, 3 y 4.)

Steven Brams, *Superior Beings*, Springer-Verlag, 1983. Si creía que la teoría de juegos no tenía aplicaciones en teología, ¡piénseselo de nuevo!

Avinash Dixit y Barry Nalebuff, *Thinking Strategically*, Norton, 1991. Esta es una colección deliciosa de historias y anécdotas de la vida real que ilustran la teoría de juegos en acción. Su accesibilidad queda demostrada por su aparición en la lista del Book-of-the-Month Club.

James Friedman, *Game Theory with Applications to Economics*, segunda edición, MIT Press, 1990. James Friedman fue uno de los pioneros aplicando juegos con repetición a problemas de organización industrial. Aquí puede aprender usted los trucos del oficio.

Drew Fudenberg y Jean Tirole, *Game Theory*, MIT Press, 1991. Este es el libro que tiene que leer si quiere publicar en *Econometrica*. Es notable el terreno que llegan a cubrir.

Josef Hofbauer y Karl Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynami-*

cal Systems, Cambridge University Press, 1988. Esta es una introducción muy accesible y muy clara a las matemáticas de los sistemas evolutivos.

Tashiro Ichiishi, *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press, 1983. Este es un libro formal que se concentra en teoría de juegos cooperativos. La exposición matemática es admirablemente clara y elegante.

David Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press, 1990. Este gran libro da por supuesto que la teoría de juegos forma parte de la teoría microeconómica. Es obligado para aquellos que planean hacer una carrera dentro de la economía. Los problemas a menudo son realmente muy instructivos.

David Kreps, *Teoría de juegos y modelización económica*, Oxford University Press, 1990. ¡Escucha lo que dice papá sobre modelos en economía, y no andarás descarriado!

Duncan Luce y Howard Raiffa, *Games and Decisions*, Wiley, 1957. Este clásico permanente es un modelo de cómo debe ser escrito un libro.

John Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982. Todo el mundo debería hacer por lo menos una incursión en este bello libro.

Hervé Moulin, *Game Theory for the Social Sciences*, segunda edición revisada, New York University Press, 1986. Esta es una introducción elemental a la teoría de juegos en la que a las matemáticas se las deja hablar por sí mismas. Es particularmente valioso como fuente de problemas instructivos. (Necesitará *los dos* volúmenes.)

Roger Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, 1991. Roger Myerson es el primer motor en el tema de diseño de mecanismos. Su libro es una introducción enciclopédica a la teoría de juegos en la que cada ladrillo ha sido colocado cuidadosamente en el lugar que le corresponde. Este es un libro para quienes creen que las cosas deberían hacerse bien.

Peter Ordeshook, *Game Theory and Political Theory*, Cambridge University Press, 1986. Este es el lugar para buscar aplicaciones a la ciencia política.

Martin Osborne y Ariel Rubinstein, *Bargaining and Markets*, Academic Press, 1990. Si necesita más sobre negociación que lo que le ofrece el Capítulo 5 del presente libro, este es un excelente lugar por donde empezar.

Guillermo Owen, *Game Theory*, segunda edición, Academic Press, 1982. Este elegante libro es particularmente fuerte en teoría de juegos cooperativos.

Eric Rasmusen, *Games and Information*, Blackwell, 1989. Este es un libro para los que quieren ir directamente a las aplicaciones económicas sin tener que despistar primero con la teoría.

Thomas Schelling, *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, 1960. Este es un clásico que perdurará en la lista de lecturas de todo el mundo durante muchos años.

Martin Shubik, *Game Theory in the Social Sciences*, MIT Press, 1984. Martin Shubik es uno de los grandes pioneros en la aplicación de la teoría de juegos a la economía. En el segundo volumen de esta obra monumental es donde nos podemos beneficiar de su amplia experiencia.

Jean Tirole, *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, 1988. Este bello libro es un modelo en su género. Aquellos que desean una introducción rápida a la teoría de juegos encontrarán sus necesidades satisfechas en un apéndice magníficamente conciso.

John Von Neumann y Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944. He leído el gran clásico de la teoría de juegos de principio a fin, pero no recomiendo la experiencia a otros. Su interés presente es principalmente histórico.

Herbert Yardley, *The Education of a Poker Player*, Jonathan Cape, 1959. No pierda el tiempo con el Capítulo 12 de *Teoría de juegos* si lo que a usted le interesa es cómo ganar dinero jugando al póquer.

Introducción

El poeta Horacio aconsejaba a sus jóvenes discípulos empezar *in media res*. Creo que tenía razón. La manera de aprender teoría de juegos es ir directamente al primer capítulo y sumergirse en *medio de las cosas*. Esta introducción es para los débiles de corazón y la gente de mediana edad que quieren conocer las respuestas a algunas preguntas antes de comprometerse.

- ¿De qué trata la teoría de juegos?
- ¿De dónde proviene la teoría de juegos?
- ¿A dónde se dirige la teoría de juegos?
- ¿De qué nos puede servir la teoría de juegos?

Estas son grandes preguntas para las que no existen respuestas claras y elegantes. Una introducción sólo puede dar una somera indicación de las respuestas que ofrecen los especialistas en teoría de juegos[1]. Tal vez esto bastará para calmar el apetito.

0.1. ¿De qué trata la teoría de juegos?

Se desarrolla un juego cada vez que unos individuos se relacionan con otros. Cuando usted conduce un coche en una calle urbana y transitada, está practicando un juego con los conductores de los otros coches. Cuando usted puja en una subasta, está llevando a cabo un juego con los demás postores. Cuando toma una decisión sobre el precio al que intentará vender las latas de guisantes, la encargada de un supermercado está realizando un juego con sus clientes y con los y las encargados/as de supermercados rivales. Cuando una empresa y un sindicato negocian los salarios del próximo año, están manteniendo un juego. El abogado defensor y el fiscal practican un juego cuando deciden qué argumentos utilizar delante del jurado. Napoleón y Wellington estuvieron desarrollando un juego en la batalla de Waterloo, y lo mismo hicieron Kruschev y Kennedy durante la crisis de los misiles de Cuba.

Si todas estas situaciones son juegos, entonces evidentemente la teoría de juegos es algo importante. De hecho, se podría argumentar que todas las ciencias sociales no son sino subdisciplinas de la teoría de juegos. Esto no significa, sin embargo, que los especialistas en teoría de juegos disponen de respuestas para todos los problemas del mundo. Esto se debe a que la teoría de juegos, tal como se desarrolla por ahora, se ocupa sobre todo de qué ocurre cuando los individuos se relacionan de forma *racional*. Si esta

[1] El Capítulo 1 de mis *Essays on the Foundations of Game Theory* (Blackwell, 1990) es una introducción más extensa al tema. *Thinking Strategically* (Norton, 1991), de Dixit y Nalebuff, es una deliciosa colección de historias y anécdotas sobre cómo la teoría de juegos funciona en situaciones de la vida real. *Teoría de juegos y modelización económica* (Oxford University Press, 1990), de Kreps, es una introducción que pone énfasis en los usos de la teoría de juegos en la economía.

observación le sugiere devolver este libro de *Teoría de juegos* a la librería con la esperanza de que le devuelvan el dinero, piénseselo de nuevo. Nadie ha dicho que la gente siempre se conduce racionalmente. Pero tampoco es cierto que la gente actúe siempre irracionalmente. La mayoría de nosotros intentamos por lo menos gastar el dinero de una manera razonable, y normalmente no nos va muy mal. Si no fuera así, la teoría económica no funcionaría en absoluto. Ni siquiera cuando no pensamos las cosas con anticipación se puede deducir necesariamente que nos estamos conduciendo irracionalmente. De hecho la teoría de juegos ha cosechado algunos éxitos notables analizando el comportamiento de insectos y plantas, de quienes no podemos decir que piensen lo más mínimo. Su comportamiento es racional porque aquellos insectos y plantas cuyos genes los programaban para comportarse irracionalmente se han extinguido. La evolución los ha quitado de en medio. Y, de la misma forma que la evolución biológica actúa quitando de en medio comportamientos biológicamente inadaptados, otros tipos de evolución pueden actuar para quitar de en medio comportamientos social o económicamente inadaptados. Por ejemplo, empresas que conducen sus asuntos de forma estúpida tienden a quebrar y así desaparecen de la escena.

Tal vez usted esté de acuerdo en que las relaciones racionales entre grupos de individuos constituye un área de estudio apasionante, pero ¿por qué llamarle *teoría de juegos*? ¿No trivializamos los problemas que la gente afronta llamándoles *juegos*? Más grave aún, ¿no devaluamos nuestra categoría humana al reducir la lucha por realizarnos al estatus de una mera *jugada* en un juego?

Las respuestas apropiadas a estas cuestiones las ponen cabeza abajo. Cuanto más en serio nos tomamos las cuestiones de fondo, tanto más importante es que no nos dejemos desorientar por ilusiones. Una de las virtudes de la teoría de juegos es que usa el lenguaje de juegos de salón como el ajedrez o el póquer para discutir la *lógica* de las relaciones estratégicas. Sé que los jugadores de *bridge* en ocasiones disparan contra sus parejas. Yo mismo a veces he sentido la necesidad. Sin embargo, la mayoría de las veces la gente puede pensar los problemas estratégicos que se plantean en los juegos de salón *desapasionadamente*. Esto es, están dispuestos a seguir a la lógica donde quiera que les lleve sin echarse las manos a la cabeza horrorizados si les lleva a un destino no deseado. Por tanto, al insistir en usar el lenguaje de los juegos de salón, los especialistas en teoría de juegos no resultan ser fríos y despiadados seguidores de Maquiavelo a quienes nada importan las penas de este mundo. Simplemente, están intentando separar aquellos aspectos de un problema que son susceptibles de ser analizados racionalmente y sin controversia de los que no lo son.

Por naturaleza, a los seres humanos no se les da muy bien pensar sobre los problemas de las relaciones estratégicas. Nos inquietamos cuando hemos de enfrentarnos a razonamientos circulares. Sin embargo, los razonamientos circulares no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. Si John y Mary están jugando a un juego, la elección de estrategia de John dependerá de su predicción acerca de cuál será la estrategia que Mary elegirá. Pero, simultáneamente, ella está eligiendo una estrategia usando su predicción acerca de la elección estratégica de John. Dado que la teoría de juegos se basa necesariamente en esta clase de lógica retorcida, tal vez no sea sorprendente que abunde en sorpresas y paradojas.

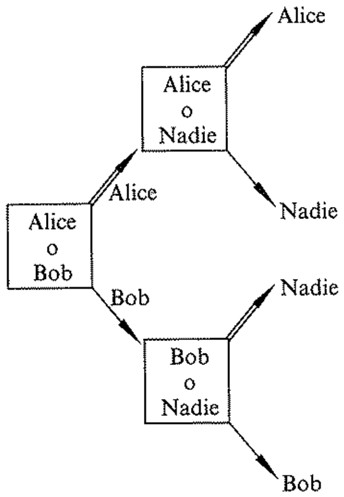
- ¿Le parece a usted posible que en la reunión de un comité alguien considerara que la solución óptima es votar la alternativa que le *gusta menos*?
- ¿Podría ser una buena idea que un general decidiera si atacar hoy o mañana *tirando una moneda al aire*?
- ¿Para un jugador de póquer, puede ser una solución óptima apostar siempre el máximo cuando le sirven *la peor mano*?
- ¿Para alguien que ha de comerciar, podría llegar a tener sentido empezar por *tirar parte de la mercancía*?
- ¿Podría llegar a ser racional que alguien que quiere vender una casa utilice una subasta en la que el mayor postor se queda con la casa pero sólo paga lo que ha ofrecido el *segundo mayor* postor?

Usted ya se imagina, evidentemente, que la respuesta aparentemente absurda es la correcta en cada caso. Vamos a tomar en consideración la primera y la última de estas questiones para intentar entender por qué nuestra intuición nos es tan poco útil. Simultáneamente, esto nos dará una idea de conjunto del libro, porque los problemas del primer tipo se discuten en el Capítulo 1, al comienzo del libro, y los del útimo tipo en el Capítulo 11, hacia el final.

0.1.1. Votaciones estratégicas

Boris, Horace y Maurice constituyen el comité de miembros de la muy exclusiva Sociedad de los Poetas Muertos. Una mañana, el punto final del orden del día es la propuesta de admitir como miembro a Alice. Otro posible candidato llamado Bob no es mencionado, por lo que se propone modificar este último punto. La modificación propuesta dice que el nombre de Alice debería ser reemplazado por el de Bob. Las reglas de voto para comités ordenan que las propuestas de modificación se voten en el orden en que fueron propuestas. Por tanto, el comité empieza votando si Bob debería reemplazar a Alice. Si Alice gana, entonces votarán si Alice o Nadie debería ser aceptado como nuevo miembro. Si Bob gana, entonces votarán si Bob o Nadie debería ser aceptado como nuevo miembro. La Figura 0.1(a) es un diagrama que representa el orden en el que tiene lugar la votación. La Figura 0.1(b) muestra cómo los tres miembros del comité ordenan los tres resultados posibles.

Las líneas dobles de la Figura 0.1(a) indican quién ganaría la votación si todos votaran de acuerdo con sus preferencias. Por ejemplo, en una votación entre Alice y Bob, Alice ganaría porque Boris y Horace prefieren Alice en lugar de Bob, y Maurice perdería la votación. Así, si no se da una votación



(a)

	Boris		Horace		Maurice
1.	Alice	1.	Nadie	1.	Bob
2.	Nadie	2.	Alice	2.	Alice
3.	Bob	3.	Bob	3.	Nadie

(b)

Figura 0.1. Votaciones estratégicas.

estratégica, Alice será elegida miembro del club porque también ganará cuando se enfrente contra Nadie.

Sin embargo, si Horace piensa a largo plazo, verá que no tiene sentido votar contra Bob en la primera votación. Si Bob gana la primera votación, Nadie triunfará en la segunda[2], y Nadie es la primera preferencia de Horace. Por tanto, Horace debería negar el voto a Alice en la primera votación y dárselo a Bob, que es el candidato que le gusta menos. Si Boris y Maurice no votan estratégicamente, el resultado será que Nadie es elegido.

Pero la historia no acaba aquí. Maurice puede prever que Horace votará estratégicamente. Si es así, Maurice también votará estratégicamente, votando a Bob en lugar de a Alice. En este caso Maurice dejará de votar al candidato que le gusta más. La razón para hacer esto es que así se asegura que Alice es elegida en lugar de Nadie.

El razonamiento utilizado por Horace y Maurice en esta historia se llama *inducción hacia atrás*. Predicen lo que ocurriría en el futuro, y entonces razonan hacia atrás hasta el presente. El matemático Zermelo aplicó el mismo tipo de razonamiento al ajedrez hace muchos años, en 1912. Por esta razón, en la Sección 1.4 este proceso se llama *algoritmo de Zermelo*.

A los especialistas en teoría de juegos les interesa lo que ocurre cuando todo el mundo razona óptimamente. En este caso, esto significa que todos usan el algoritmo de Zermelo y, por tanto, todos votan estratégicamente. ¿Significa esto que Alice resulta elegida? ¡Tenga por seguro que esto podrá saberlo después de leer el Capítulo 1!

[2] ¿Por qué no tiene sentido que se vote estratégicamente en la segunda votación?

0.1.2. Subastas

Econ 0.1.3 ⟶

Los Mad Hatters, como el hombrecito que acaba de aparecer en el margen, están pensados para ayudarle a usted a orientarse a través del libro. La Guía Didáctica explica detalladamente lo que significan. El de aquí se dirige corriendo a la Sección 0.1.3 para no tener que aprender algo de economía. La gente de matemáticas tal vez le consideren inteligente. Como dijo Lewis Carroll:

> ¿Y qué significan todos estos misterios para mí
> cuya vida se llena de índices y raíces?

$$x^2 + 7x + 53$$
$$= \cdots 11/3$$

Sin embargo, no sacará gran cosa de este libro, si sólo lee las partes matemáticas.

Alice quiere conseguir el mejor precio posible por su preciosa casa. Tiene dos posibles compradores, Horace y Maurice. Si supiera el precio máximo que cada uno está dispuesto a pagar, el problema sería fácil. Sin embargo, aunque no sabe cuáles son sus precios de reserva, Alice no está en la ignorancia total. Es de conocimiento público que cada comprador potencial tiene un precio de reserva de tres o cuatro millones de dolares, y que ambos valores son igualmente probables. Además, los dos precios de reserva son independientes entre sí (Sección 2.1.2).

Un subastador le aconseja celebrar «subasta de segundo precio». En una subasta de este tipo, cada postor encierra su oferta en un sobre. Entonces, los sobres son abiertos en público y la casa se vende al mejor postor[3], pero no al precio de su oferta. Se vende, por el contrario, al precio más alto *ofertado por un perdedor*. La ventaja de este arreglo, explica el subastador, es que induce a un individuo racional a pujar según su *verdadero* precio de reserva. Horace, por ejemplo, razonaría así. Supongamos que la puja de Maurice es *menor* que mi precio de reserva. Entonces quiero ganar la subasta, y para hacerlo me basta con pujar fielmente según mi precio de reserva. Por otra parte, si la puja de Maurice es *mayor* que mi precio de reserva, entonces no quiero ganar, y me puedo garantizar el no hacerlo pujando fielmente según mi precio de reserva. En una subasta de segundo precio, decir la verdad sobre el precio de reserva es una propuesta de las que «si-sale-cara-yo-gano-si-sale-cruz-tu-pierdes». Los especialistas en teoría de juegos dicen que pujar verazmente es una estrategia que *domina* a las demás alternativas.

Alice entiende todo esto, pero no le gusta mucho lo que oye. Le parece obvio que conseguirá algo mejor vendiendo la casa por el mayor de los precios pujados que por el segundo mayor precio. Por tanto, despide al primer subastador y en su lugar contrata a un segundo subastador que le

[3] Si hay un empate, se rompe por medio del azar.

dice lo que ella quiere oír. Alice organiza una subasta de oferta en sobre cerrado, como la del primer subastador, con la excepción que la casa será vendida al mayor postor al precio por él (o ella) pujado.

Mates 0.1.3 ⟶

Pero Alice se equivoca. El precio de venta esperado es 3 1/4 millones en ambos casos[4]. Esto es fácil de ver en el caso de la subasta de segundo precio. Alice ganará entonces 3 millones, excepto si Horace y Maurice tienen ambos un precio de reserva de 4 millones de dólares. La probabilidad de que ambos tengan un precio de reserva alto es $1/2 \times 1/2 = 1/4$. Su precio esperado de venta en millones de dolares es, por tanto, $3 \times 3/4 + 4 \times 1/4 = 3\ 1/4$.

Tal vez esta referencia a probabilidades y valores esperados le hace sentirse aprensivo. Si éste es el caso, fíjese bien en el Mad Hatter que ha aparecido en el margen y sígale corriendo a la siguiente sección. Lo que usted necesita saber acerca de probabilidades y valores esperados (que no es mucho) será revisado en el Capítulo 2. Por lo que se refiere a las matemáticas que el Mad Hatter, corriendo, quiere evitar, podría utilizarlas para comprobar si este libro es adecuado para alguien con sus conocimientos actuales. Espero que al final del libro un argumento de este tipo parezca transparentemente claro. Sin embargo, ¡si usted consigue ahora algo más que hacerse una idea general de lo que está pasando, entonces tal vez debería plantearse la lectura de un libro más avanzado![5].

Para averiguar el precio de venta que Alice puede esperar en una subasta «de primer precio» de puja secreta necesitamos resolver el problema de puja que una subasta así plantea a Horace y Maurice. Un consultor especialista en teoría de juegos no tendrá razón alguna para no aconsejar a alguien con un precio de reserva de 3 millones de dólares que puje fielmente por este precio. Sin embargo, si Horace tiene un precio de reserva *alto* de 4 millones de dólares, puede que el especialista en teoría de juegos le dé algunos consejos curiosos. El especialista en teoría de juegos le explicará que, sea cual sea la puja que Horace puede estar pensando en encerrar en el sobre, existe el riesgo de que Maurice la prediga. Si lo hace, Maurice ganará la subasta pujando por una peseta más en aquellas ocasiones en que también tiene un precio de reserva alto. El único modo en que Horace puede estar seguro de dejar a Maurice haciendo acertijos es usando una *estrategia mixta*. Lo que esto significa es que Horace debería *aleatorizar* sobre las pujas que es razonable esperar de él.

Si Horace todavía le escucha, el especialista en teoría de juegos se pondrá ahora a explicar en serio *cómo* debería aleatorizar Horace. El consejo puede ser algo así. Nunca puje menos de 3 millones de dólares o más de 3 1/2 millones. Aleatorice sobre todas las pujas entre 3 millones y 3 1/2 millones de dólares de tal manera que la probabilidad de pujar menos de b dólares sea precisamente $(b - 3)/(4 - b)$.

[4] Supuesto que Horace y Maurice pujan racionalmente y son riesgo-neutrales (Sección 3.4.3).

[5] Como, por ejemplo, *Game Theory* (MIT Press, 1991), de Fudenberg y Tirole, o *Game Theory: Analysis of Conflict* (Harvard University Press, 1991), de Myerson.

Si Maurice está escuchando exactamente el mismo consejo de un especialista en teoría de juegos, ¿cuánto debería Horace esperar ganar si su instrumento *aleatorizador* le dice que encierre en el sobre una puja de b millones de dólares? Si supera a Maurice en la puja, habrá ganado $(4 - b)$ millones de dólares, porque ésta es la diferencia entre lo que paga y lo que la casa vale para él. Si pierde en la subasta, no habrá ganado nada. ¿Cuándo ganará, Horace? La mitad de las veces es seguro que ganará, porque el precio de reserva de Maurice sólo será de 3 millones de dólares. La otra mitad de las veces la probabilidad de que Horace gane será $(b - 3)/(4 - b)$, porque ésta es la probabilidad de que Maurice puje menos de b millones de dólares cuando su precio de reserva es 4 millones de dólares. Así pues, la probabilidad total de que Horace gane cuando puja b millones de dólares es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-3}{4-b}\right) = \frac{1}{2(4-b)}.$$

La ganancia esperada se obtiene multiplicando esta probabilidad por $(4 - b)$ millones de dólares que es lo que obtiene cuando gana. Por tanto, la ganancia esperada siempre es de 1/2 millón de dólares, sea cual sea la puja de b millones de dólares, entre 3 y 3 1/2 millones de dólares, que haya podido hacer.

La razón por la que los especialistas en teoría de juegos ofrecerán este consejo tan complicado a Horace y Maurice es que, si lo siguen, cada uno de ellos estará dando una respuesta *óptima* a la elección estratégica del otro. En particular, no hay nada que Horace pueda hacer para mejorar el 1/2 millón de dólares. Ciertamente no estará interesado en pujar B millones de dólares, si $B > 3\ 1/2$ porque, aunque ello le garantiza ganar la subasta, su victoria será pírrica, toda vez que su triunfo sólo le proporcionará $(4 - B)$ millones de dólares[6].

Está claro que Alice concluyó prematuramente que en esta situación las cosas son «obvias». La mayor parte del tiempo, Horace y Maurice pujarán muy por debajo de sus verdaderos precios de reserva. Por tanto, Alice necesita hacer bastantes cálculos antes de poder opinar sobre los méritos relativos de las subastas de primera y segunda puja. Si supone que Horace y Maurice siguen los consejos de sus especialistas en teoría de juegos, Alice hallará que el precio esperado de venta es *exactamente el mismo* en una subasta de primera puja que en una de segunda puja —es decir, 3 1/4 millones de dólares—. También sería el mismo en otros varios tipos de subasta. En particular, el precio esperado de venta es exactamente el mismo en el tipo de subasta familiar en el que los compradores van subiendo sobre las pujas de los otros hasta que sólo queda uno que puja.

[6] Suponiendo que su precio de reserva es alto. Si es bajo, nunca querrá pujar por encima de los 3 millones de dólares.

¿Deberíamos concluir que Alice está perdiendo el tiempo al buscar una mejor subasta? ¡En absoluto! Si Alice se lee esta *Teoría de juegos* hasta la Sección 11.7.4, descubrirá que, si es inteligente, puede designar un mecanismo de subasta que aumenta el precio de venta esperado hasta un magnífico 3 1/2 millones de dólares.

0.1.3. ¿Cuál es la moraleja?

Los dos ejemplos anteriores pretenden mostrar claramente que la teoría de juegos sirve para algo. Nuestra intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas. Necesitamos entrenar nuestra intuición estratégica tomando en consideración ejemplos instructivos. No es necesario que estos ejemplos sean realistas. Por el contrario, en muchas ocasiones disfrutaremos de ventajas sustanciales estudiando *juegos*, si se eligen cuidadosamente. En estos juegos-juegos, nos podemos desentender de todos los detalles irrelevantes típicos de los problemas del mundo real, de manera que podemos centrar la atención en las cuestiones estratégicas —y para dar respuestas a estas cuestiones existe la teoría de juegos.

A menudo los especialistas en teoría de juegos introducen sus juegos-juegos con historias tontas. Es un poco tonto, por ejemplo, que los miembros del comité en el ejemplo de la votación estratégica se llamen Boris, Horace y Maurice[7]. Pero esta tontería tampoco carece de valor. Aquí nos permite desconectar nuestras emociones de los problemas. Nadie puede sentirse involucrado con personajes ficticios tales como Boris, Horace y Maurice. Sin embargo, si les pudieramos identificar con individuos reales, ante el hecho que el presidente ha «manipulado el orden del día», o que Horace está pensando en «votar deshonestamente», podríamos dejar que la indignación apartara nuestra atención de las realidades estratégicas subyacentes. Para un especialista en teoría de juegos esto sería un error comparable al de un matemático que no respeta las leyes de la aritmética porque no le gustan los resultados que está obteniendo.

0.2. ¿De dónde proviene la teoría de juegos?

Filo 0.4 ⟶

La teoría de juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas en este libro fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en un artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

[7] Aquellos cuya lengua materna no sea el inglés «de la reina» tal vez se sorprendan al saber que estos nombres riman.

Cuando corrió la voz, la gente se tiraba por la ventana llevada por el entusiamo. Las ciencias sociales, se pensó, conocerían una revolución de hoy para mañana. Pero no ocurrió así. El libro de Von Neumann y Morgenstern resultó ser sólo el primer paso en un largo camino. Pero no hay mente más cerrada que la del creyente desilusionado, y cuando resultó evidente que *The Theory of Games and Economic Behavior* no podía ser comparado con las tablas de la ley que Moisés se bajó de la montaña, la teoría de juegos languideció en la inactividad. Todavía encontramos profesores mayores que nos explican que la teoría de juegos no sirve para nada porque la vida no es un «juego de suma cero», o porque se puede obtener el resultado que uno quiera seleccionando el apropiado «concepto de solución cooperativa».

Afortunadamente las cosas han evolucionado con mucha rapidez en los últimos veinte años, y éste y otros libros modernos sobre teoría de juegos ya no padecen algunos de los presupuestos restrictivos que Von Neumann y Morgenstern consideraron necesarios para progresar. Como resultado, lo que la teoría de juegos prometía en un principio se está empezando a cumplir. En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de la teoría de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos de sus términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la teoría de juegos. El primero de ellos es el planteamiento *estratégico* o *no cooperativo*. Este planteamiento requiere especificar muy detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar para cada jugador una estrategia *óptima*. De entrada, ni siquiera es evidente qué puede querer decir óptimo en este contexto. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan que el primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama *estrictamente competitivos*, o de *suma cero*, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El ajedrez, el backgammon y el póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

En la segunda parte de su libro, Von Neuman y Morgenstern desarrollaron el planteamiento *coalicional* o *cooperativo*, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaba papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente *indeterminados*.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosa el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se habían auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de *equilibrio*, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría —de aquí que se restringieran a juegos de suma cero—. Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de *equilibrio de Nash*[8] es tal vez el más importante de los instrumentos que los especialistas en teoría de juegos tienen a su disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern. Nash no aceptó la idea de que la teoría de juegos debe considerar indeterminados los problemas de negociación entre dos personas, y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la teoría de juegos pasó en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron ser improductivas.

La historia de la teoría de juegos en los últimos veinte años está demasiado repleta de incidentes para ser contada aquí. Algunos nombres, sin embargo, no deben ser pasados en silencio. El acróstico NASH puede ayudar a recordar quienes son. El propio Nash tiene la letra N, A es por Aumann, S es por Shapley y también por Selten y H es por Harsanyi. ¡Cuando llegue al final del libro ya no necesitará acrósticos!

Lo que es tal vez más importante sobre los últimos veinte años de teoría de juegos es que los mayores progresos se han dado en la teoría *no cooperativa*. Por esta razón, este libro se limita casi exclusivamente a esta rama de la disciplina. Esto no se debe a que yo piense que la teoría *cooperativa* de juegos no contiene resultados importantes, sino simplemente a que comparto con muchos otros la idea de que no se puede discutir razonablemente la rama cooperativa de la disciplina sin haber dominado en primer lugar la rama no cooperativa.

[8] Este aparece cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fue aconsejado, por su consultor especialista en teoría de juegos, que usaran un equilibrio de Nash cuando se estaban preguntando cómo pujar en la subasta de primera puja de la Sección 0.1.2.

0.3. ¿A dónde se dirige la teoría de juegos?

Filo 0.4 ⟶

Es difícil explicar a dónde se dirige la teoría de juegos a una audiencia que no sabe dónde se encuentra. Estas observaciones, por tanto, son para quienes ya saben algo de teoría de juegos.

Tengo opiniones muy decididas sobre la dirección que la teoría de juegos debería tomar, y es reconfortante ver que las cosas parece que se mueven en la dirección correcta. Pero he dejado estas opiniones prácticamente fuera del libro, porque creo que un libro de este nivel los aspectos controvertidos han de ser reducidos al máximo. Es justo, sin embargo, que en algún momento ponga las cartas boca arriba. Así pues tengo que decir que creo que la mayor parte de la literatura sobre «refinamientos del equilibrio de Nash» ha de ser catalogada junto con las obras de la escolástica medieval. Para ser incluso más polémico, quiero añadir que los intentos por hacer del bayesianismo los fundamentos de la teoría de juegos no deben ser comparados a la construcción de casas sobre arena, sino a la construcción de castillos en el aire. Visto retrospectivamente, nos parecerán realmente muy extraños los intentos actuales de hacer de la teoría bayesiana de la decisión algo más que un instrumento analítico conveniente[9].

Mi gesto de deferencia hacia el futuro es el Capítulo 9, que a algunos les podrá parecer un añadido peculiar. Trata de cómo se puede llegar a un equilibrio por medio de procesos evolucionistas de tanteo cuando los jugadores no son completamente racionales. La aparición de autómatas finitos en el Capítulo 8 tambíen está motivada en parte por la importancia que concedo al encontrar vías de ataque sobre el problema de la racionalidad acotada en teoría de juegos. Por supuesto, quienes no estén de acuerdo conmigo sobre lo que nos espera pueden libremente saltarse este material.

0.4. ¿De qué nos puede servir la teoría de juegos?

Esta sección contiene algunas indicaciones sobre las aplicaciones de la teoría de juegos. La economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en teoría de juegos, luego esta es la disciplina por la que debemos empezar.

0.4.1. *Aplicaciones a la economía*

No debería sorprender que la teoría de juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay

[9] Los Capítulos 4, 5 y 6 de mis *Essays on the Foundations of Game Theory* (Blackwell, 1990) ofrecen un sumario de mis ideas sobre estas cuestiones.

más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la teoría de juegos. Los economistas que no se dan cuenta de ello son como el monsieur Jourdain de *Le Bourgeois Gentilhomme*, de Molière, que se sorprendió al saber que había estando hablando en prosa durante toda su vida sin saberlo. Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en teoría de juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern. En consecuencia, sólo podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras que a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la teoría de juegos es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por la que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si él o ella actúa individualmente. Un ejemplo puede ayudar a clarificar este punto. También servirá para indicar por qué la teoría de juegos está tan íntimamente relacionada con el problema de la competencia imperfecta[10].

Oligopolio de Cournot. Una industria contiene N empresas, todas con un coste unitario constante c. Cada empresa se decide simultáneamente por una producción q_i. Cuando la producción total $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N$ llega al mercado, el precio al que se vende viene dado por la ecuación de demanda $p = D(q)$. El beneficio de la i-ésima empresa es, pues,

$$\pi_i = pq_i - cq_i = (D(q) - c)q_i,$$

que es igual a los ingresos menos el coste.

Un especialista en teoría de juegos considera un problema de oligopolio de Cournot como éste como un juego con N jugadores en el que cada uno escoge una estrategia q_i con el objetivo de maximizar el beneficio π_i. En un equilibrio de Nash, la elección estratégica de cada jugador será óptima en función de las elecciones estratégicas de los otros jugadores.

Para dar la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de las demás empresas, la i-ésima empresa elegirá su propia estrategia q_i de manera que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = D'(q)q_i + D(q) - c = 0.$$

[10] La Sección 7.2 se ocupa de las mismas ideas más detalladamente.

Si todas las firmas se comportan así, todas elegirán la misma producción. Así pues, $q_i = q/N$, donde

$$D'(q)\frac{q}{N} + D(q) - c = 0.$$

Considérese el caso especial en el que la elasticidad-precio de la demanda es constante. Esto sólo significa que $p = D(q) = kq^{-\varepsilon}$, donde k y ε son constantes positivas. La ecuación se simplifica así:

$$\frac{p}{c} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)^{-1}.$$

Los economistas están familiarizados con esta fórmula en el caso $N = 1$ como el margen que maximiza beneficios para un monopolista. Cuando $N \to \infty$, obtenemos $p = c$. Este es el resultado clásico de la competencia perfecta que dice que el precio de equilibrio debe igualar el coste marginal. Para valores intermedios de N obtenemos un resultado sobre el comportamiento de equilibrio en un modelo de competencia imperfecta.

Cálculos de este tipo no requieren un conocimiento especial de la teoría de juegos. Sin embargo, tan pronto como se toman en consideración modelos en los que la *secuencia temporal* o el *riesgo* son importantes, o en los que la forma de tratar la *información* es relevante, uno queda desamparado sin el andamiaje conceptual proporcionado por la teoría de juegos. Subastas, mercados de seguros, carreras de patentes, barreras a la entrada y negociación son sólo algunos de los temas de los que podemos ahora hablar con alguna autoridad, y de los que antes poco o nada útil podíamos decir. Algunos de estos temas son estudiados de forma preliminar en este libro. Sin embargo, para hallar las ideas de teoría de juegos explotadas sistemáticamente para la economía hay que acudir a otros textos[11]. Si intentáramos hacer esto aquí, no nos quedaría espacio para explicar la teoría en sí misma.

0.4.2. Aplicaciones a la ciencia política

La teoría de juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se debe a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de proble-

[11] Tal vez a la *Theory of Industrial Organization* (MIT Press, 1988), de Tirole, o a un nivel más avanzado, la *Game Theory* (MIT Press, 1991), de Fudenberg y Tirole.

mas paradigmáticos. Las votaciones estratégicas fueron mencionadas en la Sección 0.1.1. Ahora estudiaremos un modelo sencillo que persigue esclarecer cómo los partidos políticos eligen sus programas. Tiene un cierto aire de familia con los modelos económicos porque las empresas en activo en un sector industrial modifican su conducta cuando quieren desalentar la entrada de empresas nuevas en el sector.

La elección de programa. Este ejemplo empieza con dos partidos políticos, los Formalistas y los Idealistas. Ninguno de los dos se preocupa en absoluto por cuestiones de principio. Sólo se preocupan por el poder y, por tanto, eligen el programa con el único objetivo de maximizar el voto en las próximas elecciones. Los votantes, por otra parte, sólo se preocupan por cuestiones de principio y, por tanto, carecen por completo de fidelidad a los partidos. Para simplificar, las opiniones que un votante puede tener se identifican con los números reales en el intervalo $[0, 1]$[12]. Podemos imaginarnos que este intervalo representa el espectro político de izquierda a derecha. Así, alguien con la opinión $x = 0$, cree que la sociedad debería estar organizada como un hormiguero, mientras que alguien con la opinión $x = 1$ cree que debería estar organizada como una piscina llena de tiburones.

Cada partido centra su programa en algún punto del espectro político y no puede cambiar su posición posteriormente. Los votantes votan por el partido que se encuentra más cerca de su posición. Dado que se supone que los votantes se encuentran distribuidos uniformemente sobre el espectro político[13], es fácil ver cuántos votos conseguirá cada partido una vez que han elegido programa. El secreto está en buscar el *votante mediano* entre aquellos cuyas opiniones se encuentran entre los programas de ambos partidos. El votante mediano se encuentra a medio camino entre las posiciones políticas de los dos partidos. Luego los que se encuentran a la derecha del votante mediano votarán por un partido, y los que se encuentran a la izquierda lo harán por el otro. En la Figura 0.2(a) se da un ejemplo.

Supongamos que los partidos bajan al ruedo político uno a uno. Los Idealistas escogen programa en primer lugar, y luego lo hacen los Formalistas. ¿Dónde debería colocarse cada uno? Problemas como éste pueden ser resueltos por inducción hacia atrás, como se ha explicado en la Sección 0.1.1. Para cada programa posible x, los Idealistas se preguntan qué ocurriría si se colocaran en x. Si $x < 1/2$, los Formalistas responderían colocándose inmediatamente a la derecha de x. Entonces los Idealistas recogerían una fracción x de los votantes y los Formalistas recogerían $1 - x$. Por tanto, los Idealistas ganarían menos de la mitad del voto. Lo mismo ocurre si los Idealistas se sitúan en $x > 1/2$, excepto que ahora los Formalistas responderán colocándose inmediatamente a su izquierda. Por tanto, lo mejor para los Idealistas es colocarse en el centro del espectro

[12] El intervalo $[0, 1]$ es el conjunto de valores de x que satisfacen $0 \leqslant x \leqslant 1$.

[13] Esto simplemente significa que una fracción l de la población sostiene opiniones que se encuentran en cualquier intervalo de longitud l.

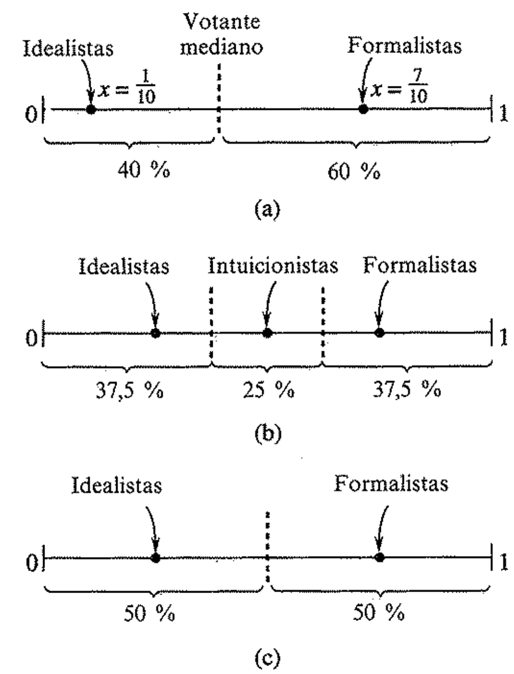


Figura 0.2. La elección de un programa político.

político. Los Formalistas también se colocarán en $x = 1/2$, y el voto se dividirá mitad y mitad.

Este modelo puede tener sentido en la escena política americana. Ciertamente es difícil para muchos europeos encontrar diferencias significativas entre Demócratas y Republicanos. El modelo, sin embargo, tiene poco parecido con la escena política europea. ¿Deberían los americanos deducir, por tanto, que los partidos políticos europeos de verdad se toman en serio los principios que hacen suyos? Una conclusión así sería prematura porque es dudoso que la situación europea pueda ser razonablemente analizada con un modelo de dos partidos, y esto es cierto incluso para un país como Gran Bretaña en el que sólo dos de los partidos consigue un número importante de votos en la mayoría de elecciones. Para explorar esta cuestión veamos cómo cambiarían las cosas si tuvieramos que tomar en consideración un tercer partido.

En este modelo el partido Intuicionista escoge programa después de los Idealistas y los Formalistas. Esto cambia mucho las cosas. Los Idealistas y los Formalistas ciertamente no se colocarán ahora en el centro del espectro político. Si lo hicieran, los Intuicionistas se podrían colocar inmediatamente a su derecha o izquierda. Entonces recogerían la mitad del voto dejando que los primeros partidos se dividan la otra mitad. Un razonamiento por inducción hacia atrás[14] hace ver que los Idealistas y los Formalistas se colocarán en $x = 1/4$ y $x = 3/4$, dejando que los Intuicionistas adopten la posición centrista $x = 1/2$, como se muestra en la Figura 0.2(b). Los primeros partidos recibirán entonces 3/8 de los votos cada uno, y los Intuicionistas sólo recogerán 1/4.

Pero, ¿por qué querrían los Intuicionistas entrar en la arena política, si están condenados al papel de Cenicienta, con los primeros partidos en el papel de Hermanas Feas? Modifiquemos, por tanto, el modelo de manera que los Intuicionistas consideren que vale la pena formar un partido sólo si pueden prever que recibirán más del 26% de los votos. En este caso los Idealistas se moverán un poco hacia el centro, aunque no lo bastante como para que los Intuicionistas puedan entrar flanqueándolos por la izquierda. Por tanto, sólo se moverán desde $x = 0{,}25$ a $x = 0{,}26$. Análogamente, los Formalistas se moverán desde $x = 0{,}75$ a $x = 0{,}74$. El resultado será una elección con dos partidos como en la Figura 0.2(c). En esta elección los Idealistas y los Formalistas se dividen el voto a partes iguales y los Intuicionistas se quedan fuera.

Un comentarista político ignorante de la amenaza que supone la entrada de los Intuicionistas podría fácilmente malinterpretar las razones por las que los Idealistas y los Formalistas han elegido sus programas. El comentarista podría incluso llegar a pensar que cada partido ni siquiera intentó hacerse con el centro por cuestiones de principio. Pero es sólo tras un análisis estratégico que la conducta de los dos partidos puede ser evaluada correctamente. Obsérvese, en particular, que su conducta ha sido determinada por algo que de hecho no llegó a ocurrir. Como Sherlock Holmes explicaba, a menudo lo importante es que el perro *no* ladró aquella noche.

0.4.3. Aplicaciones a la biología

Es imposible igualar el entusiasmo con que los biólogos evolucionistas que usan la teoría de juegos explican historias de conducta animal[15]. No sé si escogen historias poco delicadas deliberadamente, para dar un poco de sabor a sus relatos con implicaciones sexuales, o si éstos son realmente los mejores ejemplos para ilustrar de qué manera la teoría de juegos es relevante. En cualquier caso, lo que los biólogos dicen sobre el pez sol es esto.

Hay dos clases de machos en esta especie. El primero es un individuo regularmente hogareño que necesita siete años para alcanzar la madurez. Una vez alcanzada, construye un nido que atrae a las hembras que ponen huevos. Cuando los huevos han sido puestos, no sólo los fertiliza, sino que

[14] Algunas sutilezas surgen debido al hecho que disponemos de un número infinito de opiniones políticas. Aquí y en capítulos posteriores las podemos evitar suponiendo que los Idealistas y los Formalistas adoptan posiciones ligeramente más radicales que las descritas.

[15] Véase, por ejemplo, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, 1982), de Maynard Smith.

defiende la familia resultante lo mejor que puede; mientras, la hembra continúa con su vida independientemente. La otra clase de macho es un golfo. Por lo que dicen los biólogos, es poco más que un órgano sexual autopropulsado. Este posee una ventaja sobre los machos normales, que consiste en que alcanza la madurez en sólo dos años. Sin embargo, es incapaz de responsabilizarse de una familia. En lugar de ello, espera escondido hasta que una hembra ha puesto sus huevos respondiendo a las señales de un macho normal, y entonces sale corriendo a fertilizar los huevos antes de que el macho normal tenga la oportunidad de hacerlo. Si el golfo tiene éxito, el macho normal defiende una familia que no está relacionada con él en absoluto y que lleva por el contrario los genes del golfo.

La teoría de juegos sirve para explicar por qué las dos clases de machos pueden coexistir en proporciones fijas. Imaginemos un lago en el que viven N machos de la especie, donde N es un número grande. Podemos pensar pues en términos de un juego con N jugadores. El objetivo de cada jugador es maximizar el número de descendientes esperados. Las posibles estrategias de cada jugador en el juego son *hogareño* y *golfo*. El beneficio obtenido por un jugador al elegir una de estas estrategias depende de las estrategias elegidas por los otros jugadores. Si un número suficiente de jugadores escoge *hogareño*, la mejor estrategia es escoger *golfo*, porque habrá una gran oferta de nidos de cuco por explotar. Si un número suficiente de jugadores escoge *golfo*, la mejor estrategia es escoger *hogareño*, porque será difícil encontrar alguien de quien abusar. Por tanto, cuando *hogareño* es una elección estratégica suficientemente popular, se da el incentivo para ir contra corriente escogiendo *golfo*. Análogamente, cuando *golfo* es suficientemente popular, se da el incentivo para pasarse a *hogareño*.

Un equilibrio de Nash en este juego con N jugadores se da cuando la proporción de jugadores que escoge *hogareño* y la proporción que escoge *golfo* se equilibran tan exactamente que a cada jugador le resulta *indiferente* continuar con su actual estrategia o cambiarse a la estrategia alternativa. Entendido esto, es fácil entender por qué las dos clases de macho sobreviven y por qué las frecuencias de sus poblaciones permanecen estables —mejor dicho, *sería* fácil de entender si los peces *fueran* optimizadores racionales capaces de seleccionar los genes que han de llevar.

Para que una historia de teoría de juegos se aguante en este contexto, necesitamos una explicación de cómo los genes se distribuyeron exactamente en la forma necesaria para asegurar que cada pez optimizaría, dada la mezcla actual en la población de hogareños y golfos. No basta con decir que la Naturaleza, «con las garras y las fauces llenas de sangre», actuará de forma que sólo quienes se adaptan sobreviven. Esta respuesta rehúye el problema de cómo y por qué resulta que a veces adaptarse implica actuar racionalmente. Esta parece ser una de esas grandes cuestiones que no tienen respuestas fáciles. El Capítulo 9 no hace más que indicar algunas direcciones en las que se podría encontrar la respuesta. Tal vez la investigación actual producirá algo realmente nuevo en esta área. Si fuera así, ¡la teoría de juegos habría dado realmente el salto a la fama!

0.4.4. *Aplicaciones a la filosofía social*

Actualmente de moda, esta área de aplicación es ciertamente muy divertida. ¿Era realmente el juego llamado el dilema del prisionero (Sección 7.5.4) lo que Thomas Hobbes tenía en la cabeza cuando, en su *Leviathan* de 1654, conceptualizó el estado natural del hombre como la «guerra de todos contra todos» en la que la vida es «solitaria, pobre, desagradable, brutal y corta»? ¿O se estaba refiriendo al juego del gallina? ¿El *imperativo categórico* de Immanuel Kant nos dice que debemos cooperar en el dilema del prisionero, o debería ser considerado únicamente como un criterio para la selección de equilibrios? ¿Estaba Karl Marx refiriéndose a un juego cuando escribió sobre la explotación de la clase obrera? ¿Cómo juega el juego de la caza del ciervo de Jean-Jacques Rousseau la gente real? ¿Es realmente racional usar el principio del maximín en la «posición original», como ha postulado John Rawls en su celebrada *Theory of Justice*?

Soy una persona demasiado irreverente para tener derecho a opinar sobre estas cuestiones tan importantes. Sin embargo, por lo que pueda valer, diré que pienso que las obras de los grandes filósofos son más valiosas por las cuestiones que plantean que por las respuestas que ofrecen. Para ser aún más irreverente, creo que existe una clase entera de cuestiones a las que no podemos esperar que los grandes filósofos del pasado hayan proporcionado respuestas, porque esto supondría por lo menos que habrían anticipado algunas de las ideas que la teoría de juegos ha aportado a la filosofía social moderna.

El filósofo David Hume, sin embargo, es una excepción muy notable a este juicio. Los especialistas en teoría de juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que, con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado. Con este fin estudian los equilibrios de juegos *con repetición* —juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez—. Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin teoría de juegos será algo inconcebible —y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

0.5. Conclusión

Si ha leído hasta aquí, probablemente ya se ha enganchado. Pero no se trague también el hilo y el plomo. Atienda a lo que dicen éste y otros libros de teoría de juegos y entonces fórmese su propia opinión. Se han escrito

muchas tonterías a propósito de la teoría de juegos, ¿y quién puede decir que este libro no las contiene también? Es cierto, como Bertrand Russell dijo a propósito de la filosofía, que leer teoría de juegos es como leer un cuento de hadas —la incredulidad debe dejarse en suspenso mientras el cuento es contado, si uno quiere enterarse de qué va—. ¡Pero no olvide recuperar la disposición escéptica cuando el cuento se ha acabado!

CAPITULO

1

Ganar

1.1. Introducción

La definición formal de un juego es bastante simple desde un punto de vista matemático, pero no es tan simple entender lo que la definición formal significa. Las ideas necesarias, por tanto, serán introducidas una a una en los capítulos siguientes. En el presente capítulo consideraremos únicamente juegos con dos jugadores, de información perfecta y sin jugadas de azar. Además, nos restringiremos especialmente a la consideración de juegos estrictamente competitivos. Esto significa simplemente que los objetivos de los jugadores son diametralmente opuestos.

Las tres en raya es un ejemplo simple de esta clase de juego. El ajedrez es un ejemplo mucho más complejo. Estos son juegos de información perfecta porque cada vez que un jugador ha de jugar sabe todo lo que podría desear saber sobre lo que hasta ahora ha ocurrido en el juego. El parchís es un juego con dos jugadores, estrictamente competitivo y con jugadas de azar. Lo que un jugador puede hacer cuando le toca jugar depende del lanzamiento de un dado. El póquer es un juego de información imperfecta. En el póquer, cuando hay que decidirse por una apuesta a cualquiera le gustaría saber las manos de los demás jugadores, pero está información le está vedada.

1.2 Las reglas del juego

Las reglas de un juego deben decirnos *quién* puede hacer *qué* y *cuándo* puede hacerlo. También deben indicarnos *cuánto* gana cada uno cuando el juego ha terminado. La estructura utilizada en teoría de juegos para expresar esta información se llama árbol. Un árbol es un caso especial de lo que en matemática combinatoria se llama un grafo. Un grafo, en este sentido, es simplemente un conjunto de nodos (o vértices), algunos de los cuales están conectados por aristas. Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos, como se indica en la Figura 1.1.

¿Cuándo? La primera jugada de un juego se identifica con un nodo especialmente marcado del árbol del juego. Este se suele llamar la *raíz* del árbol.

Una partida del juego consiste de una cadena conexa de aristas que empiezan en la raíz del árbol y terminan, si el juego es finito, en un nodo terminal. Los nodos terminales del árbol corresponden a los posibles resultados del juego. La Figura 1.2(a) muestra el árbol de un juego *G*. (Nos olvidaremos de la Figura 1.2(b) por el momento.) La raíz del árbol ha sido marcada con la letra *a*. Una partida del juego se ha indicado ensanchando las aristas correspondientes.

¿Qué? Los nodos del árbol representan las jugadas posibles durante el juego. Los segmentos que salen de un nodo representan las acciones o

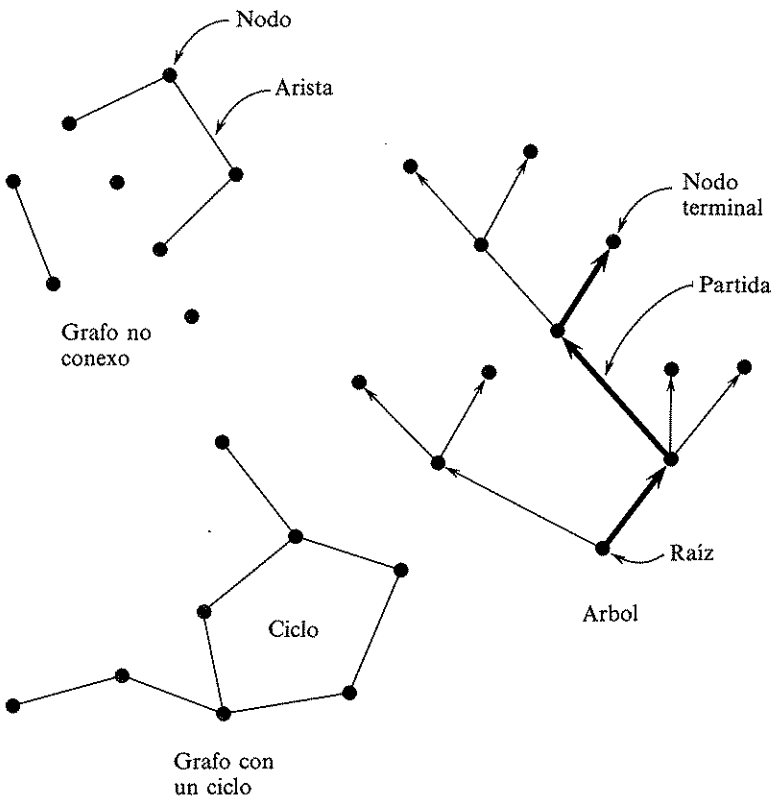


Figura 1.1. Grafos.

elecciones posibles en esa jugada. Así, por ejemplo, hay dos elecciones posibles para la primera jugada en el juego-árbol de la Figura 1.2(a). Han sido marcadas l y r.

¿Quién? A cada nodo no terminal se le asigna el nombre o número de un jugador, de manera que se sabe quién elige en esa jugada. En el árbol de la Figura 1.2(a), el jugador I es quien elige en la primera jugada. Si él elige r, entonces será la jugadora II quien hará la siguiente jugada. Esta tiene tres opciones, llamadas L, M y R. Si elige R, el juego se ha terminado. Si elige L, tiene que jugar de nuevo.

(Algunos juegos contienen jugadas de azar. Por ejemplo, lo que los jugadores pueden hacer en el parchís depende en la magnitud del número obtenido cuando se tira un dado. Estas situaciones se tratan asignando jugadas a un jugador mítico llamado Azar. Cada acción en una jugada de

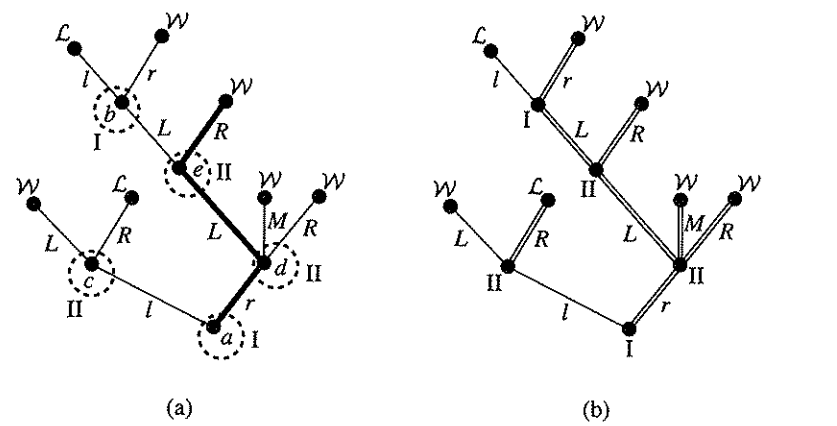


Figura 1.2. El árbol del juego G.

Azar se marca con la probabilidad con la que será elegida. Esta cuestión será discutida en el siguiente capítulo.)

¿Cuánto? Cada nodo terminal ha de ser marcado con las consecuencias que tiene para cada jugador que el juego termine con el resultado correspondiente a ese nodo terminal. Por el momento nos limitaremos a considerar ejemplos de juegos que sólo pueden ser ganados o perdidos. En este caso, cada nodo terminal puede ser marcado o bien con $\mathcal{W}$ (para indicar que el jugador I gana y el II pierde), o bien con $\mathcal{L}$ (para indicar que el jugador I pierde y el II gana). El juego G de la Figura 1.2(a) es un ejemplo. Daremos por supuesto que ningún jugador está motivado por un deseo perverso de perder. El objetivo de los dos jugadores es ganar el juego, si pueden.

1.2.1. Dos ejemplos

Tres en raya. Todo el mundo sabe cómo jugar a este juego. Su árbol, a pesar de la simplicidad del juego, es muy largo y, por tanto, la Figura 1.3 sólo muestra parte del árbol. Sólo se muestran tres de sus muchos nodos terminales. Se han marcado con las letras $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{D}$ para indicar, respectivamente, que el jugador I gana, pierde o empata.

Nim. Este es un juego simple que se juega ocasionalmente. Al empezar se dispone de varios montones de cerillas. Dos jugadores se alternan en sus jugadas. En cada jugada, el jugador o jugadora correspondiente escoge un montón y retira de él por lo menos una cerilla. El último jugador que retira una cerilla gana. La Figura 1.4 da el árbol del juego cuando éste empieza con tres montones de cerillas, dos de los cuales contienen una cerilla y el

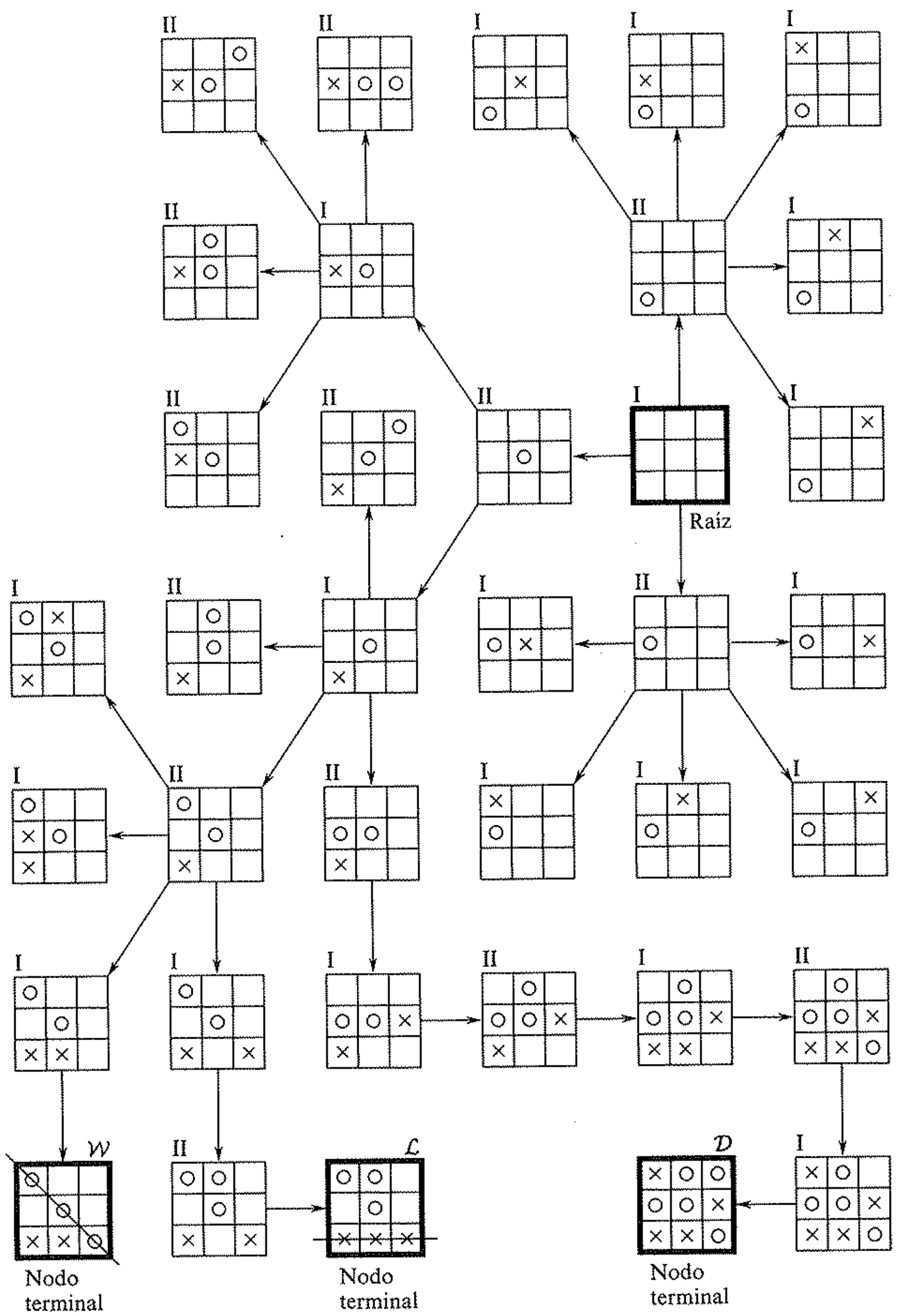


Figura 1.3. Tres en raya.

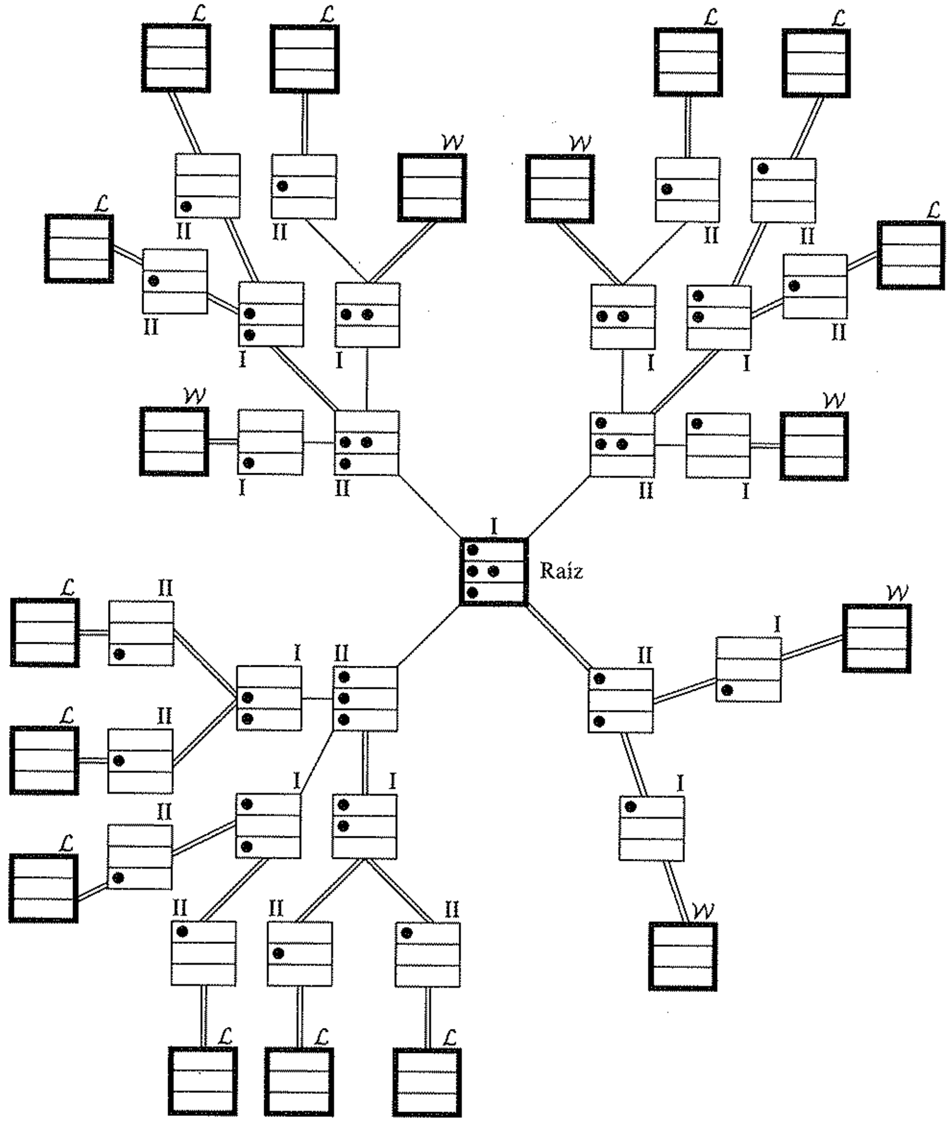


Figura 1.4. El juego del nim.

otro contiene dos cerillas. (Por el momento ignoraremos que algunos de los segmentos del árbol han sido doblados.) Todos los nodos terminales han sido marcados con $\mathcal{W}$ o con $\mathcal{L}$. A diferencia de lo que ocurre en tres en raya, nim no puede terminar en empate. Uno de los dos jugadores ha de ganar. Hasta llegar a la Sección 1.7, donde estudiaremos el ajedrez, sólo consideraremos juegos de este tipo.

1.3. Estrategias

Por ahora sólo discutiremos estrategias *puras*[1]. En los juegos considerados en este capítulo[2], una estrategia pura para el jugador i es un plan que especifica una acción para *cada uno* de los nodos en los que el jugador i debería tomar una decisión, si el nodo fuera alcanzado en realidad. Si todos los jugadores de un juego seleccionan una estrategia pura y se mantienen fieles a ella, entonces el desarrollo de un juego sin jugadas de azar queda totalmente determinado.

Consideremos el juego G de la Figura 1.2(a). Los nodos en los que correspondería al jugador I tomar una decisión están marcados a y b. Por tanto, una estrategia pura para el jugador I debe especificar una acción para el jugador I en el nodo a y una acción para el jugador I en el nodo b. Puesto que se dan 2 acciones posibles para el jugador I en el nodo a y 2 acciones posibles en el nodo b, se sigue que el jugador I dispone de un total de $2 \times 2 = 4$ estrategias puras. Estan se pueden representar como sigue:

$$ll, \quad lr, \quad rl, \quad rr.$$

La estrategia pura representada por lr significa que la acción l será utilizada si se alcanza el nodo a, y que se usará la acción r si se alcanza el nodo b. La estrategia pura rr significa que la acción r ha de ser usada tanto en el nodo a como en el b. (Obsérvese que si el jugador usa la estrategia pura lr, entonces es imposible alcanzar el nodo b, independientemente de lo que haga la jugadora II. Sin embargo, la definición formal de estrategia requiere el especificar una acción para el nodo b aunque la acción especificada en él nunca haya de tener efecto alguno en cómo se desarrolla el juego.)

Los nodos en los que correspondería a la jugadora II tomar una decisión están marcados c, d y e en el juego G de la Figura 1.2(a). Una estrategia pura para la jugadora II, por tanto, deberá especificar una acción para ella en los nodos c, d y e. Puesto que existen 2 acciones posibles para la jugadora II en el nodo c, 3 acciones posibles en el nodo d y 2 acciones posibles en el nodo e, se sigue que la jugadora II dispone de un total de $2 \times 3 \times 2 = 12$ estrategias puras. Estas pueden ser representadas como sigue:

$$LLL, \quad LLR, \quad LML, \quad LMR, \quad LRL, \quad LRR,$$
$$RLL, \quad RLR, \quad RML, \quad RMR, \quad RRL, \quad RRR.$$

[1] Una estrategia *mixta* exige que un jugador randomice entre sus estrategias puras.

[2] En juegos con información incompleta la definición de una estrategia ha de ser modificada y sólo se requiere especificar las acciones a tomar para cada *conjunto de información* sobre el que correspondería al jugador i optar por una opción en el supuesto de que alcanzara este conjunto de información.

	LLL	LLR	LML	LMR	LRL	LRR	RLL	RLR	RML	RMR	RRL	RRR
ll	W	W	W	W	W	W	L	L	L	L	L	L
lr	W	W	W	W	W	W	L	L	L	L	L	L
rl	L	W	W	W	W	W	L	W	W	W	W	W
rr	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Figura 1.5. La forma estratégica del juego G.

La estrategia pura representada por LMR significa que la acción L ha de ser usada si se alcanza el nodo c, que la acción M ha de ser usada si se alcanza el nodo d y que la acción R ha de ser usada si se alcanza el nodo e.

La partida del juego G en la Figura 1.2(a) empieza en el nodo-raíz a cuando el jugador I escoge la acción r. Esta conduce al nodo d, en el que la jugadora II escoge la acción L. Esta a su vez lleva el juego al nodo e, donde la jugadora II escoge la acción R. Con ello el juego es llevado a su fin en el nodo terminal señalado con W, para indicar que gana el jugador I. Una partida así será representada por la serie de acciones $[rLR]$ que la generan. (Los paréntesis cuadrados tienen como finalidad el subrayar que una partida no es en absoluto lo mismo que una estrategia pura.)

¿Cuáles son las estrategias que producen la partida $[rLR]$ de G? El par de estrategias escogidas por los jugadores han de ser de la forma (rx, XL), donde rx representa cualquier estrategia del jugador I en la cual escoge r en el nodo a. Existen 2 estrategias así, rl y rr. Análogamente, XLR representa cualquier estrategia de la jugadora II en la que escoge L en el nodo d y R en el nodo e. Existen 2 estrategias así, LLR y RLR. Luego el número total de pares de estrategias que producen la partida $[rLR]$ es $2 \times 2 = 4$.

La Figura 1.5 muestra la *forma estratégica* del juego G de la Figura 1.2 (a)[3]. La representación en árbol del juego G en la Figura 1.2(a) se llama la *forma extensiva* de G. La forma estratégica indica, para cada par de estrategias, cuál será el resultado del juego si se usa ese par de estrategias. Las filas de la matriz representan las estrategias puras del jugador I, y las columnas las de la jugadora II. La casilla en la fila rl y la columna LLR contienen la letra $\mathcal{W}$. Esto indica que el jugador I ganará el juego si él usa la estrategia pura rl y

[3] La teoría de juegos, como disciplina, empezó con la publicación en 1944 del libro de Von Neumann y Morgenstern *The Theory of Games and Economic Behavior*. El libro empieza discutiendo la *forma extensiva* de un juego, que se basa en la noción de árbol de un juego descrita en la Sección 1.2. A continuación, define la *forma normal* de un juego. Como indica la terminología, Von Neumann y Morgenstern pensaban que el procedimiento «normal» de analizar un juego debía consistir siempre en descartar la forma extensiva en favor de la forma normal. Resulta, sin embargo, que esto sería a menudo poco inteligente. Para indicar este hecho, me uno a los especialistas en teoría de juegos que prefieren hablar de *forma estratégica* de un juego en lugar de de su forma normal. Es necesario tener presente, sin embargo, que la forma normal y la forma estratégica de un juego son exactamente la misma cosa.

la jugadora II usa la estrategia pura *LLR*. Esto fue comprobado en el párrafo anterior al continuar la partida [*rLR*] que resultaba de utilizar pares de estrategias de la forma (*xr*, *XLR*).

1.4. El algoritmo de Zermelo

Zermelo utilizó este método muchos años atrás, en 1912, para analizar el ajedrez. El método requiere empezar por el final del juego y marchar hacia atrás hasta su principio. Por esta razón esta técnica es llamada a veces «inducción hacia atras». Esencialmente la misma idea recibe en Investigación Operativa el nombre «programación dinámica». Esta idea realmente simple se puede ilustrar usando el juego G de la Figura 1.2(a). Lo que probaremos es que el jugador I tiene una estrategia para G que le garantiza la victoria sea cual sea de la estrategia que emplee la jugadora II. El método aquí utilizado puede ser aplicado en general a juegos de este tipo.

1.4.1. Analizando el juego G

La Figura 1.6 muestra todos los *subjuegos* de G. En el caso de los juegos considerados en este capítulo, cada uno de los nodos x que no es un nodo terminal determina un subjuego[4]. Un subjuego consiste simplemente de un nodo x junto con todo el árbol que viene a continuación. (Obsérvese que la definición incluye al propio G entre sus subjuegos.)

Diremos que el *valor* $v(H)$ de un subjuego H de G es $\mathcal{W}$ si el jugador I dispone de una estrategia para H que le hace ganar H sea cual sea la estrategia que use la jugadora II. Análogamente, diremos que el valor $v(H)$ del subjuego H es $\mathcal{L}$ si la jugadora II dispone de una estrategia que le hace ganar H sea cual sea la estrategia que use el jugador I. Obsérvese que a priori no existe razón alguna por la que alguna de estas dos proposiciones deba ser verdad y, por tanto, sería concebible que un subjuego H no tuviera ningún valor según nuestra definición. Resulta que todos los subjuegos sí tienen de hecho un valor, pero esto es algo que no debería darse por supuesto. (De hecho, es una característica especial de los juegos estrictamente competitivos.)

Consideremos en primer lugar los subjuegos de un jugador G_0 y G_3 de la Figura 1.6. La jugadora II gana G_0 escogiendo la acción R. (Recuérdese que que un resultado es marcado $\mathcal{L}$ cuando la jugadora II gana.) Luego $v(G_0) = \mathcal{L}$. Análogamente, el jugador I gana G_3 escogiendo la acción r. Luego $v(G_3) = \mathcal{W}$.

Consideremos ahora el juego G' de la Figura 1.7. Este se ha obtenido a partir de G reemplazando el subjuego G_0 por un nodo terminal marcado

[4] Esto no es cierto para los juegos con información incompleta, como el póquer, en los que hay que utilizar una definición más precisa que toma en consideración lo que la gente sabe, o no sabe, en cada fase del juego.

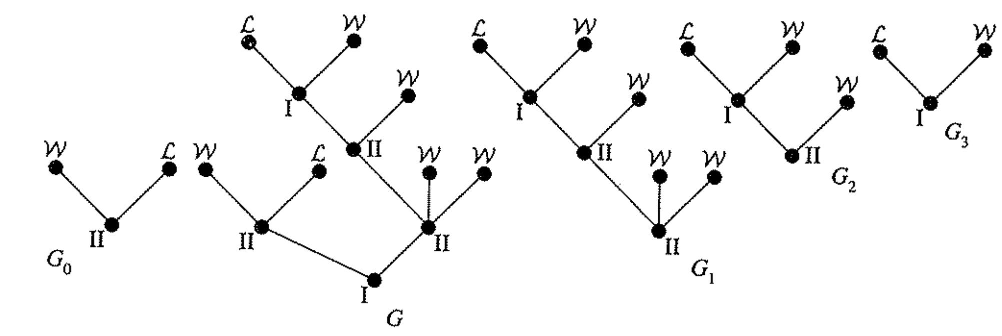


Figura 1.6. El juego G y sus subjuegos.

con el valor L de G_0, y reemplazando el subjuego G_3 por un nodo terminal marcado con el valor $\mathcal{W}$ de G_3. Si el jugador I tiene una estrategia s' que siempre gana el juego G', entonces tiene una estrategia s que siempre gana G. ¿Por qué es así?

Sea cual sea la estrategia empleada por la jugadora II, el uso por el jugador I de la estrategia s' en G' resultará en una partida de G' que conduce a un nodo terminal x de G' marcado con $\mathcal{W}$. Este nodo terminal x puede que corresponda a un subjuego G_x de G. Si es así, entonces $v(G_x) = \mathcal{W}$. Luego el jugador I tiene una estrategia ganadora s_x en G_x. Se sigue de aquí que el jugador I tiene una estrategia ganadora s para G. Esta consiste en jugar según s' hasta que se llega a uno de los subjuegos G_x, y jugar entonces según s_x.

Un razonamiento muy parecido muestra que si la jugadora II dispone de una estrategia t' que siempre gana en G', entonces dispone de una estrategia t que siempre gana en G. Se sigue que si G' tiene un valor, entonces también lo tiene G y $v(G') = v(G)$.

Consideremos ahora el juego G'' de la Figura 1.8. Este se ha obtenido a partir de G' reemplazando el subjuego G'_2 por un único nodo terminal marcado con el valor $\mathcal{W}$ de G'_2. La razón por la que $v(G'_2) = \mathcal{W}$ es que la jugadora II pierde en el juego de un jugador G'_2 tanto si elije la acción L

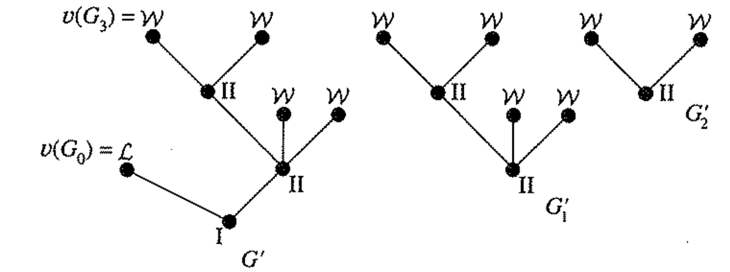


Figura 1.7. El juego G' y sus subjuegos.

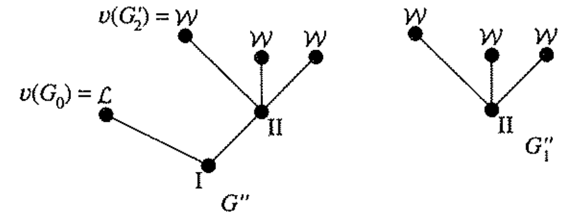


Figura 1.8. El juego G'' y sus subjuegos.

como si elige la R. Por el razonamiento utilizado antes, si G'' tiene un valor, también lo tiene G' y $v(G'') = v(G')$.

Finalmente, consideremos el juego G''' de la Figura 1.9. Este se ha obtenido a partir de G'' reemplazando el subjuego G_1'' por un único nodo terminal marcado con el valor de G_1''. Como antes, si G''' tiene un valor, también lo tiene G'' y $v(G''') = v(G'')$.

Ahora bien, G''' es un juego de un jugador que el jugador I puede ganar eligiendo r. Luego G''' tiene un valor y $v(G''') = W$. Se sigue que G también tiene un valor, y que $v(G) = v(G') = v(G'') = v(G''') = \mathcal{W}$. Luego el jugador I dispone de una estrategia que gana en G sea cual sea la estrategia usada por la jugadora II.

1.4.2. ¿Qué es una estrategia ganadora para G?

Una manera de hallar una estrategia ganadora para el jugador I en el juego G es descubrirla en la forma estratégica del juego dada en la Figura 1.5. Obsérvese que la fila correspondiente a la estrategia pura rr del jugador I sólo contiene $\mathcal{W}$. Esto significa que si el jugador I emplea la estrategia pura rr, entonces ganará con independencia de la estrategia pura elegida por la jugadora II. Luego, rr es una estrategia ganadora. (En G no hay más estrategias ganadoras para el jugador I, pero con frecuencia los juegos tienen muchas estrategias ganadoras.) Sin embargo, excepto en casos muy sencillos, esta no es una manera razonable de localizar una estrategia ganadora porque la enorme cantidad de trabajo involucrada en la construcción de la forma estratégica hace el método impracticable.

Una manera mejor para encontrar una estrategia ganadora es copiarse el método con el que hemos probado que existe una estrategia ganadora

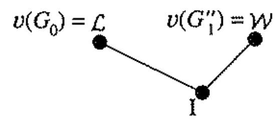


Figura 1.9. El juego G'''.

para G. Empecemos por considerar los menores subjuegos de G (aquellos que no contienen a su vez subjuegos). En cada uno de ellos, doblemos los segmentos que corresponden a elecciones óptimas en el subjuego. Ahora hagamos como si los segmentos no doblados no existieran. Esto produce un nuevo subjuego G^*. Repitamos ahora el proceso con G^*, y continuemos de esta forma hasta que ya no se pueda hacer nada. Al final del proceso existirá por lo menos una partida de G cuyos segmentos han sido todos ellos doblados. Estas son las únicas partidas que hay que seguir, si es conocimiento común entre los jugadores que ambos, siempre y en cualquier circunstancia, intentarán ganar.

Este proceso se ha llevado a cabo para el juego G en la Figura 1.2(b). Sólo una partida del juego tiene todos sus segmentos doblados y conduce a la victoria al jugador I, confirmando así que el jugador I es el que dispone de una estrategia ganadora. Una estrategia pura ganadora puede ser leída directamente en el diagrama eligiendo uno de los segmentos doblados en cada uno de los nodos en los que correspondería al jugador I tomar una decisión, si se llegara a ese nodo. En el caso de G, sólo el segmento r aparece doblado en cada uno de estos nodos. Luego el jugador I sólo tiene una estrategia pura ganadora, que es rr.

1.5. Nim

El proceso que acabamos de describir también se ha llevado a cabo para la versión del nim dada en la Figura 1.4. Obsérvese que, para asegurarse la victoria, el jugador I ha de coger todas las cerillas del montón conteniendo dos. Esto es todo lo que en realidad el jugador I necesita saber. Sin embargo, se puede ver que éste no tiene una *única* estrategia ganadora porque en alguno de los nodos en los que tendría que jugar, si fueran alcanzados, más de un segmento aparece doblado. Se puede ver también que si el jugador I no empleara una estrategia ganadora, no es *seguro* que perdería. Si éste deja de adoptar la acción ganadora en la primera jugada, se llega a un subjuego en el cual la jugadora II dispone de una estrategia ganadora. Pero la jugadora II puede no usar su estrategia ganadora en este subjuego.

Este procedimiento para hallar estrategias ganadoras es fácil de usar cuando se da explícitamente el árbol del juego. Habitualmente, sin embargo, el árbol del juego ha de ser construido a partir de un conjunto de reglas enunciadas verbalmente. Esto puede suponer mucho trabajo. Además, después de construido el árbol puede ser muy grande. Esto es cierto incluso para juegos tan simples como tres en raya o nim (excepto cuando el número de cerillas en cada montón es muy pequeño). Por tanto, debemos buscar métodos menos mecánicos para descubrir cosas acerca de las estrategias ganadoras.

Para el nim existe un método muy elegante que evita la necesidad de construir un árbol del juego. Lo ilustraremos usando la versión del nim

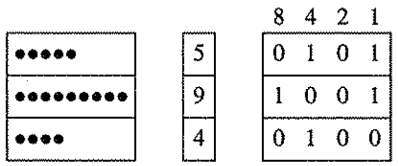


Figura 1.10. Nim con muchas cerillas.

dada en la Figura 1.10. En esta figura el número de cerillas en cada montón se ha expresado primero en el sistema decimal y después en el de base dos[5].

Llamemos *equilibrado* un juego de nim si cada columna de la representación binaria tiene un número par de unos, y *desequilibrado* en caso contrario. El ejemplo de la Figura 1.10 es desequilibrado porque la columna de ochos tiene un número impar de unos. Es fácil verificar que *cualquier* jugada admisible transforma un juego equilibrado en uno desequilibrado[6].

El jugador que juega primero en un juego equilibrado no puede ganar en su primera jugada. La razón es que un juego equilibrado ha de tener cerillas por lo menos en dos montones. Quien juegue, por tanto, no puede recoger inmediatamente la última cerilla porque le está permitido llevarse cerillas sólo de un montón. Se sigue que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora que tiene como característica esencial que una situación desequilibrada ha de convertirse siempre en una situación equilibrada[7]. La razón por la que esta estrategia gana es que asegura que el contrincante no puede ganar en la siguiente jugada. Puesto que esto es cierto en todas las fases del juego, se sigue que el contrincante no puede ganar nunca. Pero alguien debe recoger la última cerilla. Si no es mi contrincante, debo ser yo. Luego debo estar usando una estrategia ganadora.

Obsérvese que el jugador I no siempre dispone de una estrategia ganadora. Si la configuración original de cerillas es desequilibrada, será el jugador I quien dispone de una estrategia ganadora. Pero si la configuración original es equilibrada, entonces será la jugadora II quien dispone de ella.

La Figura 1.11 muestra una partida posible para la versión del nim dada en la Figura 1.10. El jugador I está usando una estrategia ganadora. Merece ser destacado que una vez que el jugador I se enfrenta a sólo dos montones de cerillas con un número igual de cerillas en ambos, entonces puede ganar «robando la estrategia». Todo lo que debe hacer es llevarse tantas cerillas de un montón como la jugadora II se llevó del otro.

[5] Por ejemplo, el número cuya expresión decimal es 9 comprende 1 ocho, 0 cuatros, 0 doses, y 1 uno. Luego su representación en forma binaria es 1001.

[6] Por lo menos un 1 en la representación binaria del montón del que se retiran cerillas pasará a ser necesariamente un 0. Si la columna en lo que esto ocurre tenía $2n$ unos, después tendrá $2n - 1$.

[7] ¿Por qué es esto siempre posible?

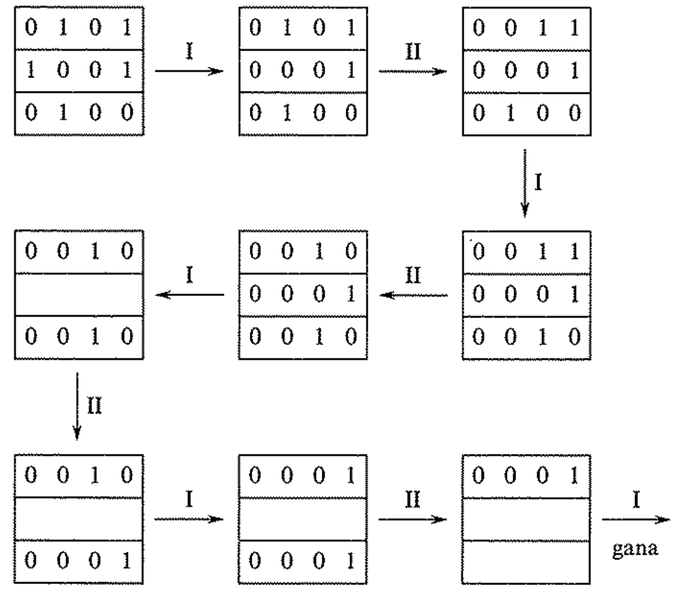
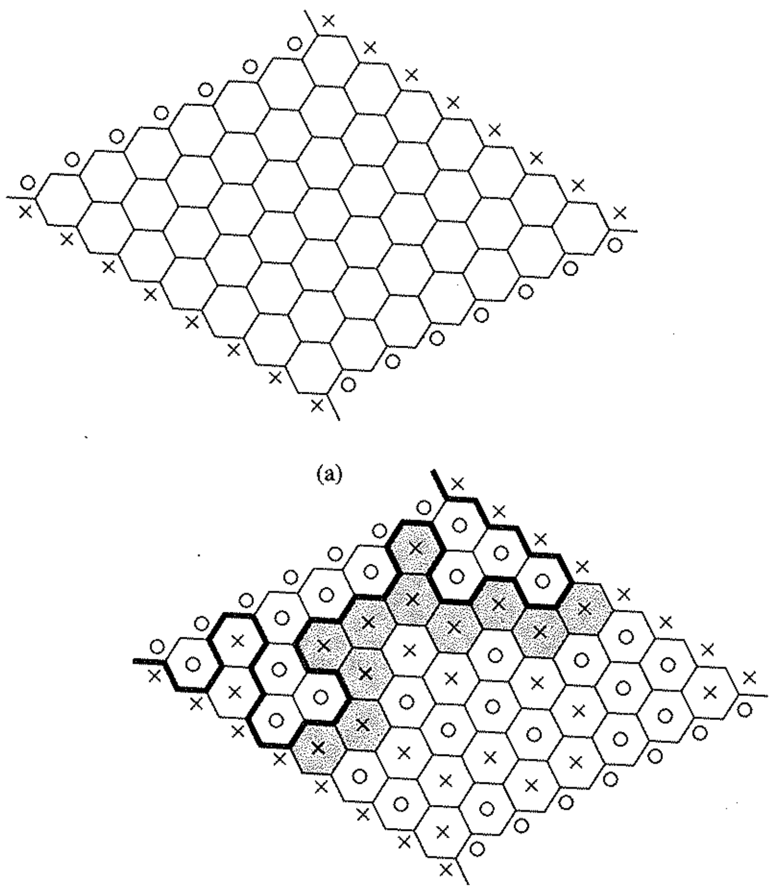


Figura 1.11. El jugador I emplea una estrategia ganadora para el nim.

1.6. Hexágonos

El juego de los hexágonos se juega sobre un tablero que consiste de n^2 hexágonos dispuestos en un paralelogramo como muestra la Figura 1.12(a). Los jugadores juegan alternadamente. Una jugada consiste en marcar en el tablero un hexágono vacante con un círculo (para el jugador I) o una cruz (para la jugadora II). Esto incorpora el hexágono al territorio del jugador que lo marcó. Al principio, el territorio de cada jugador consiste de dos lados opuestos del tablero. El ganador es el primero en unir los dos lados que le corresponden por medio de una cadena continua de hexágonos marcados con su emblema. En el juego que acaba de terminar en la Figura 1.12(b) la ganadora ha sido Cruz. El juego de los hexágonos es interesante por diversas razones. En primer lugar, porque fue investigado por John Nash, de quien hablaremos extensamente más adelante. En segundo lugar, resulta ser importante que el juego no puede terminar en empate, pero una prueba convincente de ello no es trivial. En tercer lugar, aunque los argumentos dados en la Sección 1.4 muestran que uno de los jugadores dispone de una estrategia ganadora para los hexágonos, no se sabe cuáles son las estrategias ganadoras excepto para valores pequeños de n. Sin embargo, es posible probar que de los dos jugadores, el primero en mover es quien debe disponer de una estrategia ganadora.



(a)

(b)

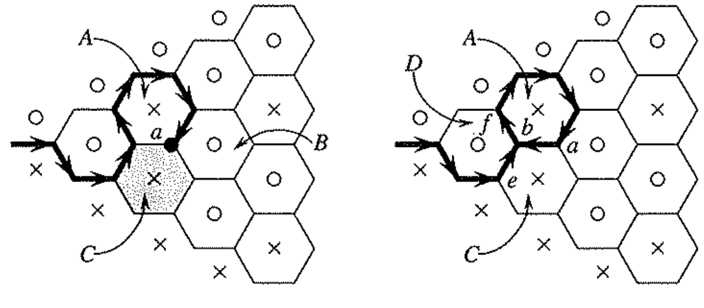
Figura 1.12. Hexágonos.

1.6.1. Por qué los hexágonos no pueden terminar en empate

Mates
1.7 ⟶

En cierto sentido es «obvio» que los hexágonos no pueden terminar en empate. Si pensamos que los círculos son agua y las cruces tierra, entonces, cuando *todos* los hexágonos han sido marcados, o bien el agua unirá los dos océanos que pertenecían originalmente al Círculo, o bien el canal quedará taponado. En el primer caso gana el Círculo. En el segundo, gana la Cruz.

Probar este resultado requiere un razonamiento matemático, como indica la aparición de un Mad Hatter en el margen. La Guía Didáctica explica detalladamente cómo usar estos Mad Hatters para orientarse a través del libro. En el presente caso, el Mad Hatter representa una invitación a saltar directamente a la Sección 1.7, excepto si es usted un entusiasta de las



(a) (b)

Figura 1.13. El algoritmo de Gale para los hexágonos.

matemáticas. Si este libro constituye su primer contacto con la teoría de juegos, debe considerar la posibilidad de simplemente seguir al Mad Hatter a todas partes.

El siguiente algoritmo de David Gale muestra que si todos los hexágonos han sido marcados con un círculo o una cruz, entonces uno de los dos pares de lados opuestos deben estar unidos. Empecemos por una esquina, como se indica en la Figura 1.13(a), y señalemos un camino siguiendo el principio que el siguiente segmento del camino siempre es escogido de manera que un hexágono con círculo se encuentra a uno de sus lados y un hexágono con cruz al otro[8].

Un camino así nunca puede terminar dentro del tablero. Tampoco no puede volver a pasar por un punto que ya ha sido visitado. Los dos diagramas de la Figura 1.13 están pensados para sugerir por qué estas afirmaciones son ciertas.

La Figura 1.13(a) muestra un camino que ha alcanzado el punto a en el interior del tablero. Para llegar a a tiene que haber pasado entre un hexágono con cruz A y uno con círculo B. Tiene que haber un tercer hexágono C del cual a es un vértice. Si tiene una cruz, como en la Figura 1.13(a), entonces el camino puede continuar pasando entre B y C. Si a se encuentra en el borde del tablero, el razonamiento debe modificarse ligeramente, pero continúa valiendo. El razonamiento sólo deja de ser válido si a es uno de los cuatro puntos en las esquinas del tablero. Estos son los únicos puntos en los que el camino puede terminar.

La Figura 1.13(b) muestra un camino que ha vuelto a pasar por un punto b que ya había visitado antes. Para hacer esto, sin embargo, el camino ha tenido que violar el requerimiento de mantener un hexágono con

[8] Esto se hubiera podido hacer volviendo inmediatamente por el camino con el que se llegó, pero se entiende que esto no está permitido.

cruz a un lado y uno con círculo al otro. Para comprobar que un camino nunca puede describir un circuito cerrado sin violar este requerimiento, supongamos que b es el *primer* punto que el camino vuelve a visitar. Para que b hubiera sido visitado la primera vez sería necesario que los tres hexágonos A, C y D con un vértice común en b no pueden estar marcados todos de la misma forma. Supongamos, como en la Figura 1.13(b), que D contiene un círculo y los otros dos hexágonos contienen cruces. Entonces el camino debe haber pasado entre D y C y entre D y A en la primera visita. Puesto que b es el *primer* punto vuelto a visitar del camino, el camino no puede haber llegado a b vía e o f. Debe haber vuelto a b desde a. Pero A y C contienen ambos cruces, luego esto es imposible. Como antes, el razonamiento debe ser modificado ligeramente para los puntos en el borde del tablero, pero también es válido para ellos.

Puesto que el tablero es finito y el camino no puede detenerse ni volver a pasar por donde ya ha pasado, debe terminar en una de las esquinas del tablero distinta de la de salida. Se sigue, como muestra la Figura 1.12(b), que uno de los pares de lados opuestos del tablero debe estar unido. Luego los hexágonos no pueden acabar en tablas.

1.6.2. Por qué el jugador I tiene una estrategia ganadora

La demostración es por reducción al absurdo. La estructura de estas demostraciones puede a veces ser confusa, y por ello empezaremos por delinear la lógica de la demostración. Sea P la proposición que la jugadora II dispone de una estrategia ganadora. Demostraremos que $P \Rightarrow$ (no P)[9]. Entonces, si P fuera verdad, (no P) también sería verdad. Pero es contradictorio que P y (no P) sean ambos ciertos simultáneamente. Por tanto, P no puede ser verdad. Luego (no P) debe ser cierta. Luego el jugador I no dispone de una estrategia ganadora. Pero sabemos por la Sección 1.4 que alguien dispone de una estrategia ganadora. Ya que no es la jugadora II debe ser el jugador I. Luego el jugador I dispone de una estrategia ganadora para los hexágonos.

Para probar que $P \Rightarrow$ (no P) hemos de demostrar que si la jugadora II tiene una estrategia ganadora, entonces el jugador I también debe tener una estrategia ganadora. Nash proporcionó un argumento de los de «robar la estrategia» para probarlo.

Si la jugadora II dispone de una estrategia ganadora, entonces el jugador I puede robársela obedeciendo las siguientes instrucciones:

1. En la primera jugada, escoja un hexágono al azar y márquelo con un círculo.

[9] La notación $P \Rightarrow Q$ significa que P implica Q. Esto es, si P es verdad, entonces Q es verdad.

2. En cualquier jugada posterior, haga como si el último hexágono que marcó con un círculo no estuviera marcado. A continuación haga como si todos los restantes hexágonos con círculos contuvieran cruces, y como si los hexágonos con cruces contuvieran círculos. Ahora se ha colocado usted en la posición en la que se aplica la estrategia ganadora de la jugadora II. Elija el hexágono que la jugadora II escogería en esta posición si quisiera utilizar su estrategia ganadora. Márquelo con un círculo. El único contratiempo posible es que este hexágono sea el que usted está tomando como no marcado. Si es así, entonces no tiene que robarle al jugador II la jugada ganadora para esta posición porque ya se la ha robado. Le basta con escoger al azar un hexágono y marcarlo con un círculo.

Esta estrategia debe hacer ganar al jugador I porque éste está haciendo simplemente lo que supuestamente asegura una victoria al jugador II. Y no sólo esto, sino que lo está haciendo una jugada antes de lo que lo haría la jugadora II. El hecho de que tiene un hexágono extra marcado con su emblema no le hace daño alguno. Al contrario, su presencia le puede servir para obtener la victoria antes de lo que hubiera sido de esperar.

1.7. Ajedrez

Excepto las tres en raya, los juegos considerados hasta ahora terminan necesariamente con la victoria de uno de los dos jugadores. El ajedrez, sin embargo, puede terminar de tres maneras posibles. A la posibilidad de que Blancas ganen o pierdan tenemos que añadir la posibilidad de que el juego termine en tablas. Representaremos estas tres posibilidades por $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente. Las preferencias del jugador I sobre estos resultados se indican escribiendo

$$\mathcal{L} \prec_1 \mathcal{D} \prec_1 \mathcal{W}.$$

Las preferencias de la jugadora II viene dadas por

$$\mathcal{L} \succ_2 \mathcal{D} \succ_2 \mathcal{W}.$$

En general, la notación $a \preceq_i b$ significa que al jugador i le gusta el resultado b por lo menos tanto como el a. La notación a $\prec_i b$ significa que el jugador i prefiere b a a estrictamente. Es decir, que nunca elegirá a cuando pueda elegir b. La notación $a \sim_i b$ significa que el jugador i es indiferente entre a y b. Escribir $a \preceq_i b$ es, pues, equivalente a decir que o bien $a \prec_i b$ o bien $a \sim_i b$.

Las propiedades de estas relaciones de preferencia serán discutidas en detalle en el Capítulo 3. Por el momento bastará con observar que las preferencias atribuidas a los jugadores I y II hacen del ajedrez un juego *estrictamente competitivo*. En términos de relaciones de preferencia esto significa que, para cualesquiera resultados a y b[10],

$$a \prec_1 b \quad \Leftrightarrow \quad b \prec_2 a.$$

Mates 1.7.1⟶

Los objetivos de los jugadores son diametralmente opuestos. Todo lo que es bueno para uno es malo para el otro.

El principal resultado de esta sección es que el ajedrez tiene un valor. Esto se deducirá de un teorema más general cuya prueba se reduce a poca cosa más que a dejar presentable la exposición del algoritmo de Zermelo dada en la Sección 1.4. En el enunciado del teorema, la afirmación de que el jugador I puede *forzar* un resultado en un conjunto S significa que el jugador I tiene una estrategia que garantiza que el resultado se encontrará en el conjunto S sea cual sea la estrategia usada por su oponente. Usaremos la notación $\sim S$ para el *complementario* del conjunto S[11]. En el teorema, por ejemplo, $\sim T$ consiste de todos los resultados que no están en el conjunto T.

Torema 1.7.1 (Zermelo). Sea T un conjunto cualquiera de resultados de un juego finito de dos jugadores, de información perfecta y sin jugadas de azar[12]. Entonces, o bien el juagador I puede forzar un resultado en T o la jugadora II puede forzar un ressultado en $\sim T$.

Demostración. Marquemos todos los resultados de T con la letra $\mathcal{W}$ y todos los resultados de $\sim T$ con la letra $\mathcal{L}$. En el resto de la demostración podemos restringir nuestra atención a juegos finitos con dos jugadores cuyos nodos terminales están marcados todos con $\mathcal{W}$ o con $\mathcal{L}$. Como en la Sección 1.4, definamos el valor $v(H)$ de un juego H de este tipo como $\mathcal{W}$ si el jugador I puede forzar una victoria en H, y como $\mathcal{L}$ si la jugadora II puede forzar una victoria en H. El teorema quedará probado si se puede demostrar que cualquier H del tipo aquí estudiado tiene un valor. Evidentemente el razonamiento de la Sección 1.4 se puede utilizar para este propósito. Sin embargo, dado que queremos que esto sea la prueba formal de un teorema, el razonamiento debería ser presentado con un grado razonable de precisión.

Sea el rango de un juego el número de segmentos en la partida más larga de todas las posibles. Es ciertamente verdad que cualquier juego de rango 1 tiene un valor. Un juego así consiste de una raíz y algunos nodos terminales. Si al jugador I le toca escoger en la raíz, entonces puede ganar inmediatamente si alguno de los nodos terminales está marcado $\mathcal{W}$. En caso contrario, todos los nodos terminales están marcados con una $\mathcal{L}$ y, por tanto, la jugadora II puede forzar una victoria sin hacer nada en absoluto. Un razonamiento análogo muestra que un juego de rango 1 tiene un valor si la jugadora II es quien debe escoger en la raíz.

Supongamos ahora que para algún valor de n todos los juegos de rango n tienen un valor. Demostraremos que en este caso todos los juegos de rango $n + 1$ también han de tener un valor.

Sea G un juego de rango $n + 1$. Localicemos el último nodo no terminal x en cada partida de G de longitud $n + 1$. Construyamos un nuevo juego G' suprimiendo en G todo lo que viene a continuación de cada uno de estos nodos x. Así, los nodos x se convierten en nodos terminales de G'. Marquemos cada uno de estos nodos terminales con el valor $v(G_x)$ del subjuego G_x cuya raíz es x. Estos subjuegos son de rango 1 y, por tanto, tienen un valor.

Puesto que el juego G' es de rango n, tiene un valor. Supongamos que es el jugador I quien dispone de una estrategia s' que gana el juego G' contra cualquier estrategia que pudiera usar la jugadora II. El uso de s' asegura que G' terminará en uno de los nodos terminales de G' marcados con $\mathcal{W}$. Si este nodo terminal corresponde a un subjuego G_x de G, entonces $v(G_x) = \mathcal{W}$ y el jugador I tiene una estrategia ganadora s_x en G_x. El jugador I puede forzar una victoria en G jugando s' en G' y s_x en cada subjuego G_x en el que dispone de una estrategia ganadora. El mismo razonamiento se aplica cuando es la jugadora II quien tiene una estrategia ganadora en G'. Luego uno de los jugadores puede forzar una victoria en G, y G tiene un valor.

Hemos demostrado que los juegos de rango 1 tienen un valor. También hemos demostrado que si todos los juegos de rango n tienen un valor, *entonces* también lo tienen todos los juegos de rango $n + 1$. De aquí se deduce que *todos* los juegos tienen un valor. Para ver que es así, empecemos tomando $n = 1$. Puesto que juegos de rango 1 tienen un valor, podemos deducir que juegos de rango 2 tienen un valor. Ahora tomemos $n = 2$. Esto nos permite deducir que juegos de rango 3 tienen un valor. Esto nos permite deducir que juegos de rango 4 tienen un valor, y así sucesivamente[13].

[10] La notación $P \Leftrightarrow Q$ significa que P es verdad si y sólo si Q es verdad. Esto es, $P \Leftrightarrow Q$ significa que tanto $P \Rightarrow Q$ como $Q \Rightarrow P$ son verdad. Para expresar que $P \Rightarrow Q$ se puede decir que P es una condición suficiente para Q. Análogamente, $Q \Rightarrow P$ significa que P es una condición necesaria para Q. Luego $P \Leftrightarrow Q$ se puede traducir por P es una condición necesaria y suficiente para Q.

[11] La notación $x \in S$ significa que x es un elemento (o un miembro) del conjunto S. La notación $x \notin S$ significa que x no es un elemento de S. El complementario $\sim S$ de un conjunto S se puede definir simbólicamente como $\sim S = \{x : x \notin S\}$. Para que la definición tenga sentido, es necesario conocer previamente el dominio de la variable x. En el texto, el dominio se entiende que es el conjunto U de todos los resultados del juego estudiado.

[12] Esto simplemente significa que el árbol del juego tiene un número finito de nodos.

[13] El enunciado general de este tipo de razonamiento se llama el *principio de inducción*. Este afirma que si $P(n)$ es una proposición definida para cada $n = 1, 2, ...,$ y si

1. $P(1)$ es verdad;
2. Para cada n, es verdad que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$;

entonces $P(n)$ es verdad para todos los valores de n.

Hemos demostrado que todos los juegos que estamos considerando tienen un valor. Luego, o bien el jugador I puede forzar un resultado en T, o bien la jugadora II puede forzar un resultado en $\sim T$. □

1.7.1. Valores de juegos estrictamente competitivos

Mates

Observemos en primer lugar que un Mad Hatter ha aparecido en el margen. La Guía didáctica explica detalladamente lo que significa su aparición. Habitualmente aparece corriendo hacia otra sección, y los principiantes harían bien en seguirle. Aquí *no* está corriendo, aunque parece que no le falten ganas. Esto significa que nos vamos a encontrar con algo un poco más difícil de lo habitual, pero que debemos resistir la tentación de echar a correr.

Diremos que un resultado v es un valor de un juego finito y estrictamente competitivo G si y sólo si el jugador I puede forzar un resultado en el conjunto $W_v = \{u : u \succeq_1 v\}$ y la jugadora II puede forzar un resultado en el conjunto $L_v = \{u : u \succeq_2 v\}$. Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue supondremos que el jugador I no es indiferente entre ningún par de resultados de G. Así, los resultados en el conjunto $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ de todos los posibles resultados de G pueden ser representados de forma que

$$u_1 \prec_1 u_2 \prec_1 \cdots \prec_1 u_k.$$

Entonces las preferencias de la jugadora II satisfacen $u_1 \succ_2 u_2 \succ_2 \cdots \succ_2 u_k$. La Figura 1.14 ilustra lo que significa para estos juegos tener un valor v.

Corolario 1.7.1. Todos los juegos finitos, estrictamente competitivos, de información perfecta y sin jugadas de azar tienen un valor.

Demostración. El jugador I puede ciertamente forzar un resultado en el conjunto W_{u_1} porque éste contiene todos los resultados del juego. Cietamente no puede forzar un resultado en un conjunto menor que W_{u_k} porque este conjunto sólo contiene el único elemento u_k. Luego existe un conjunto *mínimo* W_v en el que el jugador I puede forzar que se dé el resultado. Ahora, si $v = u_j$, el jugador I *no puede* forzar que el resultado se dé en $W_{u_{j+1}}$. Según el teorema de Zermelo se sigue que la jugadora II puede forzar un resultado en $\sim W_{u_{j+1}} = L_v$. Esto completa la demostración. □

La jugadora II puede forzar un resultado aquí

u_1	u_2	$\cdots$	$v = u_j$	u_{j+1}	$\cdots$	u_k

El jugador I puede forzar un resultado aquí

Figura 1.14. El valor v de un juego estrictamente competitivo.

Corolario 1.7.2. El ajedrez tiene un valor.

Demostración. Se deduce inmediatamente del Corolario 1.7.1. □

1.7.2. Puntos de silla

Diremos que un par de estrategias (s, t) es un punto de silla de la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo si, desde el punto de vista del jugador I, el resultado v que se deriva de usar (s, t) no es peor que ninguno de los resultados de la columna correspondiente a t, y no es mejor que ninguno de los de la fila correspondiente a s.

Corolario 1.7.3. La forma estratégica de un juego finito, estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar tiene un punto de silla (s, t).

Demostración. Supongamos que el juego tiene el valor v. Sea s una estrategia que asegura al jugador I un resultado $u \succeq_1 v$. Ninguna de las entradas en la fila s de la forma estratégica puede ser peor que v para el jugador I. Sea t una estrategia que asegura a la jugadora II un resultado $u \succeq_2 v$. Ninguna de las entradas en la columna t puede ser peor que v para la jugadora II. Puesto que el juego es estrictamente competitivo, cada entrada en la columna t no es mejor que v para el jugador I. Por tanto, el resultado actual de jugar (s, t) no puede ser peor ni mejor que v para el jugador I. Puesto que en esta sección suponemos que los jugadores no son indiferentes respecto a los resultados, se sigue que el resultado de jugar (s, t) debe ser v. De aquí se sigue el corolario. □

Un recíproco de este resultado nos será útil.

Teorema 1.7.2. Supongamos que la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo G tiene un punto de silla (s, t) para el cual el resultado correspondiente es v. Entonces G tiene valor v.

Demostración. Puesto que v es el peor resultado de su fila para el jugador I, éste puede forzar para él un resultado por lo menos tan bueno como v jugando s. Puesto que v es el mejor resultado de su columna para el jugador I, es el peor de su columna para la jugadora II. Luego la jugadora II puede forzar para ella un resultado por lo menos tan bueno como v jugando t. □

Estos resultados son ilustrados en la Figura 1.15, que contiene una forma estratégica imaginaria del ajedrez. El ajedrez es tan complicado que

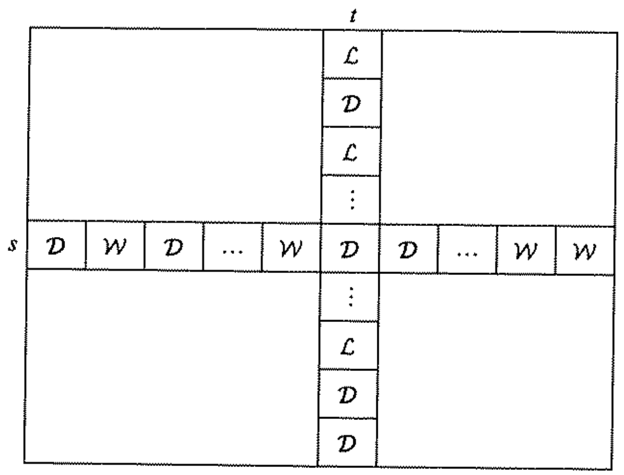


Figura 1.15. La forma estratégica del ajedrez.

tal vez su valor real v no será conocido jamás. Si $v = \mathcal{W}$, entonces las Blancas pueden forzar la victoria. Si $v = \mathcal{L}$, entonces las Negras pueden forzar la victoria. Si $v = \mathcal{D}$, entonces ambos jugadores pueden forzar tablas. La Figura 1.15 ha sido realizada suponiendo que esta tercera posibilidad era la correcta. La estrategia s representa una estrategia pura que asegura tablas o un resultado mejor para el jugador I, y t representa una estrategia pura que asegura tablas o un resultado mejor para la jugadora II. Por el Corolario 1.7.3, el par (s, t) es un punto de silla de la forma estratégica del ajedrez.

1.8. ¿Juego racional?

¿Qué consejo debería dar un libro de teoría de juegos a cada uno de los dos jugadores que van a empezar a jugar un juego G estrictamente competitivo de información perfecta sin jugadas de azar? Si el juego tiene valor v, la respuesta puede parecer fácil. Con seguridad cada jugador debería simplemente escoger estrategias puras que le aseguran un resultado no peor que v. Si un par así de estrategias puras (s, t) es utilizado, entonces el resultado del juego será v[14]. Pero debemos llevar cuidado al aceptar el par (s, t) como una solución del juego. El resto de esta sección se dedicará a discutir algunas de las cuestiones relevantes a este respecto.

[14] Suponiendo, como en la sección precedente, que los jugadores no son indiferentes entre ninguno de los resultados. Si son a veces indiferentes entre dos resultados, entonces el resultado de jugar (s, t) podría ser un resultado w que no es v, pero que ambos jugadores consideran equivalente a v.

1.8.1. Equilibrios de Nash

El par (s, t) ciertamente satisface uno de los criterios que debe ser satisfecho para que en general un libro de teoría de juegos lo adopte como solución de un juego. El criterio es que (s, t) sea un *equilibrio de Nash*. Esto simplemente significa que s debe ser una elección óptima para un jugador I que sabe que que la jugadora II elegirá t; simultáneamente, t debe ser una elección óptima para una jugadora II que sabe que el jugador I elegirá s. En otras palabras, cada una de las estrategias puras del par (s, t) debe ser una respuesta óptima a la otra.

En un juego estrictamente competitivo la condición para que un par (s, t) sea un equilibrio de Nash es que sea un punto de silla de la forma estratégica del juego. El que v sea el mejor de su fila hace que s sea una respuesta óptima para el jugador I. En un juego esrictamente competitivo, si v es el peor de su fila para el jugador I, entonces debe ser el mejor de su fila para la jugadora II. Luego t es una respuesta óptima a s para la jugadora II.

Consideremos, por ejemplo, la forma estratégica de la Figura 1.5. Esta tiene muchos equilibrios de Nash. Todos los pares de estrategias puras en los que el jugador I usa rr son equilibrios de Nash. Es decir, todos los resultados de la fila inferior de la matriz corresponden a puntos de silla.

Sería contradictorio que un especialista en teoría de juegos recomendara a cada jugador algo que no fuera un equilibrio de Nash. Si la recomendación fuera adoptada de forma general, entonces la manera de jugar el juego sería conocimiento común. Pero si se sabe que cualquier jugadora II llevará a la práctica el consejo del libro y jugará t, entonces ningún jugador racional I llevará a la práctica el consejo del libro de jugar s, excepto si s es una respuesta óptima a t. Análogamente, si se sabe que todo jugador I llevará a la práctica el consejo del libro y jugará s, entonces ninguna jugadora racional II llevará a la práctica el consejo del libro de jugar t, excepto si t es una respuesta óptima a s.

1.8.2. Equilibrio subjuego-perfecto

En la forma estratégica de la Figura 1.5, (rr, LLL) es un equilibrio de Nash. Sin embargo no es un par de estrategias que serían seleccionadas por un algoritmo de Zermelo. Como sabemos por la Sección 1.4, el algoritmo de Zermelo siempre escoge rr para el jugador I. Las estrategias puras que escoge para la jugadora II se pueden observar en la Figura 1.2(b). Corresponden a segmentos que aparecen doblados en este diagrama. Es decir, son estrategias puras de la forma RXY. La estrategia pura LLL no es una de ellas.

La razón por la que el algoritmo de Zermelo no selecciona LLL es que esta estrategia pura exige que la jugadora II se plantee realizar la elección *irracional* de L en el nodo c. Se dice que la elección es irracional porque si el nodo c *fuera* alcanzado, entonces la jugadora II ganaría jugando R, mientras que jugando L se vería llevada a la derrota. La definición de equilibrio de Nash no detecta que la estrategia *LLL* incorpora este plan irracional porque si el jugador I usa su estrategia de equilibrio de Nash, *rr*, el nodo *c* no será alcanzado. Luego la jugadora II nunca necesitará utilizar su plan irracional para el nodo *c*. Lo importante aquí es que el restringir la atención a estrategias de equilibrio de Nash sólo asegura que los jugadores se conducirán racionalmente en los nodos que se encuentran *en la trayectoria de equilibrio*. Esta coincide con la partida del juego seguida cuando se usan las estrategias del equilibrio. Fuera de la trayectoria de equilibrio, las estrategias de equilibrio de Nash pueden conducir a toda suerte de conductas alocadas.

Consideremos, por ejemplo, el juego del ajedrez. Si el valor del ajedrez es $\mathcal{D}$, entonces el jugador I puede asegurarse unas tablas o un resultado mejor jugando una estrategia pura *s*. Pero no puede conseguir nada mejor si la jugadora II usa una estrategia pura *t* que le asegura tablas o un resultado mejor. Sin embargo, la jugadora II podría cometer un error momentáneo que conduciría a un subjuego que no habría sido alcanzado si la jugadora II no se hubiera desviado de *t* por error. El uso de la estrategia *s* continúa garantizando unas tablas o un resultado mejor al jugador I, porque *s* garantiza un resultado así tanto si la jugadora II juega bien como si juega mal. Sin embargo, si la jugadora II ha cometido un error, el jugador I puede tal vez conseguir algo más que forzar unas tablas. En el subjuego alcanzado como consecuencia del disparate de la jugadora II puede que el jugador I disponga de una estrategia ganadora. Si es así, éste tal vez no esté interesado en mantenerse fiel a la estrategia pura *s*. Si s sólo asegura tablas en el subjuego, pero existe otra estrategia *s'* que asegura la victoria, entonces el jugador I querrá pasarse de *s* a *s'*.

Es obvio, por tanto, que un especialista en teoría de juegos no estaría a la altura de su cometido si se contentará con recomendar *cualquier* equilibrio de Nash del ajedrez como solución para este juego. Un especialista debe proporcionar consejos más refinados. En particular, los pares de estrategias (*s*, *t*) seleccionados por el algoritmo de Zermelo no sólo son equilibrios de Nash en todo el juego: también inducen equilibrios de Nash en *cada* subjuego. Siguiendo a Reinhard Selten diremos que un par de estrategias con esta propiedad es un *equilibrio subjuego-perfecto*.

1.8.3. Explotando el mal juego

Filo 1.9 ⟶

¿Sería prudente por parte de un teórico de juegos recomendar como la solución al ajedrez un equilibrio subjuego-perfecto? Considérese el ejemplo de la Figura 1.16, que se parece al ajedrez en la medida que los jugadores I y II alternan sus movimientos; los símbolos $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ o $\mathcal{D}$ representan una victoria, empate o derrota del jugador I. Pero, al contrario que en el ajedrez, se supone que a los jugadores les importa la duración del juego. Las preferencias de I vienen dadas por

$$\mathcal{W}_1 \succ_1 \mathcal{W}_2 \succ_1 \cdots \succ_1 \mathcal{W}_{101} \succ_1 \mathcal{D}_{50} \succ_1 \mathcal{L}_{52}.$$

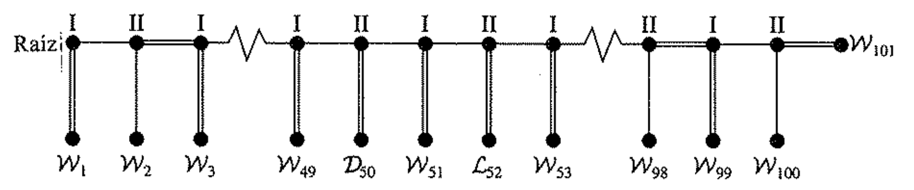


Figura 1.16. Un juego tipo ajedrez.

Se supone que las preferencias de II son las opuestas. Las dobles rayas en la Figura 1.16 muestran el resultado de aplicar el algoritmo de Zermelo.

Puesto que sólo una raya es doble en cada nudo, hay un único equilibrio subjuego-perfecto. Ello implica que la jugadora II juega «bajar» en el nudo 50. ¿Es éste un buen consejo? La respuesta es que todo depende de lo que se sepa sobre el oponente. Es un buen consejo si la jugadora II está tan segura de que el jugador I es racional que ninguna evidencia contraria puede cambiar su opinión. Un jugador I racional ciertamente jugaría «bajar», si se encontrara en el nudo 51, puesto que ello le llevaría a una inmediata victoria. Por tanto, la jugadora II no debería permitir que se llegara al nudo 51. Debería aceptar un empate jugando «bajar» en el nudo 50.

Pero para que el juego llegue al nudo 50, el jugador I tiene que haber jugado «cruzar» en 25 ocasiones consecutivas, cuando lo racional era jugar «bajar». Esta evidencia no es consistente con la hipótesis de la jugadora II de que el jugador I es racional. Aquella podría argumentar, no obstante, que incluso los jugadores que son casi siempre racionales cometen errores a veces. Si es así, puede atribuir el comportamiento de I al jugar siempre «cruzar» a 25 errores consecutivos. En cada uno de estos casos, ella podría argumentar, él *quería* jugar «bajar», pero el destino intervino torciendo su codo o distrayendo su atención en el momento crucial, de modo que acabó jugando «cruzar». No tendrá ninguna duda de que hay que atribuir una probabilidad muy pequeña *p* a cada uno de estos errores y, por tanto, la probabilidad p^{25} de que sucedan los 25 errores es un número increíblemente pequeño[15]. A pesar de todo, es logicamente coherente que, ante la alternativa de que ha sucedido algo tan improbable y la hipótesis de que es altamente probable que el oponente se comportará racionalmente en el futuro (aunque no haya sido así en el pasado), la jugadora II crea en la primera posibilidad.

Evidentemente, en la vida real nadie está tan convencido de la racionalidad de un oponente. En particular, nadie que intente explicar el comportamiento de un oponente que ha hecho 25 malas jugadas consecutivas en el ajedrez creerá plausible que en realidad, en todos los casos, intentó jugar bien pero inadvertidamente movió la ficha equivocada. La conclusión que

[15] Si se da menos de una posibilidad por cada diez de cometer un error, entonces se da menos de una posibilidad por cada mil millones de mil millones de mil millones de cometer 25 errores de estos.

surge naturalmente al observar mal juego es que el oponente es un mal jugador. La cuestión entonces es cómo aprovecharse de su debilidad[16].

En el juego de la Figura 1.16 la debilidad del jugador I parece consistir en una fijación por jugar «cruzar» pase lo que pase. Una jugadora II que en el nudo 50 piense que esta explicación del comportamiento de I es muy probable puede arriesgarse a jugar «cruzar». El riesgo consiste en que I puede desviarse de la norma de su comportamiento en el pasado y jugar «bajar» en el nudo 51. En este caso II ha perdido inútilmente la oportunidad de un empate. Pero si el jugador I sigue jugando «cruzar» en el nudo 51, entonces II puede conseguir la victoria jugando «bajar» en el nudo 52.

Lo importante en todo esto es que la teoría de juegos no pretende decirnos cómo medir las debilidades de un oponente. Para este tipo de juicios el consejo de un psicólogo sería mejor que el de un especialista en teoría de juegos. La teoría de juegos trata de lo que los jugadores harán cuando se sobreentiende que ambos son racionales en algún sentido. A veces, como en el caso de juego tipo ajedrez de la Figura 1.16, ello significa que un análisis ortodoxo según la teoría de juegos no es necesariamente una buena guía de cómo jugar contra personas reales. Quizá esto sea también verdad de los juegos que la gente juega básicamente para divertirse. Ver a dos personas jugar al póquer óptimamente sería tan interesante como mirar cómo se seca la pintura: y nadie jugaría nunca al ajedrez, si se supiera como jugarlo óptimamente.

¿Significa esto que la teoría de juegos es inútil? Evidentemente si lo creyera no me dedicaría a ella. Pero es verdad que a menos que tengamos razones de peso para pensar que la gente involucrada va a comportarse racionalmente, la teoría de juegos no puede usarse de forma ingenua para predecir lo que la gente real va a hacer. En consecuencia, en muchos casos sería poco inteligente usar la estrategia que un libro de teoría de juegos etiquetara de «óptima», puesto que sería óptima sólo si *todos* los jugadores pensaran jugar óptimamente. Evidentemente hay circunstancias en las que sí es razonable trabajar bajo la hipótesis de que la gente se comportará de una forma razonablemente racional. La Economía se fundamenta, de forma no muy sólida, en el supuesto de que en las relaciones comerciales y de negocios se da típicamente este caso. No obstante, si no se cumpliera ninguno de los siguientes criterios, usar la teoría de juegos para hacer predicciones sería como jugar con fuego:

- El juego es simple.
- Los jugadores han jugado el juego muchas veces en el pasado, y en consecuencia han tenido muchas oportunidades de aprender por tanteo[17].
- Los incentivos para jugar bien son los adecuados.

[16] En general uno se arriesga al hacer esto. El oponente podría ser, concebiblemente, un timador que está preparando el terreno para un golpe. sin embargo, esto no es posible en el juego de la Figura 1.16. No hay ventaja de ningún tipo que el jugador I pueda ganar al jugar «cruzar» 25 veces seguidas, cuando en cada ocasión puede ganar directamente con sólo jugar «bajar».

El segundo y tercer criterios se satisfacen, por ejemplo, cuando jugadores expertos juegan al póquer en el «Campeonato Mundial de Póquer». Además, aunque el póquer no es tan simple como las tres en raya o el nim, es simple comparado con el ajedrez. Esto es, puede ser analizado con éxito. Por tanto, el primer criterio también se satisface en algún grado. Por tanto, es esperanzador que la forma en que se juega en estos campeonatos se parece mucho más a lo que predice la teoría de juegos que a la que observamos en timbas de café[18]. De todos modos, incluso cuando se satisfacen los tres criterios, las predicciones de la teoría de juegos sólo con mucha prudencia pueden ser aplicadas a situaciones reales.

1.9. Conflicto y cooperación

Filo 1.10 ⟶

Por ahora este capítulo se ha ocupado de juegos estrictamente competitivos en los que lo que es bueno para un jugador es malo para el otro. La teoría de estos juegos está mucho más desarrollada que la teoría de juegos en general. En consecuencia, los libros de teoría de juegos tendían a concentrarse en estos juegos hasta hace relativamente poco tiempo. En el pasado esto ha llevado a algunos críticos a concluir que la teoría de juegos sólo se ocupa de juegos estrictamente competitivos. Si esta conclusión fuera correcta, con toda seguridad tendrían razón al rechazar la teoría de juegos como algo que tiene muy poco interés práctico. Se da raramente el caso en la vida real en el que los juegos que tenemos que jugar no ofrecen oportunidades de algún tipo para cooperar con los demás jugadores.

Es típico de los juegos de la vida real que ofrezcan oportunidades tanto para la cooperación como para el conflicto, y muchas de las cuestiones realmente interesantes son las que se refieren a cuándo es, o no es, racional cooperar con otros jugadores racionales. La consideración detallada de estas cuestiones, sin embargo, la pospondremos hasta el Capítulo 5, que se ocupa de algunos juegos de negociación. En contraste con lo que ocurre en juegos estrictamente competitivos, en estos juegos de negociación siempre es racional que los jugadores cooperen y lleguen a un acuerdo. Sin embargo, estos juegos no dejan de carecer de motivos de conflicto porque las opiniones de los jugadores sobre qué acuerdo debe alcanzarse no coinciden necesariamente.

[17] Han jugado contra distintos adversarios en cada ocasión. Si se trata de jugar un determinado juego contra el mismo oponente muchas veces, esta situación de repetición exige construir un modelo en términos de un único «super-juego».

[18] Por ejemplo, la teoría de juegos recomienda echarse muchos faroles cuando las manos son muy malas.

En la presente sección nos limitaremos a considerar algunos ejemplos simples de juegos que no son estrictamente competitivos. Han sido escogidos principalmente para hacer ver que la mayoría de las interesantes propiedades que tienen los juegos estrictamente competitivos estudiados en este capítulo no se cumplen en juegos más generales. En cada ejemplo los resultados serán representados por un par de cantidades en dólares (\$$x$, \$$y$). La interpretación es que si el juego termina en un resultado representado por (\$$x$, \$$y$) , entonces el jugador I recibe x dólares y la jugadora II recibe y dólares. Suponemos que cada jugador o jugadora prefiere más dinero que menos y que en el juego no le preocupa otra cosa que cuánto dinero ganará al final. En los diagramas, el resultado (\$$x$, \$$y$) será representado por un cuadrado con el pago, x dólares, del jugador I en la esquina suroeste y con el pago, y dólares, de la jugadora II en la esquina noreste.

1.9.1. Un juego en equipo

Un juego en equipo es lo más distinto que se puede concebir de un juego estrictamente competitivo. En los juegos en equipo los intereses de los jugadores coinciden. Lo que es bueno para un jugador también es bueno para los otros. La Figura 1.17(a) proporciona un ejemplo muy simple. El algoritmo de Zermelo le ha sido aplicado, doblando los segmentos apropiados. Se da un único equilibrio subjuego-perfecto, (l, L), que conduce al resultado (\$2, \$2). En la forma estratégica dada en la Figura 1.17(b) se puede comprobar que éste es un equilibrio de Nash observando que el pago de 2 dólares del jugador I es el mayor de sus pagos en la columna correspondiente a L. Luego l es una respuesta óptima a L. Al mismo tiempo, 2 dólares es el mayor de los pagos de la jugadora II en la fila que corresponde a l. Luego L es una respuesta óptima a l.

Los juegos en equipo de información perfecta no son muy interesantes porque de hecho pueden ser analizados como juegos de un solo jugador[19]. El presente ejemplo, sin embargo, servirá para subrayar un punto importante: que juegos que no son estrictamente competitivos no tienen necesariamente un valor v en el sentido definido en la Sección 1.7.1.

Tal vez nos gustaría proponer que el resultado (\$2, \$2) fuera considerado el valor del juego, pero no es cierto que el jugador I tiene una estrategia que le asegura un pago de 2 dólares, o de más, sea lo que sea lo que haga la jugadora II. El jugador I ha de jugar la estrategia pura l y confiar que la jugadora II elegirá la estrategia pura L para obtener un pago de 2 dólares. Pero si la jugadora II eligiera irracionalmente la estrategia pura R, el

[19] Sin embargo, cuando la información es imperfecta los juegos en equipo pueden ser realmente muy interesantes. Por ejemplo, su estudio nos puede enseñar cosas acerca de las maneras óptimas de comunicar información dentro de organizaciones cuyuos miembros comparten un mismo objetivo.

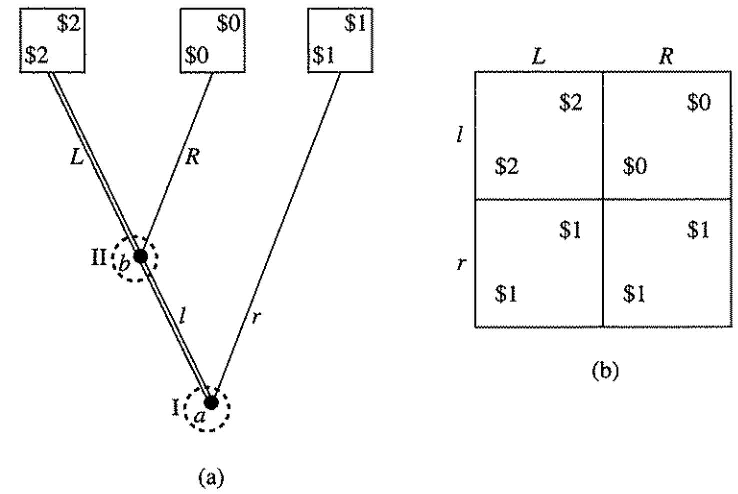


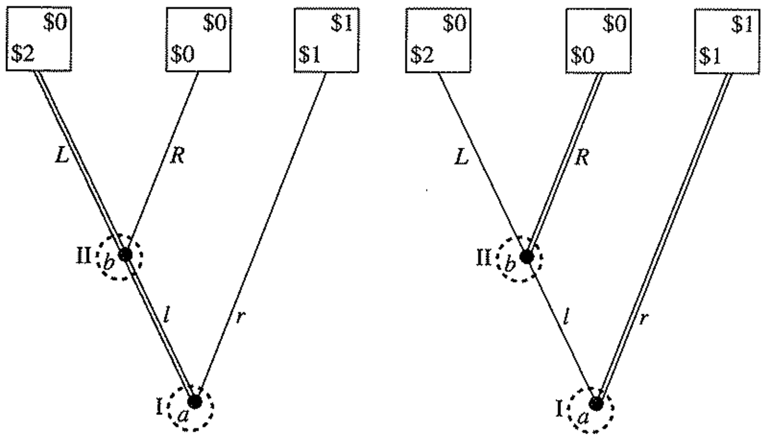
Figura 1.17. Un juego en equipo.

jugador I sólo conseguiría un pago de 0 dólares. El mayor pago que el jugador I puede asegurarse es 1 dólar. Se lo asegura eligiendo la pura estrategia r. El mayor pago que la jugadora II puede asegurarse también es 1 dólar, y se lo asegura jugando la estrategia pura L. (Esta elección le dará un pago de 2 dólares si el jugador I escoge l, pero sólo de 1 dólar si éste escoge r.)

En un capítulo posterior diremos que la estrategia pura r es la *estrategia de seguridad* del jugador I, y que el pago asegurado de 1 dólar es el *nivel de seguridad* del jugador I. Análogamente, la estrategia de seguridad de la jugadora II es L y su nivel de seguridad es 1 dólar. En un juego estrictamente competitivo ambos jugadores se aseguran el valor del juego llevando a cabo una de sus estrategias de seguridad. Unicamente observaremos por ahora que las estrategias de seguridad sólo son de importancia secundaria para un análisis del juego. En particular, no sería inteligente que el jugador I se preocupara excesivamente por lo que puede *asegurarse*. Si quiere llegar a tomar una decisión razonable sobre qué hacer, debe preocuparse de predecir la conducta futura de la jugadora II.

1.9.2. Equilibrios múltiples

En los juegos estrictamente competitivos estudiados en este capítulo la existencia de equilibrios múltiples no representa ningún problema. Un par de estrategias puras (s, t) es un equilibrio subjuego-perfecto para uno de estos juegos si y sólo si s le asegura al jugador I un resultado en cualquier



(a) (b)

Figura 1.18. Un juego con estrategias de equilibrio no intercambiables.

subjuego no inferior a su valor, y t hace lo mismo para la jugadora II. Así pues, si (s, t) y (s', t') son dos equilibrios subjuego-perfectos, el jugador I, al elegir entre s y s', no tiene que preocuparse acerca de si la jugadora II elegirá t o t'. Cualquiera de las dos funcionará igual de bien. Si el jugador I escoge s y la jugadora II escoge t', entonces (s, t') continúa siendo un equilibrio subjuego-perfecto cuyo uso en cualquier subjuego proporcionará un resultado equivalente al valor del subjuego. (Técnicamente, decimos que (s, t) y (s', t') son equivalentes e intercambiables, como se explicará en la Sección 7.3.1.) Para juegos en general, sin embargo, los problemas que generan los equilibrios mútiples pueden ser muy enojosos.

El juego de la Figura 1.18 posee dos equilibrios de Nash, que son (l, L) y (r, R). Ambos son equilibrios subjuego-perfectos. Esto se puede comprobar usando el algoritmo de Zermelo. Sin embargo, en juegos que no son estrictamente competitivos es necesario prestar atención especial a lo que ocurre cuando un jugador tiene más de una elección óptima en un nodo. En juegos estrictamente competitivos se puede trabajar simplemente con un único árbol del juego y doblar *todos* los segmentos correspondientes a elecciones óptimas. En juegos que no son estrictamente competitivos, usualmente es necesario dibujar diagramas distintos para cada elección óptima de un nodo.

La Figura 1.18 ilustra este punto. Si se alcanza el nodo b, entonces la jugadora II es indiferente entre jugar L y R porque ambas elecciones conducen a que le paguen 0 dólares. Así pues, es necesario dibujar dos diagramas: la Figura 1.18(a), en que el segmento correspondiente a L ha sido doblado, y la Figura 1.18(b), en que el segmento correspondiente a R ha sido doblado. En la Figura 1.18(a), para el jugador I es óptimo elegir l. En la

Figura 1.18(b), es óptimo elegir r. Lo que es mejor para el jugador I en el nodo a, por tanto, depende en gran medida de su predicción de lo que haría la jugadora II en el nodo b si éste fuera alcanzado.

¿Qué consejo puede un especialista en teoría de juegos dar acerca de cuál de estos dos equilibrios elegir? Cuando se estudian juegos estrictamente competitivos este problema no se plantea. Pero aquí (l, L) y (r, R) no son equivalentes ni intercambiables. No son equivalentes porque el par de pagos (\$2, \$0) que resultan del uso de (l, L) no es el mismo que el par de pagos (\$1, \$1) que resultan del uso de (r, R). No son intercambiables porque, por ejemplo, si el jugador I juega l (pensando que la jugadora II jugará L) y la jugadora II juega R, el par resultante (l, R) no es un equilibrio.

Se podría argumentar que un libro de teoría de juegos debería recomendar el equilibrio (l, L) como la «solución» del juego partiendo de la base de que no existe razón alguna por la que la jugadora II debería ser aconsejada que negara «egoístamente» un pago de 2 dólares al jugador I, si alcanzaba el nodo b. Se podría responder argumentando que sería «egoísta» por parte del jugador I empezar por llevar el juego al nodo b. Pero se supone que los propios jugadores no tienen ningún tipo de preocupación acerca de si su conducta es, o no es, egoísta. Por hipótesis, sólo se preocupan acerca de cuánto dinero ganan. Por tanto, un especialista en teoría de juegos que prefiera un equilibrio a otro por razones éticas estará imponiendo a la situación sus propios juicios de valor o sus propios prejuicios.

En cualquier caso, existen otros argumentos. Se podría argumentar en favor del equilibrio (r, R) partiendo de la base que el jugador I «debería» creerse la amenaza de la jugadora II de que piensa jugar R. La razón es que ésta no tiene nada que perder cumpliendo su amenaza, si alcanza el nodo b. En contra de esta razón se da el hecho innegable de que tampoco tiene nada que ganar. Se podría argumentar que ella deseará cumplir su amenaza para «darle una lección al jugador I». Pero, por hipótesis, no está interesada en dar lecciones a nadie: sólo está interesada en cuánto dinero gana. Si se desea tomar en consideración otros factores que pueden motivar a los jugadores, se deberían alterar las preferencias de los jugadores sobre los resultados para reflejar este hecho.

No todos los especialistas en teoría de juegos comparten esta opinión, pero yo creo que la actitud apropiada frente al problema de la selección de equilibrios ha de ser la misma que la del matemático frente a una ecuación de segundo grado. Si le preguntamos cuál de las dos raíces recomienda como la solución «correcta», pensará que la pregunta es estúpida. Es una pregunta que no tiene ningún sentido en abstracto. Cuando surge una ecuación de segundo grado en un modelo construido para representar algún aspecto del mundo real, se calculan ambas raíces y entonces se estudia cuál de las dos tiene sentido para el fenómeno concreto del mundo real que el modelo quiere describir. Con frecuencia, por ejemplo, una de las raíces es positiva y la otra negativa, y esta última puede ser despreciada porque no tiene sentido aplicada al mundo real. Análogamente, la pregunta de qué equilibrio hay que elegir en un juego carece con frecuencia de sentido hasta

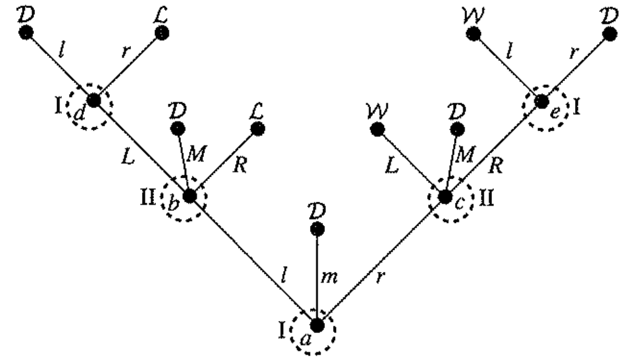


Figura 1.19. El juego del Ejercicio 1.10.1.

que no se considera el contexto al que se aplica el juego[20]. A veces, el examen detallado del contexto sugiere el estudio de un juego más complicado que posee un único equilibrio. Es más frecuente el caso, sin embargo, en que uno debe ejercitar su capacidad para enjuiciar modelos cuando toca elegir entre los equilibrios disponibles.

1.10. Ejercicios

1. La Figura 1.19 contiene el árbol de un juego G estrictamente competitivo de información perfecta sin jugadas de azar.
   a) ¿De cuántas estrategias puras dispone cada jugador?
   b) Hacer un listado de las estrategias puras de cada jugador usando la notación de la Sección 1.3.
   c) ¿Qué partida resulta al usar el par de estrategias puras (rll, LM)?
   d) Hallar todos los pares de estrategias puras que resultan en la partida $[rRl]$.
   e) Escribir la forma estratégica de G.
   f) Hallar todos los puntos de silla.
2. Las fichas de dominó se pueden colocar en un tablero $m \times n$ hasta cubrir dos cuadrados exactamente. Dos jugadores colocan fichas alternativamente. El primero que no puede colocar una ficha es el perdedor. Dibujar el árbol del juego para el caso $m = 2$ y $n = 3$.
3. La Figura 1.20 contiene el esqueleto del árbol de un juego llamado blackball. Un comité de tres miembros (I, II y III) de un club ha de seleccionar un nuevo miembro a partir de una lista de cuatro

[20] *Cognoscenti* no deberían interpretar esto como afirmando que nada se puede obtener del estudio de refinamientos de equilibrios de Nash. Unicamente se está afirmando que la pregunta de qué refinamiento hay que emplear, si es que hay emplear alguno, es una cuestión que habitualmente requiere más información de la que se codifica en la definición formal del juego.

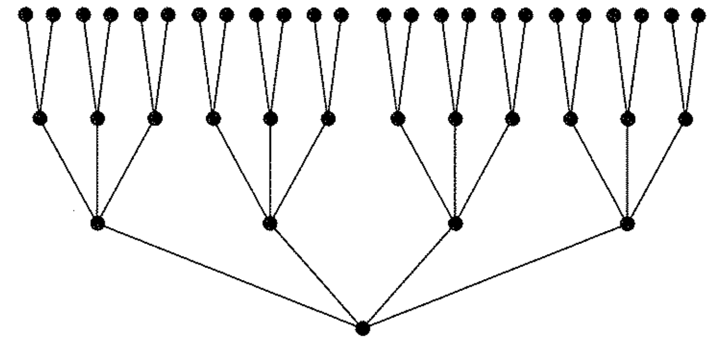


Figura 1.20. Un esqueleto para el árbol del blackball.

candidatos (A, B, C y D). Cada uno de los miembros del comité está autorizado a *blackbolear* (vetar) un candidato. Este derecho se ejerce rotativamente, empezando por el jugador I y terminando por el III.

En una copia de la Figura 1.20 márquese cada nodo no terminal con el número del jugador que decide en ese nodo. Los segmentos que representan las posibles elecciones en cada nodo han de ser marcadas con los candidatos que todavía pueden ser blackboleados. Cada nodo terminal ha de ser marcado con la letra del candidato elegido miembro del club cuando el juego termina allí.

¿De cuántas estrategias puras dispone cada jugador? ¿Qué información no ha sido proporcionada que es necesaria para analizar el juego?

4. Empezar a dibujar el árbol del ajedrez. Incluir por lo menos una partida completa en el diagrama.

Mates

5. Dos jugadores escogen alternativamente e indefinidamente entre 0 y 1. Una partida de este juego *infinito* puede identificarse, por tanto, con una sucesión de ceros y unos. Por ejemplo, la partida 101000... empezó con el jugador I escogiendo 1. Después, la jugadora II escogió 0, y tras ello el jugador I escogió 1 de nuevo. Después de ello ambos jugadores siempre escogen 0. Una sucesión de ceros y unos se puede interpretar como el desarrollo binario de un número real x que satisface $0 \leqslant x \leqslant 1$[21]. Dado un conjunto E de números reales, el jugador I gana si $x \in E$ pero pierde si $x \in \sim E$.
   Empezar a dibujar el árbol del juego.
6. Aplicar el algoritmo de Zermelo al juego G del Ejercicio 1.10.1. ¿Cuál es el valor de G? ¿Cuál es el valor del subjuego que empieza en el nodo b? ¿Cuál es el valor del subjuego que empieza en el nodo c? Demostrar que la estrategia pura rrr asegura que el jugador I

[21] Por ejemplo, $5/8 = 0{,}101000...$, porque $5/8 = 1(1/2) + 0(1/2)^2 + 1(1/2)^3 + \cdots$.

consigue por lo menos el valor de G. ¿Por qué el algoritmo de Zermelo no selecciona esta estrategia?

Fun 7. Aplicar el algoritmo de Zermelo a la versión 2×3 del juego de colocar fichas de dominó del Ejercicio 1.10.2. Hallar el valor del juego y determinar una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

Fun 8. ¿Quién ganaría un juego del nim con $n \geqslant 2$ montones de cerillas tales que el k-ésimo montón contiene 2^{k-1} cerillas?[22]. Describir una partida del juego con $n = 3$ en el que el ganador juega óptimamente mientras el perdedor siempre se lleva una cerilla del montón con la mediana de cerillas. (El montón de la mediana es el montón de tamaño medio.)

Fun 9. Repetir el ejercicio anterior con $2^n - 1$ montones, de los cuales el k-ésimo contiene k cerillas.

Fun 10. ¿Quién dispone de una estrategia ganadora en el juego de colocar fichas de dominó del Ejercicio 1.10.2, cuando:

a) m y n son pares;
b) m es par y n es impar;
c) $m = n = 3$?

Justificar las respuestas.

Fun 11. Cuales son los movimientos de apertura ganadores en los juegos de los hexágonos 3×3, 4×4, 5×5?

Fun 12. Demostrar que en un tablero de hexágonos de $n \times (n + 1)$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el jugador que abre tiene que unir los lados más alejados.

Mates 13. El tablero de la Figura 1.21 representa el plano del centro de una ciudad. Los jugadores I y II representan bandas de gángsters. El jugador I controla las áreas al norte y sur de la ciudad. El jugador II controla las áreas al este y oeste. Los nodos en el plano de calles representan intersecciones de calles. Por turnos, los jugadores marcan nodos que todavía no han sido marcados. El jugador I usa un círculo como marca, y el jugador II una cruz. Un jugador que consigue marcar los dos extremos de una calle controla la calle. El jugador I gana si une el norte y el sur con un camino que controla. El jugador II gana si une el este y el oeste.

¿Por qué es este juego completamente equivalente a los hexágonos?

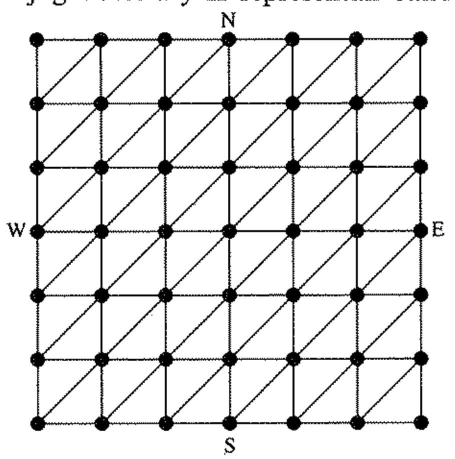


Figura 1.21. El plano de calles de una ciudad.

[22] Para empezar, intentar resolver el problema para valores concretos de n. Por ejemplo, $n = 3$.

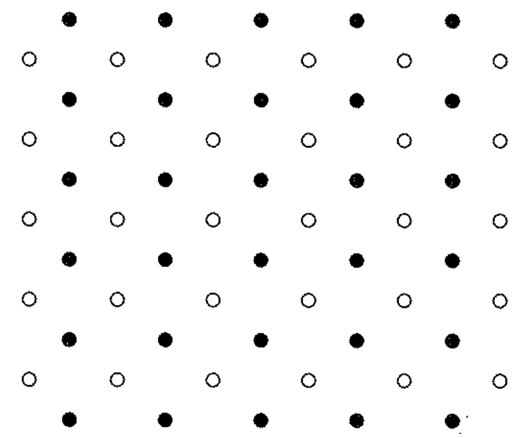


Figura 1.22. El tablero del bridgit.

Mates 14. El juego del bridgit fue inventado por David Gale. Se juega en un tablero como el que muestra la Figura 1.22. Las negras intentan enlazar las partes superior e inferior uniendo horizontalmente o verticalmente nodos negros inmediatamente próximos. Las blancas intentan enlazar las partes derecha e izquierda uniendo horizontalmente o verticalmente nodos blancos inmediatamente próximos. Ninguno de los jugadores puede cruzar los enlaces del otro.

a) Hallar un argumento, del tipo del utilizado en los hexágonos, que demuestre que el juego no puede terminar en tablas.
b) ¿Por qué se sigue que alguien puede forzar una victoria?
c) ¿Por qué es el primer jugador el que dispone de una estrategia ganadora?
d) ¿Cómo es una estrategia ganadora?[23].

Mates 15. Dos jugadores se alternan removiendo nodos de un grafo conexo G. Excepto para la primera jugada, un jugador sólo puede remover

[23] No se desanime si no puede responder a esta última pregunta. ¡Es difícil!

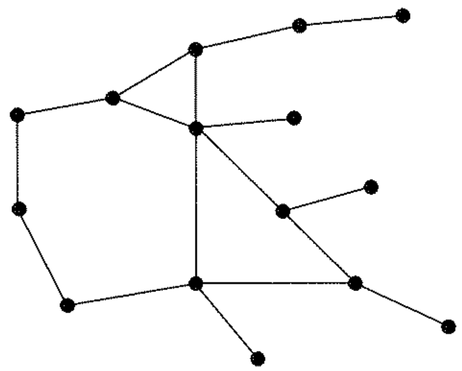


Figura 1.23. Un grafo G para el Ejercicio 1.10.15.

un nodo si está unido por un segmento al nodo removido por el anterior jugador. Pierde el jugador que se queda sin un nodo que sea legítimo remover.

Explicar por qué el segundo jugador tiene una estrategia ganadora si existe un conjunto E de segmentos que no tienen un extremo en común y tales que cada nodo es el extremo de un segmento del conjunto E. Demostrar que no existe un tal conjunto E para el grafo de la Figura 1.23. Hallar una estrategia ganadora para el primer jugador.

Mates

16. El valor del ajedrez es desconocido. Puede ser $\mathcal{W}$, $\mathcal{D}$ o $\mathcal{L}$. Explicar por qué un argumento simple basado en robar la estrategia no puede ser usado para eliminar la posibilidad de que el valor del ajedrez es $\mathcal{L}$.

Mates

17. Explicar por qué el jugador I dispone de una estrategia ganadora en el juego de construcción de números del Ejercicio 1.10.5 si $E = \{x : x > 1/2\}$. ¿Cuál es la estrategia ganadora del jugador I cuando $E = \{x : x \geqslant 2/3\}$? ¿Cuál es la estrategia ganadora del jugador II cuando $E = \{x : x > 2/3\}$? Explicar por qué el jugador II dispone de una estrategia ganadora cuando E es el conjunto de todos los números racionales[24]. (Un número racional es lo mismo que una fracción.)
18. Sean (s, t) y (s', t') dos puntos de silla distintos de un juego estrictamente competitivo. Demostrar que (s, t') y (s', t) también son puntos de silla.

[24] Uno se podría preguntar si este juego infinito siempre tiene un valor para cualquier conjunto E. La respuesta es abstrusa. Si asumimos un principio de la teoría de conjuntos llamado el axioma de elección, entonces existen conjuntos E para los cuales el juego no tiene un valor. Algunos matemáticos, sin embargo, han propuesto reemplazar el axioma de elección por otro axioma que implicaría que el juego tiene un valor para cualquier conjunto E.

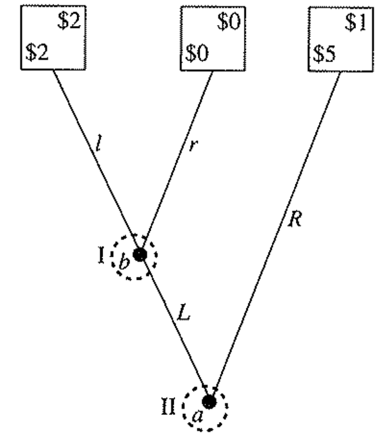


Figura 1.24. El juego de la cadena de supermercados de Selten.

19. Hallar todos los equilibrios de Nash del juego G del Ejercicio 1.10.1. ¿Cuáles de ellos son subjuego-perfectos?
20. Hallar los equilibrios subjuego-perfectos del blackball del Ejercicio 1.10.3 cuando las preferencias de los jugadores satisfacen:

$$A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D,$$
$$B \succ_2 C \succ_2 D \succ_2 A,$$
$$C \succ_3 D \succ_3 A \succ_3 B.$$

¿Quién resulta elegido al club si se usa un equilibrio subjuego-perfecto? Hallar por lo menos un equilibrio de Nash que no sea subjuego-perfecto.

Econ

21. En el juego de la cadena de supermercados de la Figura 1.24, hallar:
    a) La forma estratégica.
    b) Las estrategias de seguridad de los jugadores.
    c) Los niveles de seguridad de los jugadores.
    d) Todos los equilibrios de Nash.
    e) Todos los equilibrios subjuego-perfectos.

Econ

22. El juego de la cadena de supermercados del Ejercicio 1.10.21 es utilizado con frecuencia para ilustrar la lógica de la «disuasión de entrada». El jugador I es una empresa que monopoliza un sector económico y que gana 5 millones de dólares si se le deja disfrutar sin competencia de su privilegiada posición. El jugador II es una empresa que podría entrar en el sector, pero que gana 1 millón de dólares si escoge no entrar. Si quien está considerando entrar decide hacerlo, el monopolista puede hacer dos cosas: puede plan-

tarle cara inundando el mercado con su producto para forzar precios a la baja, o puede aceptar su presencia y dividirse el mercado con él. La lucha perjudica a ambos jugadores, que unicamente ganan en este caso 0 millones de dólares cada uno. Si se dividen el mercado, cada uno ganará 2 millones de dólares.

a) Explicar cómo deberían ser interpretadas las acciones *l*, *r*, *L* y *R* de la Figura 1.24 para que el juego de la cadena de supermercados encajara en la situación descrita.

b) El actual monopolista amenaza al competidor potencial con luchar si éste desoye sus advertencias para que se mantenga fuera del sector. ¿Por qué éste no considerará que la amenaza es creíble?

c) ¿Qué ocurrirá si ambos jugadores actúan racionalmente?

Econ 23. ¿Cómo cambiarían las cosas en el Ejercicio 1.10.22 si, antes de empezar el juego, el monopolista actual pudiera demostrar al competidor potencial que estaba irrevocablemente decidido a luchar si éste entraba?

a) Escribir un nuevo árbol que represente la situación del Ejercicio 1.10.22 precedido por una jugada preliminar en la que el jugador I decide si se compromete, o no, a luchar si el jugador II llegara a entrar.

b) Hallar un equilibrio subjuego-perfecto del nuevo juego.

c) ¿Puede usted imaginar de qué forma el jugador I se podría comprometer irrevocablemente a luchar? Si es que sí, ¿cómo podría el jugador I convencer al II de que había adoptado tal compromiso?

Econ 24. El último apartado del Ejercicio 1.10.23 sirve para ilustrar que es muy difícil en la vida real comprometerse a seguir, si se dan determinadas contingencias, un futuro curso de acción que va contra los propios intereses. El sólo hecho de *decir* que uno se ha comprometido no convencerá a nadie que piense que usted es racional. Sin embargo, a veces es posible hallar acciones irreversibles que surten el mismo efecto que el de adquirir un compromiso. Como ocurre en la situación siguiente, habitualmente estas acciones han de ser costosas para que los otros jugadores puedan ver que usted está gastando dinero de acuerdo con las intenciones que sus palabras anuncian.

Supongamos que el monopolista actual del Ejercicio 1.10.22 puede decidir, antes de que ocurra nada, hacer una inversión irreversible para aumentar su capacidad de producción. Esto conllevará una pérdida de 2 millones de dólares si no utiliza la capacidad extra, pero la única ocasión para usar la capacidad extra sería proporcionada por la decisión de luchar contra el competidor entrante. En este caso, el monopolista actual ganará 1 millón de dólares en lugar de 0 millones de dólares porque la existencia de la capacidad extra abaratará su producción que inundará el mercado. Los pagos del jugador II permanecen inalterados.

a) Dibujar un nuevo árbol de juego que ilustre la nueva situación. Este tendrá cinco nodos, el primero de los cuales representa la decisión de invertir del jugador I. Si invierte, los pagos que resultan de acciones posteriores del juego deberán modificarse para tener en cuenta los costes y beneficios de la capacidad extra de producción.

b) Determinar el único equilibrio subjuego-perfecto.

c) Alguien que no sepa teoría de juegos podría decir que es necesariamente irracional invertir para obtener una capacidad extra de producción que uno cree que no usará jamás. ¿Como puede responder un especialista en teoría de juegos?

Econ 25. Hallar todos los equilibrios subjuego-perfectos del juego de la Figura 1.25. ¿Qué equilibrio recomendaría usted si los jugadores le pidieran consejo?

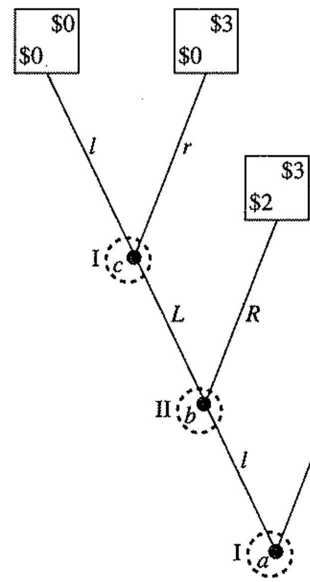


Figura 1.25. El juego del Ejercicio 1.10.25.

CAPITULO

2

Arriesgarse

2.1. Introducción

La mayor parte del capítulo precedente ha estado dedicado a juegos de dos jugadores, estrictamente competitivos y de información perfecta. Este capítulo, que continúa estudiándolos, incluye como novedad que ahora se admiten jugadas de azar. Nos limitaremos al caso en que los únicos resultados posibles son $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$. En estos juegos la motivación de un jugador racional es maximizar la *probabilidad* de ganar. Por tanto, la mayor parte del capítulo está dedicada a estudiar cómo usar probabilidades en el contexto de un juego.

2.1.1. Funciones de probabilidad

Revisión 2.2.3 ⟶

Supongamos que tiramos un dado. Al detenerse mostrará uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. En estadística, el conjunto

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

se denomina el *espacio muestral* o de *sucesos*. Los matemáticos identifican los posibles *sucesos* que pueden producirse al echar un dado con los subconjuntos de Ω. Así, el suceso que el dado muestre un número impar se puede identificar con el conjunto $E = \{2, 4, 6\}$. Designemos por S el conjunto de todos los sucesos posibes. (S es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω.)

Una *función de probabilidad* es una función[1]

$$\text{prob} : S \to [0, 1]$$

tal que

(i) $\text{prob}(\emptyset) = 0$; $\text{prob}(\Omega) = 1$

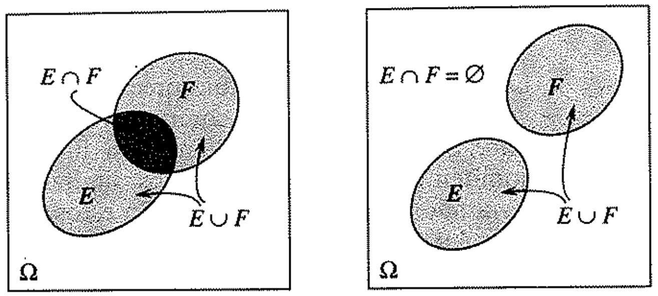
(ii) $\text{prob}(E \cup F) = \text{prob}(E) + \text{prob}(F)$, siempre que $E \cap F = \emptyset$.

El número $\text{prob}(E)$ debe ser interpretado como la probabilidad del suceso E. El conjunto vacío $\emptyset$ se define como el conjunto sin elementos. Por tanto, escribir $\text{prob}(\emptyset) = 0$, como en (i), es afirmar que la probabilidad del suceso imposible de que no ocurra nada en absoluto es cero. Escribir $\text{prob}(\Omega) = 1$ significa que la probabilidad del suceso seguro de que algo ocurrirá es 1.

La condición (ii) de la definición de función de probabilidad tiene más sustancia que la (i). Si E y F son sucesos, $E \cap F$ representa el suceso de que ocurren ambos, E y F. Por tanto, escribir $E \cap F = \emptyset$ significa que E y F no

---

[1] Una función $f : A \to B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un único $b \in B$. El objeto b asignando a A se designa por $f(a)$ y se dice que es el valor de la función en el punto a. El símbolo $[a, b]$ representa el conjunto de números reales $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$. Por tanto, la función $\text{prob} : S \to [0, 1]$ asigna a cada suceso $E \in S$ un único número real $x = \text{prob}(E)$ tal que $0 \leqslant x \leqslant 1$.



(a) (b)

Figura 2.1. Diagramas de Venn de $E \cup F$.

pueden ocurrir simultáneamente. Entonces decimos que los sucesos son *disjuntos*. La situación queda ilustrada por el «diagrama de Venn» de la Figura 2.1(b). El conjunto $E \cup F$ representa el suceso de que por lo menos uno de los dos, E o F, ocurre. Por tanto, la condición (ii) dice que si dos sucesos no se pueden dar juntos, entonces la probabilidad de que uno u el otro ocurran es la *suma* de las probabilidades de que se den por separado.

Por ejemplo, supogamos que el dado es «justo». Entonces se cumplirá que prob$(\{1\})$ = prob$(\{2\}) = \cdots =$ prob$(\{6\}) = 1/6$. Por tanto, la probabilidad de sacar un número par es

$$\begin{aligned}\text{prob}(E) &= \text{prob}(\{2, 4, 6\})\\ &= \text{prob}(\{2\}) + \text{prob}(\{4\}) + \text{prob}(\{6\})\\ &= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.\end{aligned}$$

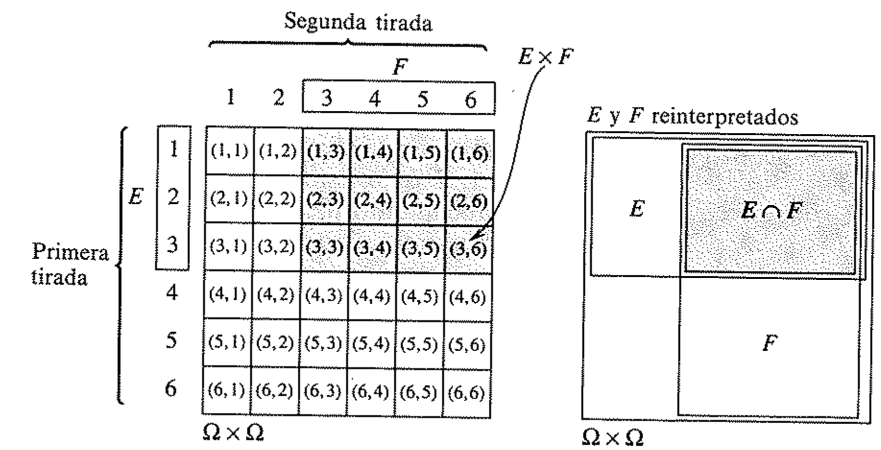
La interpretación correcta de la noción de probabilidad es un tema propio de filósofos. Para las necesidades de la teoría de juegos basta con decir que una afirmación como prob$(E) = 1/2$ significa que hay una posibilidad entre dos de que ocurra E. Escribir prob$(\{4\}) = 1/6$ significa que hay una posibilidad entre seis de que salga el 4.

En la terminología de apuestas, decir que prob$(\{4\}) = 1/6$ es decir que la suerte es de 5:1 contra tirar un 4, o de 5 contra 1. En general, si en un juego «justo» la suerte contra un suceso es $a{:}b$, entonces su probabilidad es $b/(a + b)$.

2.1.2. Sucesos independientes

Si A y B son conjuntos, el conjunto $A \times B$ consiste de todos los pares (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$[2]. La Figura 2.2(a) muestra el espacio de sucesos

[2] La notación (a, b) representa aquí el par de números reales a y b en el que a va primero. Si el orden de los números fuera irrelevante, simplemente usaríamos la notación $\{a, b\}$ para el



(a) (b)

Figura 2.2. El espacio de sucesos $\Omega \times \Omega$ para dos tiradas independientes de dados.

$\Omega^2 = \Omega \times \Omega$ que se obtiene cuando se estudian dos tiradas *independientes* de sendos dados. En este diagrama (5, 4) representa el suceso de que 5 ha aparecido en el primer dado y 4 en el segundo. Este suceso no es el mismo que (4, 5), que significa que 4 ha aparecido en el primer dado y 5 en el segundo. El suceso $E \times F$ ha sido sombreado. Es el suceso que consiste en sacar 3 o menos en el primer dado y 3 o más en el segundo.

El cuadrado que representa $\Omega \times \Omega$ contiene $36 = 6 \times 6$ casillas. Con la hipótesis de independencia, todas ellas son igualmente probables. La probabilidad de cada una es, por tanto, 1/36. Esto significa que la probabilidad de $E \times F$ debe ser

$$\text{prob}(E \times F) = 12/36 = 1/3.$$

Obsérvese que prob$(E) = 1/2$ y prob$(F) = 2/3$. Así pues,

$$\text{prob}(E \times F) = \text{prob}(E) \times \text{prob}(F).$$

Esta igualdad se cumple siempre que E y F son sucesos *independientes*.

Habitualmente esta conclusión se expresa diciendo que

$$\text{prob}(E \cap F) = \text{prob}(E)\ \text{prob}(F)$$

conjunto que contiene a y b. Merece destacarse que los matemáticos utilizan la notación (a, b) de forma ambigua. Este símbolo también representa el intervalo abierto de números reales $\{x : a < x < b\}$ (en oposición al intervalo cerrado $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$. Hay que deducir a partir del contexto en qué sentido se está utilizando (a, b).

cuando E y F son independientes. Esto es, la probabilidad de que dos sucesos independientes ocurran simultáneamente es el *producto* de las probabilidades de que ocurran separadamente. Estrictamente hablando, esto requiere reinterpretar E y F como sucesos en $\Omega \times \Omega$, como se indica en la Figura 2.2(b). En este diagrama E ya no es el suceso de que el primer dado muestre 1, 2 ó 3. Este suceso es un subconjunto de Ω. Es, por el contrario, el subconjunto de $\Omega \times \Omega$ que corresponde al suceso en que el primer dado muestra 1, 2 ó 3 y el segundo dado muestra cualquier cosa. Análogamente, F se convierte en el subconjunto de $\Omega \times \Omega$ que corresponde al suceso en que el primer dado muestra cualquier cosa y el segundo dado muestra 3, 4, 5 ó 6. Aunque hay que admitir que este rigor al interpretar E y F puede resultar algo pedante, no ejercer este rigor puede conducir con frecuencia a situaciones confusas.

2.1.3. Pagando a la Mafia

Un hombre necesita para mañana 1.000 dólares para pagar a la Mafia y sólo dispone de 2 dólares. Por tanto, compra dos billetes de lotería que cuestan 1 dólar cada uno en dos loterías independientes. El ganador de cada una de estas loterías obtiene un premio de 1.000 dólares (y no hay segundos premios). Si la probabilidad de ganar en cada lotería es $q = 0{,}0001$, ¿cuál es la probabilidad de que el hombre gane dinero suficiente para pagar a la Mafia mañana?

Sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{L}_1$ los sucesos que el hombre gana o pierde en la primera lotería. Definamos $\mathcal{W}_2$ y $\mathcal{L}_2$ análogamente. Entonces

$$\mathrm{prob}(\mathcal{W}_1) = q \quad ; \quad \mathrm{prob}(\mathcal{L}_1) = 1 - \mathrm{prob}(\mathcal{W}_1) = 1 - q;$$
$$\mathrm{prob}(\mathcal{W}_2) = q \quad ; \quad \mathrm{prob}(\mathcal{L}_2) = 1 - \mathrm{prob}(\mathcal{W}_2) = 1 - q.$$

Lo que se pregunta es $\mathrm{prob}(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)$. Pero esta no es igual a $\mathrm{prob}(\mathcal{W}_1) + \mathrm{prob}(W_2)$ porque $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ no son sucesos disjuntos. Pueden ocurrir simultáneamente. El hombre puede ganar ambas loterías.

Sin embargo, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{W}_2$ son sucesos disjuntos y, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{prob}(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) &= \mathrm{prob}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) + \mathrm{prob}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \mathrm{prob}(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{W}_2) \\ &= \mathrm{prob}(\mathcal{W}_1)\,\mathrm{prob}(\mathcal{W}_2) + \mathrm{prob}(\mathcal{W}_1)\,\mathrm{prob}(\mathcal{L}_2) + \\ &\qquad + \mathrm{prob}(\mathcal{L}_1)\,\mathrm{prob}(\mathcal{W}_2) \\ &= q^2 + q(1-q) + (1-q)q = 0{,}00019998.\end{aligned}$$

Las perspectivas de futuro de nuestro héroe con la Mafia no son, por tanto, buenas. Tiene menos de dos oportunidades entre diez mil de obtener el dinero.

En estos problemas es con frecuencia más fácil calcular la probabilidad de que un suceso *no* ocurra. En este caso, consideremos el suceso $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ de que el hombre pierda en las dos loterías. La respuesta es, simplemente,

$$1 - \mathrm{prob}(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1 - (1-q)^2 = 0{,}00019998$$

como antes.

2.1.4. Probabilidad condicional

¿Qué pasa con la probabilidad de $E \cap F$ cuando los sucesos E y F no son independientes? En este caso la fórmula apropiada es

$$\mathrm{prob}(E \cap F) = \mathrm{prob}(E)\,\mathrm{prob}(F \mid E),$$

donde $\mathrm{prob}(F \mid E)$ es la probabilidad *condicional* de F por E, o dado E. Esto es, $\mathrm{prob}(F \mid E)$ es la probabilidad que otorgaríamos al suceso F si ya supiéramos que E ha ocurrido.

Por ejemplo, supongamos que alguien tira un dado y nos dice que el resultado es el suceso E que el resultado es par. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el dado esté mostrando un 3? Obviamente, $\mathrm{prob}(\{3\} \mid E) = 0$, porque es imposible que el dado muestre un 3 si ha aparecido un número par. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el dado muestre un 2? Dado que el resultado es par sólo hay tres posibilidades: 2, 4 y 6. Todas ellas son igualmente probables. Luego la probabilidad de cada una debe ser 1/3. Así pues, $\mathrm{prob}(\{2\} \mid E) = 1/3$.

El principio que hemos estado usando en estos cálculos está encerrado en la fórmula

$$\mathrm{prob}(F \mid E) = \mathrm{prob}(E \cap F) \,/\, \mathrm{prob}(E).$$

Por ejemplo, $\mathrm{prob}(\{2\} \mid E) = \mathrm{prob}(E \cap \{2\}) \,/\, \mathrm{prob}(E)$. Puesto que $E \cap \{2\} = \{2\}$, se sigue que $\mathrm{prob}(E \cap \{2\}) = \mathrm{prob}(\{2\}) = 1/6$. Asimismo, $\mathrm{prob}(E) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$. Luego $\mathrm{prob}(\{2\} \mid E) = (1/6)/(1/2) = 1/3$.

A veces los cálculos se pueden simplificar por medio de la regla de Bayes. Esta afirma que

$$\mathrm{prob}(F \mid E) = \frac{(\mathrm{prob}(E \mid F)\,\mathrm{prob}(F)}{\mathrm{prob}(E)}.$$

Aunque este resultado ha provocado muchos comentarios, no es ni mucho menos un resultado profundo. Se deduce inmediatamente de que

$$\mathrm{prob}(F \mid E)\,\mathrm{prob}(E) = \mathrm{prob}(E \cap F) = \mathrm{prob}(E \mid F)\,\mathrm{prob}(F).$$

Dar un ejemplo será la mejor manera de ilustrar su significado.

2.1.5. Probando suerte en los exámenes

En un test de elección múltiple un candidato ha de escoger entre m respuestas. Cada uno de los candidatos es o bien enteramente ignorante y simplemente escoge las respuestas al azar, o bien es omnisciente y conoce perfectamente la respuesta correcta. Si la proporción de candidatos omniscientes es p, ¿cuál es la probabilidad de que un candidato que dio la respuesta correcta la adivinara?

Usando una notación que no necesita explicación, se nos pide que calculemos prob(ignorante | correcta). La regla de Bayes nos dice que esta probabilidad viene dada por

$$\text{prob(ignorante} \mid \text{correcta)} = \frac{\text{prob(correcta} \mid \text{ignorante) prob(ignorante)}}{\text{prob(correcta)}}.$$

Un candidato ignorante escoge al azar, luego prob(correcta | ignorante) $= 1/m$. Sabemos que prob(ignorante) $= 1 - p$. ¿Qué sabemos del denominador prob(correcta)?

Con frecuencia es prudente usar el truco siguiente para ahorrarse calcular el denominador. Pongamos $c = 1/\text{prob(correcta)}$. Entonces

$$\text{prob(ignorante} \mid \text{correcta)} = c(1 - p)/m.$$

El mismo tipo de razonamiento muestra que

$$\text{prob(omnisciente} \mid \text{correcta)} = cp,$$

porque prob(correcta | omnisciente) $= 1$ y prob(omnisciente) $= p$.

Sin embargo, un candidato que dio la respuesta correcta debe ser o bien ignorante o bien omnisciente, y no puede ser ambas cosas a la vez. De aquí,

$$\text{prob(ignorante} \mid \text{correcta)} + \text{prob(omnisciente} \mid \text{correcta)} = 1.$$

Se deduce que $c(1 - p)/m + cp = 1$ y, por tanto, $c = m/(1 - p + pm)$. Esto concluye el cálculo. El resultado final es que

$$\text{prob(ignorante} \mid \text{correcta)} = \frac{1 - p}{1 - p + pm}.$$

Por ejemplo, si hay que escoger entre tres respuestas y sólo una persona de las 100 de una clase no es ignorante, entonces $m = 3$ y $p = 0{,}01$. Entonces la probabilidad de que una persona que dio la respuesta correcta la adivinara es 0,971.

2.2. Loterías

2.2.1. Variables aleatorias

Formalmente, una *variable aleatoria* es una función[3] $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, usted probablemente estaría dispuesto a apostar contra alguien que sostiene que la posibilidad de sacar un número par en un dado justo es superior a $3 : 2$[4]. Alguien que ha leído esto en un libro y se lo cree estaría dispuesto a aceptar una apuesta en la que usted le paga 2 dólares si aparece un número impar y él le paga a usted 3 dólares si aparece un número par. El espacio de sucesos en este caso es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la variable aleatoria que describe la apuesta está definida por

$$X(\omega) = \begin{cases} 3, & \text{si} \quad \omega = 2, 4 \text{ ó } 6 \\ -2, & \text{si} \quad \omega = 1, 3 \text{ ó } 5. \end{cases}$$

Así pues, $X = 3$ cuando usted gana 3 dólares porque el dado muestra un número par, y $X = -2$ cuando usted pierde 2 dólares porque el dado muestra un número impar. La probabilidad de que $X = 3$ viene dada por prob($\{2, 4, 6\}$) $= 1/2$. Análogamente, la probabilidad de que $X = -2$ viene dada por prob($\{1, 3, 5\}$) $= 1/2$.

2.2.2. Esperanza

La *esperanza* o *valor esperado* $\mathcal{E}X$ de una variable aleatoria X se define por

$$\mathcal{E}X = \sum k \text{ prob}(X = k),$$

donde la suma se extiende a todos los valores de k para los cuales prob($X = k$) no es cero[5]. Si se hace la media de muchas observaciones distintas del valor de X, entonces la probabilidad de que esta «media en el largo plazo» difiera de $\mathcal{E}X$ será pequeña.

Por ejemplo, el valor esperado de sus ganancias en dólares en la apuesta descrita anteriormente viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}X &= \sum k \text{ prob}(X = k) \\ &= 3 \times 1/2 + (-2) \times 1/2 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

[3] La letra $\mathbb{R}$ representa el conjunto de todos los números reales. Así pues, para todo $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ es un número real.

[4] Esto equivale a decir que la probabilidad de sacar un número par en un dado justo es menor que 2/5.

[5] Estamos suponiendo implícitamente que el conjunto de todos los k de este tipo es finito. Si no es así, es necesario usar una definición más sofisticada.

Esto le dice a usted que, si apuesta una y otra vez sobre el resultado de un dado justo, ganando 3 dólares cuando el resultado es par y perdiendo 2 dólares cuando es impar, entonces a largo plazo ganaría una media de 50 centavos por apuesta.

2.2.3. Loterías

Con frecuencia nos referiremos a *loterías* en lugar de a variables aleatorias. Por ejemplo, el aceptar la apuesta descrita anteriormente puede ser pensado en términos de jugar a la lotería **L** ilustrada en la Figura 2.3(a). La fila superior muestra los resultados finales posibles, o *premios*, y la fila inferior muestra sus probabilidades respectivas. La lotería **M** en la Figura 2.3(b) es un poco más complicada porque tiene tres premios. El gordo de 12 dólares, por ejemplo, tiene probabilidad 1/6.

En expresiones matemáticas, **L** se identifica con la variable aleatoria que es igual al premio obtenido cuando se usa la lotería. Si los premios tienen valores numéricos, se puede calcular la esperanza de **L**. Para calcular $\mathcal{E}\mathbf{L}$, multiplíquese el valor numérico de cada premio por la probabilidad con que ocurre, y entonces súmense los productos obtenidos.

En los ejemplos de la Figura 2.3 ya sabemos que la esperanza en dólares de la lotería **L** es $\mathcal{E}\mathbf{L} = 1/2$. El valor esperado en dólares de la lotería **M** es

$$\mathcal{E}\mathbf{M} = (-2) \times 1/2 + 1 \times 1/3 + 12 \times 1/6 = 2.$$

2.2.4. Loterías compuestas

Una lotería compuesta es una lotería en la que los premios son ellos mismos loterías. Lo que se gana es la posibilidad de ganar en una segunda lotería. Salvo que se diga lo contrario, siempre se supone que todas las loterías que se manejan son *independientes*.

La Figura 2.4 ilustra la lotería compuesta $p\mathbf{L} + (1 - p)\mathbf{M}$. Esta notación significa que se llega a la lotería **L** con probabilidad p y a la lotería **M** con probabilidad $1 - p$.

L =

\$3	–\$2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(a)

M =

–\$2	\$12	\$3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(b)

Figura 2.3. Dos loterías.

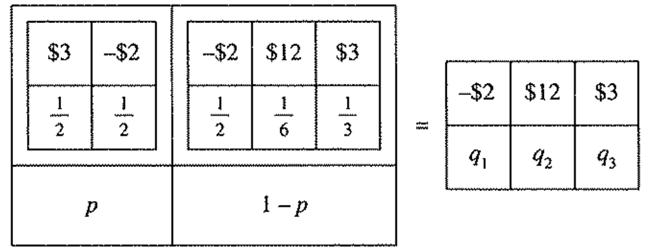


Figura 2.4. La lotería compuesta $p\mathbf{L} + (1 - p)\mathbf{M}$.

Una lotería compuesta siempre se puede reducir a una lotería simple calculando la probabilidad total de cada resultado final. En el ejemplo de la Figura 2.4,

$$q_1 = p \times 1/2 + (1 - p) \times 1/2 = 1/2$$
$$q_2 = (1 - p) \times 1/6 = 1/6 - p/6$$
$$q_3 = p \times 1/2 + (1 - p) \times 1/3 = 1/3 + p/6.$$

El valor de q_3, por ejemplo, se puede calcular como sigue. La probabilidad de ganar el premio **L** en la lotería compuesta es p. La probabilidad de ganar 3 dólares en la lotería **L** es 1/2. Estos sucesos son independientes, luego la probabilidad del suceso E de que ambos ocurran es $p \times 1/2$. Análogamente, el suceso F en el que se gana **M** en la lotería compuesta y se gana 3 dólares en la lotería **M** tiene probabilidad $(1 - p) \times 1/3$. Dado que no pueden ocurrir a la vez, E y F son sucesos disjuntos y el suceso $E \cup F$ de que el resultado final es 3 dólares tiene la probabilidad $q_3 = p \times 1/2 + (1 - p) \times 1/3$.

2.3. Valores de juego

En el Capítulo 1 vimos que todos los juegos de dos jugadores estrictamente competitivos y de información perfecta sin jugadas de azar tienen un valor considerado de v. Esto es, el jugador I tiene una estrategia pura s que le asegura un resultado que es para él por lo menos tan bueno como v, mientras que la jugadora II tiene una estrategia pura t que le asegura un resultado que es para ella por lo menos tan bueno como v. En juegos con jugadas de azar, ninguno de los jugadores tendrá garantizado obtener, cada vez que se juega, un resultado por lo menos tan bueno como un determinado resultado final v. Si la suerte está en contra del jugador, éste perderá por muy inteligentemente que juegue. Por tanto, tenemos que dejar de pensar en p =

$\mathcal{W}$	$\mathcal{L}$
p	$1-p$

Figura 2.5. Una lotería en un juego de ganar o perder.

aquello que podemos conseguir con seguridad. Cuando cada jugador ha escogido una estrategia pura, todo lo que estará determinado es la probabilidad con que se dará cada resultado final. Un par de estrategias puras, por tanto, sólo determina una lotería sobre los resultados finales. En lugar de preguntarnos qué resultados finales podemos conseguir con seguridad, deberíamos preguntarnos qué *loterías* sobre los resultados finales podemos conseguir con seguridad. Así pues debemos adelantar que el valor de un juego estrictamente competitivo con jugadas de azar será una lotería.

Las cosas quedan considerablemente simplificadas en el presente capítulo al confinar nuestra atención a juegos en los que los únicos resultados finales son $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$. Entonces una lotería toma la forma ilustrada en la Figura 2.5. Como siempre en juegos estrictamente competitivos, el símbolo W indica una victoria para el jugador I y una derrota para la jugadora II. Análogamente, L representa una derrota para I y una victoria para II.

En juegos en los que los únicos resultados finales son $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$ supondremos que un jugador racional siempre persigue maximizar la probabilidad de ganar. Las preferencias del jugador I se pueden describir entonces diciendo que le gusta la lotería **p** por lo menos tanto como la lotería **q** si y sólo si $p \geqslant q$. La lotería **p** asigna a la jugadora II una probabilidad de ganar de $1 - p$. Por tanto, a ésta le gusta la lotería **p** por lo menos tanto como la lotería **q** si y sólo si $p \leqslant q$. Se sigue que, cuando sólo hay que considerar los dos resultados finales $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$, un juego es considerado estrictamente competitivo incluso si contiene jugadas aleatorias. Es decir,

$$\mathbf{p} \preceq_1 \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \succeq_2 \mathbf{q}.$$

2.4. El juego del duelo

Dos duelistas se aproximan uno al otro. Por realismo, en este ejemplo supondremos que ambos son varones. Cada uno está armado con una pistola cargada con una bala. La probabilidad de tocar al contrario es mayor cuanto más cerca se encuentran. ¿A qué distancia del oponente debería acercarse un duelista antes de abrir fuego? Esta es literalmente una cuestión de vida o muerte; si un duelista dispara y falla, el otro podrá avanzar y disparar a quemarropa, con consecuencias fatales para el duelista que disparó primero.

2.4.1. Una forma extensiva para el duelo

Mates

Una manera de obtener un modelo para esta situación es la siguiente. Llamemos D a la distancia inicial entre los jugadores. Escojamos puntos $d_0, d_1, ..., d_n$ tales que

$$0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = D.$$

Estos puntos serviran de nodos de decisión a los jugadores I y II en el juego finito de la Figura 2.6(a). En esta Figura W indica que el jugador I sobrevive y el jugador II muere. Análogamente, L indica que el jugador II sobrevive y el I muere.

Los nodos cuadrados son jugadas de azar. En ellos Azar decide si un jugador fallará o acertará al contrario al disparar. La probabilidad de que el jugador I acierte cuando dispara desde una distancia d es $p_i(d)$. De aquí que su probabilidad de fallar sea $1 - p_i(d)$.

El primer paso al analizar el juego consiste en reconocer que un subjuego cuya raíz es una jugada de azar es simplemente una lotería. Si el jugador I sobrevive en el juego con probabilidad p, el subjuego es equivalente a la lotería **p**. Por tanto, cuando se aplica el algoritmo de Zermelo, cada uno de estos subjuegos se puede reemplazar por un nodo terminal marcado con el símbolo **p**. Este primer paso ha sido realizado en la Figura 2.6(b).

Este juego así reducido no tiene jugada de azar alguna, luego puede ser analizado exactamente como los juegos del capítulo anterior. En particular, tendrá un valor, que será una lotería **v**. El jugador I tiene una estrategia s que le asegura **v** o algo mejor, y el jugador II tiene una estrategia t que le asegura **v** o algo mejor. Esto significa que s asegura que el jugador I sobrevivirá con probabilidad v o superior y t asegura que el jugador II sobrevivirá con probabilidad $1 - v$ o superior.

Para continuar con el algoritmo de Zermelo, consideremos ahora el nodo d_1 de la Figura 2.6(b). El jugador I se puede asegurar la lotería $\mathbf{p}_1(\mathbf{d}_1)$ disparando. Si se espera, le tocará la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{d}_0)$. Por tanto, disparará si

$$p_1(d_1) > 1 - p_2(d_0),$$
$$p_1(d_1) + p_2(d_0) > 1.$$

Para saber si se cumple esta desigualdad, es necesario hacer algunas hipótesis acerca de las funciones $p_i : [0, D] \to [0, 1]$. Supondremos que son continuas y estrictamente decrecientes[6] en $[0, D]$, con $p_i(0) = 1$ y $p_i(D) = 0$,

[6] Una función f de valores reales es continua en un intervalo si su gráfica sobre este intervalo se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Es estrictamente decreciente si, para cualesquiera x e y del intervalo, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

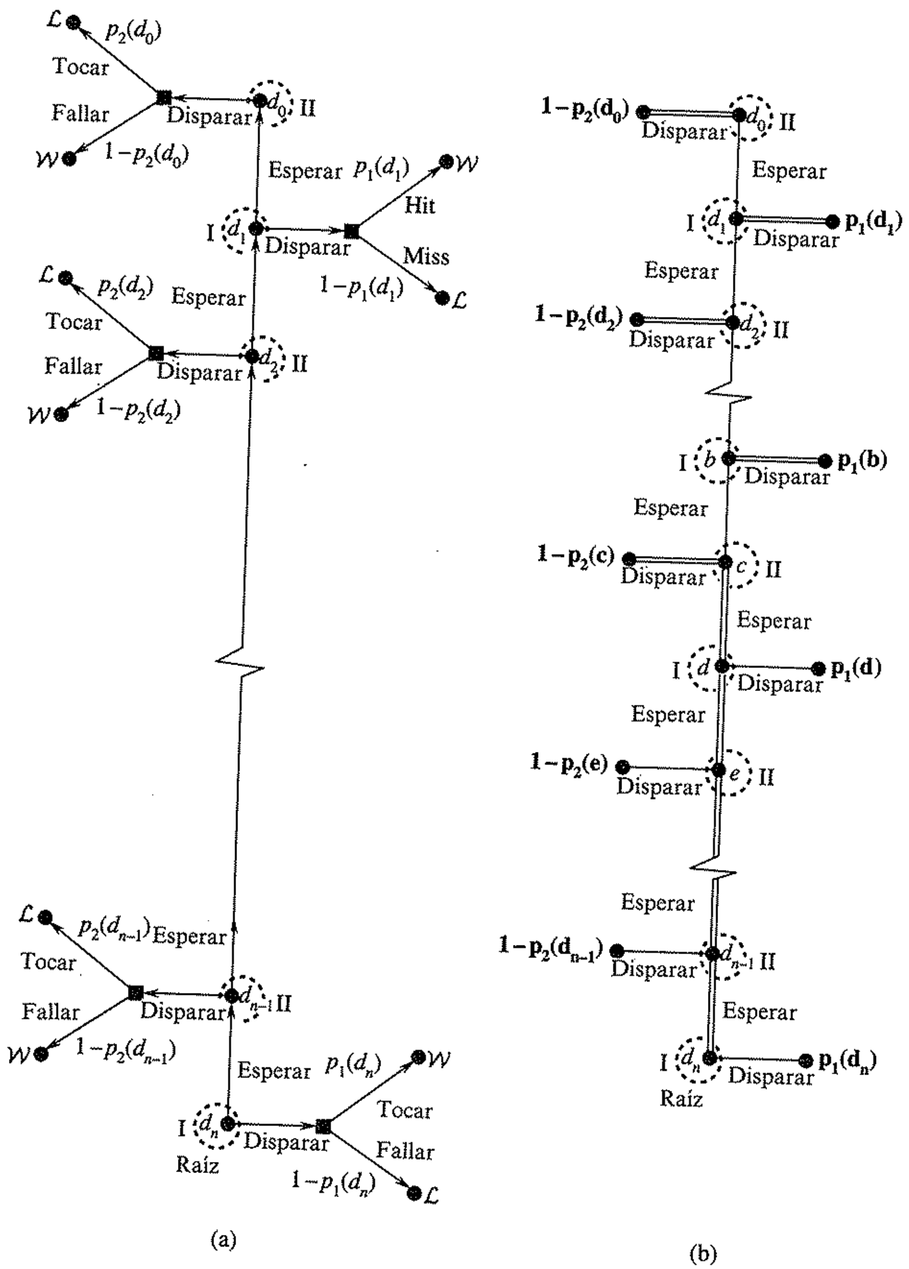


Figura 2.6. Formas extensivas del duelo.

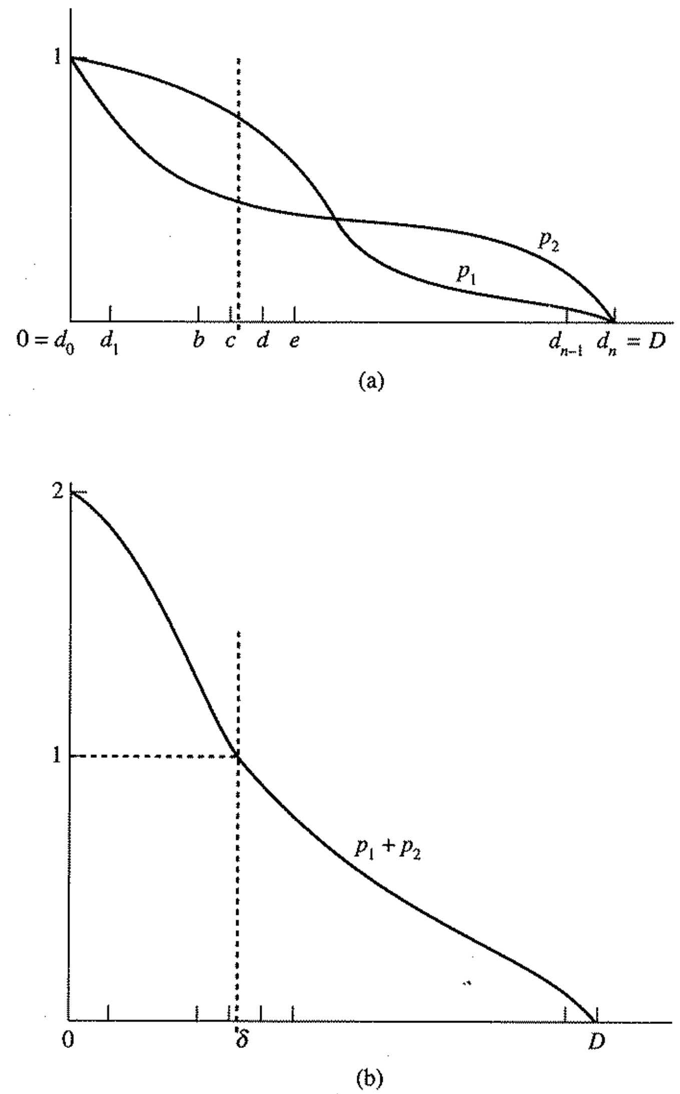


Figura 2.7. Probabilidad de acertar en el duelo.

como muestra la Figura 2.7(a). También es necesario conocer la situación de los puntos d_0, d_1, ..., d_n. La hipótesis más interesante que se puede hacer es que el número de estos puntos es muy grande y la distancia entre cada par de puntos consecutivos es muy pequeña.

Con estas hipótesis $p_1(d_1) + p_2(d_0)$ será casi igual a 2. Luego $p_1(d_1) + p_2(d_0) > 1$, y el jugador I disparará en el nodo d_1. Por tanto, el segmento que representa esta elección ha sido doblado en la Figura 2.6(b).

En el nodo d_2, el jugador II se asegura la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{d}_2)$ disparando, y consigue la lotería $\mathbf{p}_1(\mathbf{d}_1)$ esperando. Por tanto, el jugador II disparará si

$$1 - p_2(d_2) < p_1(d_1),$$
$$p_1(d_1) + p_2(d_2) > 1.$$

Puesto que $p_1(d_1) + p_2(d_2)$ sólo es algo menor que $p_1(d_1) + p_2(d_0)$, esta última desigualdad se cumplirá. Luego el jugador II disparará en el nodo d_2.

Continuando de este modo, doblaremos todos los segmentos que conducen a disparar, hasta llegar al primer par de nodos consecutivos c y d con la propiedad que

$$p_1(d) + p_2(c) \leqslant 1.$$

Esto ha de ocurrir tarde o temprano porque $p_1(d_n) + p_2(d_{n-1})$ es casi 0. Para no complicar las cosas sólo consideraremos en detalle el caso en que $c < d$ y $p_1(d) + p_2(c) < 1$. Este es el caso que muestra la Figura 2.6(b). En el nodo d el jugador I se puede asegurar la lotería $\mathbf{p}_1(\mathbf{d})$ disparando. Si espera, consigue la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{c})$. Puesto que $p_1(d) + p_2(c) < 1$, prefiere esta última. Luego el jugador I espera en el nodo d y el segmento que corresponde a esperar en d ha sido doblado.

En el menor de los nodos e mayor que d el jugador II se puede asegurar la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{e})$ disparando. Si espera, consigue la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{c})$. Prefiere esta última porque $p_2(c) > p_2(e)$. Así pues, el jugador II espera en el nodo e. Un razonamiento similar demuestra que ambos jugadores esperan siempre que la distancia que les separa es mayor que d[7]. Todos los segmentos que corresponden a esperar en estos nodos han sido consiguientemente doblados.

Puesto que c y d son el primer par de nodos consecutivos para los cuales $p_1(d) + p_2(c) \leqslant 1$, debe ser cierto que $p_1(b) + p_2(c) > 1$. Pero hemos supuesto que b, c y d se encuentran muy próximos. Además, p_1 y p_2 son continuas. Se sigue que b, c y d deben todos encontrarse cerca del punto δ, en el que

$$p_1(\delta) + p_2(\delta) = 1,$$

como muestra la Figura 2.7(b).

Por tanto, el algoritmo de Zermelo selecciona una estrategia pura s para el jugador I que consiste en esperar hasta que el contrario se encuentra

[7] En realidad un razonamiento formal no es necesario. Si uno planea disparar antes que el otro individuo, es obvio que debería disparar *justo* antes de que el otro lo haga para maximizar la probabilidad de acertar.

$\mathcal{W}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{L}$
q	$1-q$	r	$1-r$
p		$1-p$	

=

$\mathcal{W}$	$\mathcal{L}$
$pq + (1-p)r$	$p(1-q) + (1-p)(1-r)$

Figura 2.8 La identidad $pq + (1 - p)\mathbf{r} = \mathbf{pq} + (\mathbf{1} - \mathbf{p})\mathbf{r}$.

aproximadamente a la distancia δ y entonces disparar en todas las oportunidades subsiguientes[8]. La estrategia pura t seleccionada para el jugador II es aproximadamente la misma. El valor del juego es aproximadamente $\mathbf{v}$, donde $v = p_1(\delta) = 1 - p_2(\delta)$. Así pues, si usamos el par de estrategias puras (s, t) el jugador I sobrevivirá con probabilidad v, aproximadamente, y el jugador II sobrevivirá con probabilidad $1 - v$, aproximadamente.

Si, por ejemplo, $p_1(d) = 1 - (d/D)$ y $p_2(d) = 1 - (d/D)^2$, entonces uno debería esperar hasta que el contrario se encontrara aproximadamente a una distancia δ tal que

$$1 - (\delta/D) + 1 - (\delta/D)^2 = 1.$$

Cogiendo la raíz positiva de esta ecuación cuadrática, obtenemos que los duelistas deberían abrir fuego cuando se encuentran aproximadamente a una distancia $1/2D(\sqrt{5} - 1)$. El jugador II tendrá una mayor probabilidad de sobrevivir porque la probabilidad de acertar a cualquier distancia dada siempre es mayor para él que para el jugador I.

2.5. Parchís

Fun 2.6 ⟶

Ahora estudiaremos una versión muy simplificada del parchís (o ludo). Su análisis requiere el uso de loterías compuestas. Este uso es particularmente fácil cuando los únicos premios posibles son $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$. Como muestra la Figura 2.5, el símbolo $\mathbf{p}$ puede ser usado en este caso para la lotería en que el premio $\mathcal{W}$ se da con probabilidad p y el premio $\mathcal{L}$ con probabilidad $1 - p$. La Figura 2.8 muestra la lotería compuesta $\mathbf{pq} + (1 - p)\mathbf{r}$. Es fácil comprobar que ésta es equivalente a la lotería simple $\mathbf{pq} + (\mathbf{1} - \mathbf{p})\mathbf{r}$.

Estrictamente hablando, el parchís es un juego infinito, porque sus reglas permiten que continúe indefinidamente. Sin embargo, esta eventualidad

[8] Evidentemente, si uno dispara en su primera oportunidad, no podrá disparar en subsiguientes oportunidades porque la pistola sólo contiene una bala. El plan de disparar en una oportunidad subsiguiente está, por tanto, condicionado a que uno no haya disparado antes por alguna razón.

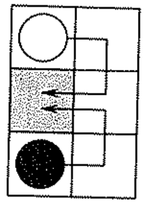


Figura 2.9. El tablero del parchís simplificado.

se da con probabilidad cero[9] y es, por tanto, irrelevante en un análisis del juego. En cualquier caso, éste y otros detalles técnicos no serán tenidos en consideración en esta discusión. Daremos por supuesto, sin más, que el parchís y todos sus subjuegos tienen valores y nos concentraremos en el problema de averiguar estos valores.

2.5.1. Las reglas del parchís simplificado

El juego se practica entre el jugador I (Blancas) y la jugadora II (Negras) sobre el tablero indicado en la Figura 2.9. Gana quien consigue llegar primero al cuadrado sombreado siguiendo las rutas indicadas. Los jugadores juegan por turnos alternativos, empezando por el jugador I. Antes de cada uno de sus turnos, se echa al aire una moneda no trucada. El jugador o jugadora correspondiente puede entonces decidir si mueve o no la ficha. Si se mueve la ficha, hay que moverla *un* cuadrado si sale cruz y *dos* cuadrados si sale cara. En este último caso se admite una excepción. Si el cuadrado ganador puede ser alcanzado avanzando un cuadrado, este movimiento ganador se puede hacer también incluso cuando ha salido cara.

Si la ficha de uno de los jugadores va a parar a un cuadrado ocupado por la del contrario, entonces la ficha del contrario es devuelta a la posición inicial.

Si ambos jugadores deciden no mover las fichas en turnos consecutivos, el juego acaba y se decide el ganador echando la moneda al aire.

2.5.2. Posiciones posibles en el parchís simplificado

La Figura 2.10 ofrece una lista de las ocho posiciones posibles en que se puede encontrar el jugador I cuando le toca jugar. Suponemos que cada

[9] Un suceso con probabilidad cero no tiene por qué ser imposible. Por ejemplo, es posible que si tiramos un dado no trucado un número infinito de veces, siempre salgan caras. Pero la probabilidad de este suceso es cero.

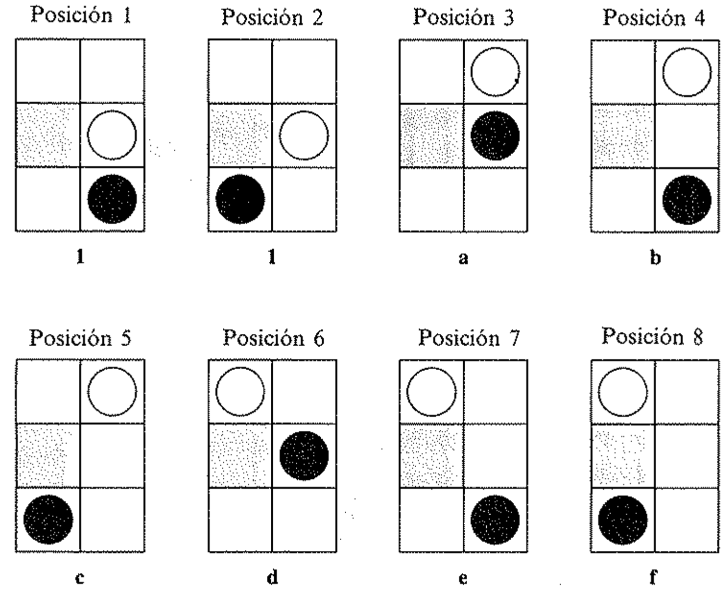


Figura 2.10. Posiciones posibles cuando toca jugar a las Blancas.

subjuego del parchís que empieza por una de estas posiciones tiene un valor. El valor que corresponde a cada posición se ha escrito debajo de ella. Por ejemplo, las posiciones 1 y 2 tienen la lotería **1** debajo de ellas porque el jugador I puede ganar con seguridad si se encuentra en esta posición cuando le toca jugar a él.

Hay que considerar asimismo las ocho posiciones posibles en que puede encontrarse el jugador II cuando le toca jugar. Estas aparecen listadas en la Figura 2.11. Sus valores se pueden determinar a partir de la Figura 2.10. Por ejemplo, la posición 11 es para las Negras lo que la posición 3 es para las Blancas. Luego el valor de la posición 11 es $\mathbf{1} - \mathbf{a}$.

El valor del parchís simplificado es **f** porque el juego empieza en esta posición con las Blancas jugando primero. Pero para calcular f usando una versión del algoritmo de Zermelo es necesario calcular desde a hasta e simultáneamente.

2.5.3. Análisis del juego

Paso 1. En la Figura 2.12, el diagrama del subjuego cuya raíz es la posición 3 muestra las acciones óptimas del jugador I después de echar la moneda. Se sigue que $\mathbf{a} = \mathbf{1/2} \cdot \mathbf{1} + (\mathbf{1} - \mathbf{d})$. Luego

$$a = (1) \cdot 1/2 + (1 - d) \cdot 1/2$$

$$a + d \cdot 1/2 = 1. \tag{2.1}$$

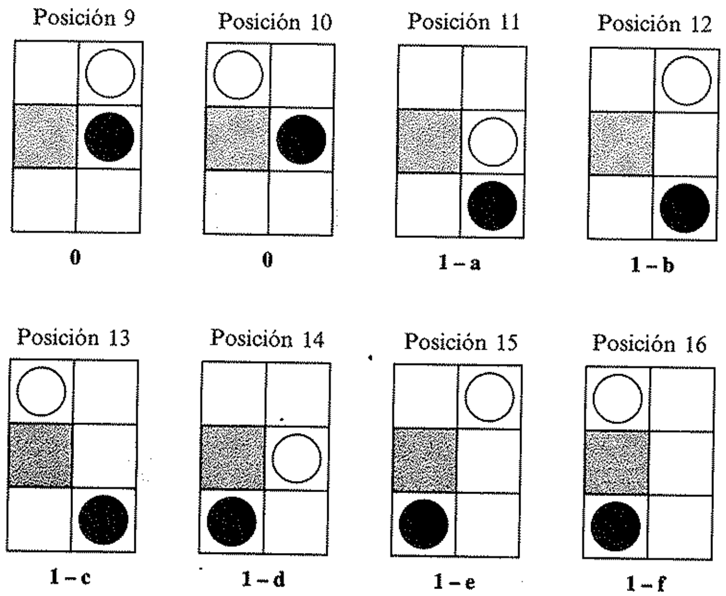


Figura 2.11. Posiciones posibles cuando toca jugar a las Negras.

Paso 2. Ahora consideremos la posición 6 en la Figura 2.12. Procediendo como antes, obtenemos que

$$d = (1 - d) \cdot 1/2 + (0) \cdot 1/2$$
$$d = 1/3,$$

luego, según la ecuación (2.1),

$$a = 5/6.$$

Paso 3. Consideremos la posición 4 en la Figura 2.12. No es obvio que el jugador I deba mover la ficha si le sale cruz. Si $1 - b \leqslant 1/6$, y, por tanto, $b \geqslant 5/6$, es óptimo mover después de una cruz. Pero entonces

$$b = (1) \cdot 1/2 + (1 - a) \cdot 1/2$$
$$= (1) \cdot 1/2 + (1/6) \cdot 1/2$$
$$b = 7/12,$$

que es una contradicción. Luego es óptimo *no* mover, y

$$b = (1) \cdot 1/2 + (1 - b) \cdot 1/2$$
$$b = 2/3.$$

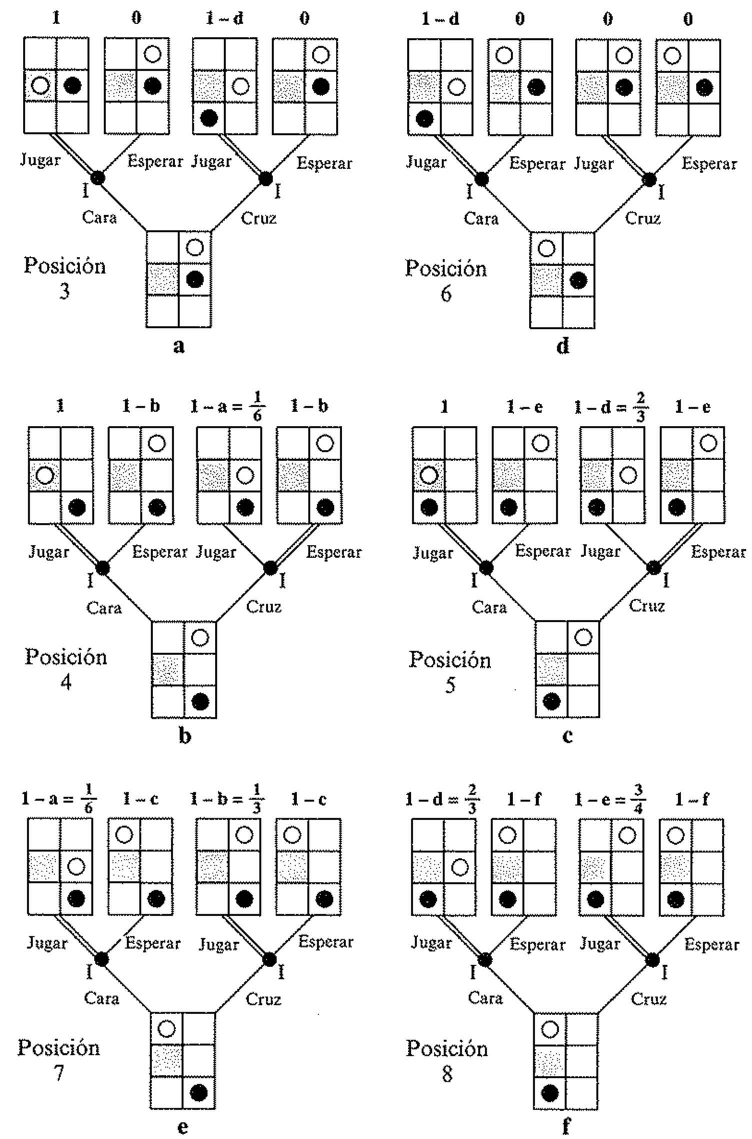


Figura 2.12. De una posición a otra.

Paso 4. Las posiciones 5 y 7 de la Figura 2.12 hay que considerarlas al mismo tiempo. Si se diera el caso que $1 - e \geqslant 2/3$ y, por tanto, $e \leqslant 1/3$, entonces el examen de la posición 5 muestra que

$$c = (1) \cdot 1/2 + (1 - e) \cdot 1/2$$
$$c + e \cdot 1/2 = 1. \tag{2.2}$$

Pero entonces $1 - c = e/2 \leqslant 1/6$ y, por tanto, según la posición 7,

$$\begin{aligned} e &= (1 - a) \cdot 1/2 + (1 - b) \cdot 1/2 \\ &= (1/6) \cdot 1/2 + (1/3) \cdot 1/2 \\ e &= 1/4. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se deduce de la Ecuación (2.2) que

$$c = 7/8. \tag{2.4}$$

La ecuación se obtuvo suponiendo que $e \leqslant 1/3$. Supongamos, por el contrario, que $e > 1/3$. Entonces, según la posición 5,

$$\begin{aligned} c &= (1) \cdot 1/2 + (1 - d) \cdot 1/2 \\ &= (1) \cdot 1/2 + (2/3) \cdot 1/2 = 5/6, \end{aligned}$$

luego, según la posición 7,

$$e = (1/6) \cdot 1/2 + (1/3) \cdot 1/2 = 1/4,$$

que contradice el hecho que $e > 1/3$. Luego se cumplen las Ecuaciones (2.3) y (2.4).

Paso 5. Un razonamiento basado en robar la estrategia muestra que $f \geqslant 1/2$. Luego $1 - f \leqslant 1/2$, y según la posición 8,

$$\begin{aligned} f &= (1 - d) \cdot 1/2 + (1 - e) \cdot 1/2 \\ &= (2/3) \cdot 1/2 + (3/4) \cdot 1/2 \\ f &= 17/24. \end{aligned}$$

Con esto concluye el análisis. El valor del juego es 17/24. El jugador I puede asegurar que ganará con una probabilidad por lo menos igual a 17/24. Para ello siempre ha de mover la ficha excepto cuando le sale cruz en las posiciones 4, 5 ó 6. En las posiciones 4 y 5, no debería mover la ficha si le sale una cruz. En la posición 6, su decisión es irrelevante. La estrategia óptima para la jugadora II es una imagen especular de la del jugador I. El usar esta estrategia le asegura que ganará con una probabilidad de al menos 7/24.

2.6. Ejercicios

Revisión

1. Explicar por qué el número de manos distintas posibles en el póquer descubierto es

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

(Una baraja contiene 52 cartas. Una mano de póquer descubierto contiene 5 cartas. Lo que se le está preguntando, pues, es cuántas maneras hay de seleccionar 5 cartas de entre 52 cuando el orden en que son seleccionadas es irrelevante.)

¿Cuál es la probabilidad de de ser servido una escalera real en póquer descubierto? (Una escalera real consiste de A, K, Q, J y 10 del mismo palo.)

Revisión

2. Supongamos que le sirven el A, K, Q y 10 de corazones y el 2 de trébol. En el póquer con descarte usted puede cambiar algunas de sus cartas después de la primera ronda de apuestas. Si se descarta del 2 de trébol, esperando sacar la J de corazones, ¿cuál es la probabilidad de conseguirlo?

¿Cuál es la probabilidad de sacar una escalera?[10]. (Cualquier J le bastará para ello.)

Revisión

3. Un hombre está dispuesto a apostar que Punter's Folly ganará la primera carrera cuando las apuestas están 2:1 en contra. También está preparado a apostar que Gambler's Ruin ganará la segunda carrera cuando las apuestas están 3:1 en contra. Pero no está dispuesto a apostar que ambos caballos ganarán cuando las apuestas que se ofrecen estan a 15:1 en contra. Si las dos carreras son independientes, ¿es este hombre consistente en sus apuestas?

Revisión

4. En una carrera, un corredor de apuestas ofrece apuestas de $a_k : 1$ contra la victoria del k-ésimo caballo. Si corren n caballos y

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + 1} < 1,$$

¿cómo deberíamos apostar si queremos estar seguros de ganar?

5. John cree que la probabilidad de que un Demócrata sea elegido en una elección presidencial es 5/8. Mary cree que la probabilidad de un Republicano es 3/4. Ninguno de los dos otorga posibilidad alguna a candidatos de terceros partidos. Acuerdan apostar 10 dólares sobre el resultado suponiendo que ninguno lleva ventaja. (John pagará 10 dólares a Mary si el Republicano gana, y ella le pagará 10 dólares si el Demócrata gana.) ¿Cuál es el beneficio esperado de John? ¿Cuál es el de Mary?

¿Cómo podría usted estar seguro de ganar dinero apostando con John y Mary, si ambos están siempre dispuestos a aceptar cualquier apuesta que tiene para ellos un valor esperado en dolares no negativo?

[10] Este es un acto de locura clásico: intentar una escalera descartándose de una de las cartas «interiores». Sin embargo, sólo es un acto de locura si usted hace una apuesta considerable en la primera ronda para así poder descartarse.

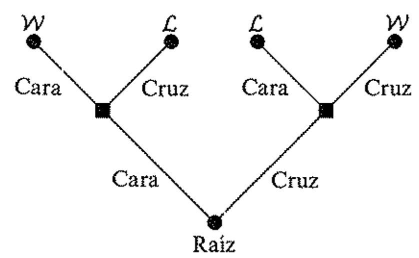


Figura 2.13. Un juego con sólo jugadas de azar.

6. ¿Cuál es el valor esperado en dolares de la lotería compuesta de la Figura 2.4 cuando $p = 1/2$?
7. La Figura 2.13 ilustra un juego en el que sólo hay jugadas de azar. Cada jugada aleatoria representa el lanzamiento independiente de una moneda no trucada. Expresar esta situación como una lotería simple. Expresar también la situación como una lotería simple cuando las jugadas de azar no son independientes, sino que corresponden a un único lanzamiento de la misma moneda.

Revisión 8. Una caja contiene una moneda de oro y dos de plata. Se sacan dos monedas de la caja al azar. Un hombre mira las monedas sacadas sin que usted pueda verlas. Entonces, él selecciona una de las monedas y se la muestra. Es de plata. ¿Con qué puntos apostaría usted con él que la otra es de oro?

¿Con qué puntos apostaría usted si la moneda que se le muestra es elegida al azar de entre el par sacado de la caja?

Revisión 9. La tabla de la Figura 2.14 muestra las probabilidades de los cuatro pares (a, c), (a, d), (b, c) y (b, d). La variable aleatoria x puede tomar cualquiera de los valores a o b. La variable aleatoria y puede tomar cualquiera de los valores c o d. Calcular las siguientes probabilidades:
a) $\text{prob}(x = a)$ *b*) $\text{prob}(y = c)$
c) $\text{prob}(x = a \text{ e } y = c)$ *d*) $\text{prob}(x = a \text{ o } y = c)$
e) $\text{prob}(x = a \mid y = c)$ *f*) $\text{prob}(y = c \mid x = a)$.

Revisión 10. Los n países del mundo tienen poblaciones $M_1, M_2, ..., M_n$. El número de gente de izquierdas en cada país es $L_1, L_2, ..., L_n$. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de izquierdas elegida al azar de entre la población del mundo provenga del primer país?

11. El jugador I puede elegir l o r en la primera jugada en un juego G.

	c	d
a	0,01	0,09
b	0	0,9

Figura 2.14. La tabla para el Ejercicio 2.6.9.

Si elige l, una jugada de azar elige L con probabilidad p, o R con probabilidad $1 - p$. Si L es escogido, el juego termina con el resultado $\mathcal{L}$. Si R es escogido, se juega un subjuego de estructura idéntica a la de G. Si el jugador I escoge r, una jugada de azar elige L con probabilidad q, o R con probabilidad $1 - q$. Si L es escogido, el juego termina con el resultado $\mathcal{W}$. Si R es escogido, se juega un subjuego de estructura idéntica a la de G, *exceptuando* que los resultados $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$ se intercambian, así como los papeles de los jugadores I y II.
a) Empezar el árbol del juego.
b) ¿Por qué este juego es infinito?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego continúe indefinidamente, si el jugador I siempre escoge l?
d) Si el valor de G es v, demostrar que $v = q + (1 - q)(1 - v)$, y de aquí deducir la probabilidad v de que gane el jugador I si ambos jugadores usan estrategias óptimas.
e) ¿Quién es v cuando $q = 1/2$?

12. Analizar el nim cuando los jugadores no se turnan al jugar, sino que echan una moneda no trucada para decidir cada vez quien juega a continuación.
13. En el duelo, ¿a qué distancia del contrario debería uno acercarse antes de disparar cuando $p_1(d) = p_2(d) = 1 - (d/D)^2$?

Mates 14. El análisis del duelo de la Sección 2.4.1 sólo considera en detalle el caso en que $c < d$ y $p_1(d) + p_2(c) < 1$. ¿Cómo cambian las cosas si $p_1(c) + p_2(d) < 1$? ¿Qué ocurre cuando $c < d$ y $p_1(d) + p_2(c) = 1$?

15. ¿Cómo cambia el análisis del duelo si $p_1(D) + p_2(D) > 1$? ¿Qué pasa si $p_1(0) + p_2(0) < 1$? ¿Qué pasa si $p_1(d) + p_2(d) = 1$ para todo d tal que $D/3 \leqslant d \leqslant 2D/3$?

Mates 16. ¿Cómo cambia el análisis del duelo si introducimos nodos extra entre d_k y d_{k+1} y todos ellos son asignados al jugador que decide en el nodo d_k?

Mates 17. ¿Qué aspecto tendrá el juego óptimo en el duelo si la oportunidad de disparar no va por turnos sino que en cada nodo se decide qué jugador tiene la oportunidad de disparar por medio de una jugada de azar que asigna la misma probabilidad a cada jugador?

Fun 18. ¿Cuál es la probabilidad de que el parchís simplificado continúe por 5 o más jugadas si ambos jugadores siempre mueven las fichas el máximo número de cuadrados consistente con las reglas?

Fun 19. ¿Cuál es el argumento basado en un robo de estrategia a que se ha hecho referencia en el paso 5 de la Sección 2.5.3? ¿Qué argumento basado en un robo de estrategia acorta el razonamiento en el paso 3?

Fun 20. En la Sección 2.5.3 no se menciona la posibilidad de que ninguno de los jugadores quiera mover las fichas en jugadas consecutivas. ¿Por qué esta posibilidad no afecta al análisis?

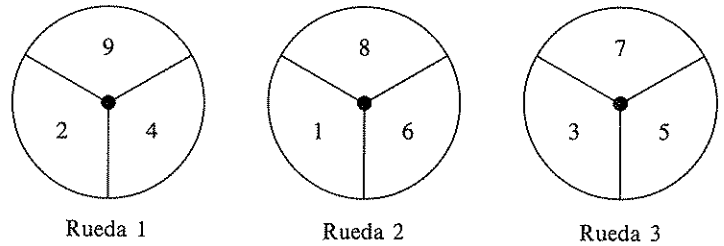


Figura 2.15. Las ruedas de la ruleta de Gale.

Fun

21. Analizar el juego simplificado del parchís de la Sección 2.5 con la modificación que, cuando sale cara, un jugador puede avanzar discrecionalmente 0, 1 ó 2 cuadrados. Suponer que las demás reglas no son modificadas.

Fun

22. Analizar el juego simplificado del parchís de la Sección 2.5 con la modificación que, cuando una ficha se encuentra exactamente a un cuadrado del cuadrado ganador, entonces puede ser avanzado si sale cruz[11]. Suponer que las demás reglas no son modificadas.
23. Cuando se hace girar cualquier «rueda de ruleta» de la Figura 2.15, todos los números en ella tienen la misma probabilidad de salir. En la ruleta de Gale, el jugador I empieza escogiendo una ruleta y haciéndola girar. Mientras la rueda del jugador I todavía gira, la jugadora II escoge una de las restantes ruedas y la hace girar. El jugador cuya rueda se detiene en el número más grande gana, y el otro pierde.
    a) I escoge la rueda 1 y la jugadora II escoge la rueda 2, el resultado es una lotería **p**. ¿Cuál es el valor de p? (Suponer que las ruedas de ruleta son independientes.)
    b) Dibujar el árbol del juego de la ruleta de Gale.
    c) Reducir el árbol a uno sin jugadas de azar, como se hizo para el duelo en la Sección 2.4.
    d) Si ambos jugadores escogen óptimamente, demostrar que la probabilidad de que gane la jugadora II es 5/9.
    e) Un análisis superficial de la ruleta de Gale parece justificar que el jugador I debe escoger la mejor rueda. La jugadora II deberá entonces contentarse con la segunda mejor rueda. Pero esto no puede ser verdad porque en este caso el jugador I ganaría con más frecuencia que la jugadora II. ¿Dónde está la falacia del argumento?[12].

[11] Esta modificación hace que el juego se parezca más al parchís real. La nueva versión se puede resolver con el mismo método que la versión original, pero el álgebra es un poco más difícil. En particular, las posiciones 1 y 2 de la Figura 2.10 dejan de tener valor **1**. Si suponemos que sus valores son g y **h**, respectivamente, se puede demostrar que se da una contradicción excepto si $d < g < h$.

[12] Este ejercicio adelanta un ejemplo de relación *intransitiva* (Sección 3.1).

24. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 9\}$. Si el jugador I escoge la rueda 2 en la ruleta de Gale del Ejercicio 2.6.23, está escogiendo una lotería $\mathbf{L}_2$ con premios en Ω. Expresar esta lotería como una tabla del tipo dado en la Figura 2.3. Demostrar que

$$\mathcal{E}\mathbf{L}_1 = \mathcal{E}\mathbf{L}_2 = \mathcal{E}\mathbf{L}_3 = 5.$$

Designemos por $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2$ la lotería el premio ganador de la cual es $\omega_1 - \omega_2$ si el resultado de la lotería $\mathbf{L}_1$ es ω_1 y el de la lotería $\mathbf{L}_2$ es ω_2. ¿Cuál es la probabilidad del premio $-2 = 4 - 6$ en la lotería $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2$? ¿Por qué es cierto que $\mathcal{E}(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2) = \mathcal{E}\mathbf{L}_1 - \mathcal{E}\mathbf{L}_2$? Deducir que

$$\mathcal{E}(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2) = \mathcal{E}(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3) = \mathcal{E}(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_3) = 0.$$

25. En una versión alternativa de la ruleta de Gale, cada una de las ruedas de ruleta contiene *cuatro* números igualmente probables. Los números de la primera rueda son 2, 4, 6 y 9, los de la segunda son 1, 5, 6 y 8 y los de la tercera son 3, 4, 5 y 7. Si las dos ruedas elegidas por los jugadores se detienen en el mismo número, las ruedas se hacen girar una y otra vez hasta que uno de los dos jugadores gana.
    a) Si el jugador I escoge la primera ruleta y la jugadora II escoge la segunda, demostrar que la probabilidad p de que gane el jugador I cumple $p = 1/2 + p/16$.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador I gane completamente el juego si ambos jugadores escogen óptimamente?

Fun

26. En un popular concurso televisivo los concursantes han de escoger una puerta entre tres. Una de ellas esconde un premio, pero no hay nada detrás de las otras. La concursante no tiene motivos para pensar que una puerta particular tiene una probabilidad mayor que las demás de esconder el premio.

    El presentador del concurso sabe qué puerta esconde el premio. Cuando la concursante ya ha escogido provisionalmente una de las puertas, el presentador *debe* abrir una de las otras dos puertas. La concursante tiene entonces la oportunidad de cambiar de opinión sobre la puerta escogida. Supondremos que la concursante quiere maximizar la probabilidad de conseguir el premio y que el presentador quiere minimizarla.
    a) Describir una estrategia óptima para el presentador. De ahora en adelante suponga que el presentador actúa de acuerdo con esta estrategia.
    b) Si la concursante no altera su elección original, explicar por qué su probabilidad de ganar *antes* de que el presentador abra una puerta es 1/3. ¿Por qué su probabilidad de ganar continúa siendo 1/3 incluso *después* de que el presentador ha abierto

una puerta? ¿Por qué una persona naive pensaría que esta última probabilidad es 1/2?

c) Si la concursante *siempre* cambia de elección después que el presentador ha abierto una puerta, explicar por qué su probabilidad de ganar es ahora 2/3, si ella y el presentador juegan óptimamente. ¿Por qué una persona ingenua pensaría que esta última probabilidad es 1/2?

d) Discutir cómo cambiaría la situación si al presentador no le estuviera prohibido abrir la puerta escogida provisionalmente por la concursante, y pudiera libremente abrir cualquiera de las tres puertas.

C A P I T U L O

3

Sobre gustos

3.1. Preferencias racionales

La forma más simple de describir preferencias es mediante una relación de preferencia definida en el conjunto Ω de resultados. En la Sección 1.7 ya hemos introducido esta idea, pero sin discutir las propiedades que deberían de satisfacer las preferencias de individuos racionales. Las hipótesis necesarias que dimos por supuestas previamente eran:

$$a \preceq b \quad \text{o} \quad b \preceq a \qquad \text{(totalidad)}$$

$$a \preceq b \quad \text{y} \quad b \preceq c \quad \Rightarrow \quad a \preceq c \qquad \text{(transitividad)}$$

para todo a, b y c de Ω.

El supuesto de transitividad es el único que es un requerimiento genuino de racionalidad. El requerimiento de totalidad solamente asegura que el individuo siempre será capaz de expresar sus preferencias entre dos resultados[1].

3.1.1. *La máquina de hacer dinero*

¿Por qué deberían ser transitivas las preferencias de una persona racional? Supongamos que las preferencias de un hombre sobre a, b y c satisfacen

$$a \preceq b \preceq c \prec a.$$

Si a, b y c son objetos que pueden ser intercambiados, entonces le podríamos dejar sin un céntimo de la forma siguiente.

Supongamos que la víctima empieza poseyendo a. Puesto que b le gusta por lo menos tanto como a, debería estar dispuesto a intercambiar a por b. Del mismo modo, debería estar dispuesto a intercambiar b por c. Pero prefiere estrictamente a a c. Por tanto, debería estar dispuesto a pagar una pequeña cantidad, pongamos un penique, por intercambiar c por a. Pero con estos intercambios nuestro hombre acabaría poseyendo otra vez a con un penique menos. Podríamos simplemente repetir el proceso hasta dejarle sin un céntimo.

3.1.2. *Indiferencia y preferencia estricta*

Una relación de preferencia $\preceq$ no debería confundirse con la relación de orden $\leqslant$ que se usa para indicar cual es el mayor entre dos números reales. Esta satisface otra condición:

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad b \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

---

[1] En matemáticas, una relación que satisface totalidad y transitividad se llama un preorden (total). Si se sustituye la condición de totalidad por $a \preceq a$ (reflexividad), entonces $\preceq$ se convierte en un preorden *parcial*.

que por supuesto no queremos exigir en general a las relaciones de preferencia. En su lugar la relación de indiferencia $\sim$ se define por:

$$a \precsim b \quad \text{y} \quad b \precsim a \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b.$$

La relación de preferencia estricta $<$ se define como:

$$a \precsim b \quad \text{y} \quad \text{no}(a \sim b) \quad \Leftrightarrow \quad a \prec b.$$

3.2. Funciones de utilidad

Los problemas de decisión se reducen a encontrar el resultado ω en un subconjunto S de Ω que el agente que toma la decisión prefiere por encima de los demás[2].

El problema parece fácil planteado en términos abstractos, pero puede ser difícil en la práctica si los objetos de Ω son complejos y ello hace complicada la descripción de la relación de preferencia $\precsim$. Las funciones de utilidad son un instrumento matemático pensado para simplificar estas cosas.

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\precsim$ si y sólo si

$$u(a) \leqslant u(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \precsim b.$$

Si la función de utilidad representa la relación de preferencia $\precsim$, entonces el problema de encontrar un ω óptimo en S se reduce al problema más tratable de encontrar un valor ω en S para el que

$$u(\omega) = \max_{s \in S} u(s).$$

3.2.1. Consumos óptimos

Econ 3.3 ⟶

Pandora cree que el alcohol es un bien deseable. Para ella, la ginebra puede sustituir al vodka perfectamente, y viceversa, y siempre está dispuesta a intercambiarlos a una tasa de 5 botellas de ginebra por 3 botellas de vodka.

Sea (g, v) la combinación de mercancías consistente en g botellas de ginebra y v botellas de vodka. Sea Ω el conjunto de todas las combinaciones posibles de este tipo. Podemos expresar las preferencias de Pandora en términos de una relación de preferencia $\precsim$. Esta relación de preferencia a

[2] Puede que una tal ω no exista, si el conjunto S es infinito. Por ejemplo, en el intervalo (0, 1) no existe el número *mayor*. No obstante, vamos a pasar por alto estas dificultades.

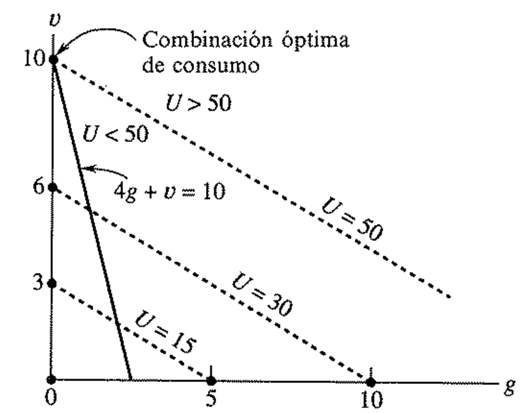


Figura 3.1. El consumo óptimo de alcohol.

menudo se representa gráficamente cómo en la Figura 3.1, dibujando sus curvas de indiferencia[3].

La relación de preferencia de Pandora puede representarse por una función de utilidad $U : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como:

$$U(g, v) = 3g + 5v.$$

Así, por ejemplo, su indiferencia entre las combinaciones (5, 0) y (0, 3) queda reflejada por el hecho que

$$U(5, 0) = U(0, 3) = 15.$$

Pandora vivió hace mucho tiempo, cuando una botella de ginebra valía 4 dólares y una botella de vodka valía 1 dólar. Disponiendo de 10 dólares para gastar en ginebra o vodka podría comprar cualquier combinación en su recta de presupuesto $4g + v = 10$. ¿Qué combinación debería comprar si se gastara los 10 dólares?

La Figura 3.1 nos muestra cómo contestar gráficamente a esta pregunta. Para resolver el problema usando la función de utilidad U, obsérvese que la utilidad de una combinación (g, v) que esté en la recta de presupuesto viene dada por

$$U(g, 10 - 4g) = 3g + 5(10 - g) = 50 - 17g.$$

Obviamente, esta expresión es máxima cuando g es lo menor posible: es decir cuando $g = 0$. Por tanto, la combinación de consumo óptima es

[3] Un conjunto de indiferencia para $\precsim$ consiste de todos los $s \in \Omega$ que satisfacen $s \sim \omega$ para un ω dado. Este conjunto es habitualmente una curva en los ejemplos más comunes usados por economistas.

(0, 10). Esto es, ella debería comprar 10 botellas de vodka y ninguna de ginebra.

3.2.2. *Una falacia*

Cuando uno se familiariza con las funciones de utilidad, se cae fácilmente en el hábito de decir que un agente prefiere a a b porque la utilidad de a es superior a la de b. Esto es inofensivo si no se toma demasiado literalmente. Pero, en el enfoque de la teoría de la utilidad que estamos discutiendo, es una *falacia* argumentar que si alguien prefiere a a b es porque la utilidad de a excede a la de b. Al contrario, puesto que $a \succ b$, se elige una función de utilidad tal que $u(a) > u(b)$.

Los economistas son muy cuidadosos en *no* afirmar que la gente tiene *realmente* generadores de utilidad en sus cabezas. Es cierto que el cerebro contiene centros de placer y de dolor, pero lo que se conoce sobre ellos no es lo suficientemente sólido para sustentar una teoría viable. Por tanto, cuando los economistas hablan de la maximización de la utilidad solamente afirman que los individuos racionales se comportan *como* si su objetivo fuera maximizar una función de utilidad. La razón para usar funciones de utilidad es simplificar las matemáticas, no proporcionar una explicación de por qué la gente hace lo que hace. En la teoría del consumo, la conducta de la gente a la hora de elegir se toma como *dada* y no se hace ningún intento por explicarla.

3.2.3. *Construcción de funciones de utilidad*

Supongamos que Pandora puede considerar cinco combinaciones de mercancías, a, b, c, d y e. Si sus preferencias son racionales, entonces las cinco combinaciones pueden ordenarse en términos de preferencia creciente. Supongamos en concreto que

$$b \prec c \sim d \prec a \prec e.$$

Entonces, si Pandora tiene que elegir en el conjunto $\{b, c, d\}$, claramente no elegirá b, pero puede elegir c o d.

Hallar una función de utilidad $U : \{a, b, c, d, e\} \to \mathbb{R}$ que represente sus preferencias es muy fácil. La combinación b es la peor. Por tanto, definamos $U(b) = 0$. La combinación e es la mejor. Por tanto, definamos $U(e) = 1$.

Seguidamente, elijamos cualquier combinación intermedia entre las combinaciones mejor y peor, b y e, y fijemos su utilidad en 1/2. En el caso de Pandora, d es una combinación intermedia adecuada entre b y e. Definamos, pues, $U(d) = 1/2$. Puesto que $c \sim d$, no tenemos otra opción que definir tambien $U(c) = 1/2$. Solamente queda la combinación a. Esta es intermedia

x	b	c	d	a	e
$U(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$V(x)$	−100	20	20	21	1.000

Figura 3.2. Construcción de funciones de utilidad.

entre d y e y, por tanto, fijamos su utilidad en 3/4, porque 3/4 es intermedio entre entre $U(d) = 1/2$ y $U(e) = 1$. Así, $U(a) = 3/4$.

Tal como muestra la tabla de la Figura 3.2, las utilidades asignadas a las combinaciones se ordenan de mayor a menor igual que las combinaciones mismas. Por tanto, al decidir, Pandora se comporta *como* si maximizara el valor de U.

Nótese que esta construcción funciona siempre, sin que importe cuántas combinaciones haya, porque entre cualquier par de números reales siempre hay otro número real. Nótese también que hay muchas otras asignaciones de utilidad que son compatibles con las preferencias de Pandora. La tercera fila de la tabla de la Figura 3.2 es un ejemplo de una función de utilidad V que representa las preferencias de Pandora tan bien como U. La comodidad matemática es el único criterio relevante al decidir cuál, de entre las muchas funciones de utilidad que representan unas preferencias, hay que usar.

3.3. La ruleta rusa

Introducimos este juego para poner de manifiesto algunas de las dificultades que hay que resolver al analizar juegos más complicados que los de los capítulos previos. Al estudiar este juego nos encontraremos por primera vez con algunas ideas importantes. Una idea especialmente valiosa es la de conjunto de información en un juego de información incompleta. No obstante podemos continuar sin problemas hasta el Capítulo 10 sin molestarnos con las propiedades formales de los conjuntos de información.

La historia que acompaña a la ruleta rusa trata de dos oficiales del ejército del Zar que compiten por los favores de una doncella moscovita. Están de acuerdo en que no es racional que ambos requieran la atención de la dama simultáneamente, pero no pueden ponerse de acuerdo en quien debería renunciar a la competición. Acaban decidiendo solucionar el asunto con el juego de la ruleta rusa. En este juego, se carga al azar una de las seis recámaras de un revólver. Entonces los dos jugadores se turnan. En cada turno, uno de los jugadores puede decidir entre acobardarse y retirarse o ponerse el revólver en la sien y disparar. Ser un cobarde o morir descalifican al jugador en la competición por la dama.

A ninguno de los dos jugadores le preocupa el bienestar del contrario y, por tanto, cada uno distingue solamente entre tres alternativas, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{W}$. La alternativa $\mathcal{L}$ significa que el jugador se mata. La alternativa $\mathcal{D}$ significa que el jugador se acobarda y tiene que esperar sentado y solo en el bar de oficiales mientras su compañero se dedica a conquistar el corazón de la doncella. La alternativa $\mathcal{W}$ significa que el jugador puede dedicarse a cortejar a la dama sin que nadie le moleste. Se supone que las preferencias del jugador i sobre el conjunto $\{\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{W}\}$ satisfacen

$$\mathcal{L} \prec_i \mathcal{D} \prec_i \mathcal{W}.$$

3.3.1. Versión 1 de la ruleta rusa

La Figura 3.3 muestra una forma de dibujar el árbol de la ruleta rusa. El acto de cargar la pistola se representa con un único movimiento al azar al principio del juego. En este nodo el azar tiene seis elecciones posibles, correspondiendo a las seis recámaras del tambor del revólver. Las recámaras se numeran del 1 al 6 de acuerdo con el orden en que corren al apretar el gatillo. El azar elige cada una de las recámaras con la misma probabilidad, de forma que la probabilidad de que la bala se encuentre en una recámara dada es 1/6.

Los segmentos que surgen de los nodos donde los jugadores toman decisiones están marcados con la letra A (por «atravesar») y la letra D (por «descender»). Decidir «descender» corresponde a acobardarse. Decidir «atravesar» corresponde a ponerse el revolver en la sien y apretar el gatillo.

Conjuntos de información. Los nodos en los que un jugador elige A o D reciben el número correspondiente a la recámara cargada con la bala. Sin embargo, en el momento de decidir si dispara o no, el jugador ignora esta información. El hecho de que el jugador no sepa en qué nodo está situado en el momento de decidir se indica incluyendo los nodos en la nube trazada con una línea quebrada en la Figura 3.3. A los conjuntos de nodos así incluidos en una nube se les llama *conjuntos de información.*

Información perfecta e imperfecta. Se dice que un juego es de *información perfecta* si cada conjunto de información contiene solamente un nodo. Ningún jugador tiene la menor duda de lo que ha pasado en el juego hasta el momento. La versión de la ruleta rusa que se ilustra en la Figura 3.3 es por tanto un juego de *información imperfecta.*

Estrategias con información imperfecta. En un juego de información imperfecta, una estrategia pura para un jugador no consiste en la elección de una acción en cada *nodo* en el que la decisión del jugador determina lo que pasa. Una estrategia pura en un juego de información imperfecta especifica solamente una acción en cada *conjunto de información* del jugador.

El par de estrategias puras (AAA, AAD) es el que se indica con doble

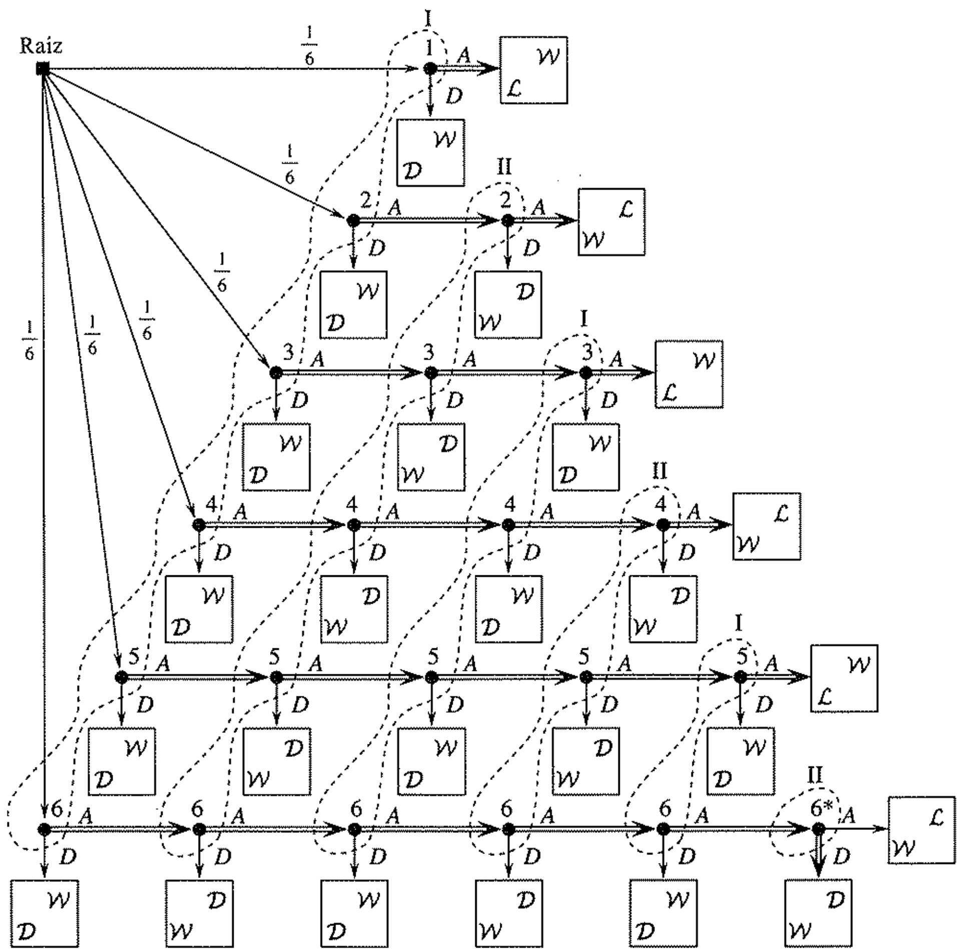


Figura 3.3. La ruleta rusa, versión 1.

trazado en la Figura 3.3. Nótese que los seis segmentos «atravesar» en el primer conjunto de información del jugador I tienen doble trazo. Es imposible que piense actuar distintamente en los distintos nudos de un conjunto de información, porque no puede distinguir los distintos nodos en el momento de tomar una decisión.

Una partida. Una vez que el jugador I elige la estrategia AAA y el jugador II elige la estrategia AAD, el curso que seguirá el juego está totalmente determinado exceptuando la decisión inicial del azar. Supongamos que el azar deposita la bala en la recámara 6. La acción del juego empieza en la raíz y procede verticalmente hacia abajo hasta el primer nodo etiquetado con un 6. Ahora le toca decidir al jugador I. Su estrategia pura le indica que debe elegir la acción A. Esto es, apretar el gatillo. Esto mueve la acción horizontalmente hasta el segundo nodo etiquetado con un 6. Aquí le corresponde moverse al jugador II. Su estrategia pura le indica que también debe jugar A, así que la acción se traslada horizontalmente al tercer nodo etiquetado con un 6. Esto sigue hasta que se alcanza el nodo 6* en la parte inferior derecha de la Figura 3.3. Puesto que el jugador II usa su estrategia AAD, ahora juega D. Esta acción termina el juego con el resultado de que el jugador I consigue $\mathcal{W}$ y el jugador II consigue $\mathcal{D}$ (que es mejor que $\mathcal{L}$, lo que habría conseguido si hubiera disparado en el nodo 6*).

Cuando se trabaja con el árbol de un juego complicado hay que tener muchas cosas en cuenta. Y al trabajar con el árbol de un juego de información imperfecta, es vital no perder de vista, al seguir el curso del juego a través del árbol, quién sabe qué. En la jugada que acabamos de considerar, usted y yo sabíamos en que recámara estaba la bala. Pero para los jugadores, se mantuvo el suspense hasta que llegaron al nodo 6*. En particular, cuando el jugador I decidió apretar el gatillo por primera vez, él no sabía que lo iba a apretar contra una recámara vacía. A pesar de que *nosotros* sabíamos que el juego se hallaba en el nodo 6, *él* pensaba que era igualmente probable que se hallara en cualquiera de los otros nodos del conjunto de información. Por tanto, él pensaba que al apretar el gatillo se estaba arriesgando. Para ser precisos, pensaba que la probabilidad de dispararse al apretar el gatillo era 1/6, puesto que ésta era la probabilidad con la que el azar coloca la bala en la recámara 1.

Subjuegos. La versión 1 de la ruleta rusa tiene solamente un subjuego propiamente dicho. La raíz de este subjuego es el nodo etiquetado 6*. Ningún otro nodo no terminal, excepto el inicial, puede servir de raíz de un subjuego. Cada uno de estos nodos pertenece con otros a un conjunto de información y no puede ser separado de éstos sin contradecir los supuestos informacionales del problema[4]. Se sigue de ello que el algoritmo de Zermelo no servirá de gran cosa para analizar esta versión de la ruleta rusa.

[4] Cuando el juego ha terminado, es necesario poder decir qué jugada ocurrió en realidad. ¡De lo contrario nadie podría decir cuál fue el resultado del juego! Pero si el juego empezara con un conjunto de información que contuviera más de un nodo, no se sabría ni siquiera cual fue el primer nodo de una jugada. Es por esto que la definición de juego insiste en que haya una *única* raíz. (En algunos casos una definición más debil nos serviría. Podríamos permitir que un juego empezara con un conjunto de información que contuviera más de un nodo si, por alguna razón, fuera posible asignar probabilidades sin ambigüedad a los distintos nodos del conjunto de información propuesto como la «primera jugada». Podríamos entonces imaginar que, antes de que el juego empezara, una primera jugada aleatoria suprimida ha seleccionado uno de los nodos en el conjunto de información considerado como «primera jugada». En este caso, esta definición menos exigente de juego permitiría considerar cada conjunto de información de la versión 1 de la ruleta rusa como la «primera jugada» de un «subjuego». Si no fuera este el caso, sería imposible construir la versión 2 de la ruleta rusa, que es un juego de información perfecta. No obstante, las ventajas de una definición menos exigente no compensan el esfuerzo de formularla cuidadosamente.)

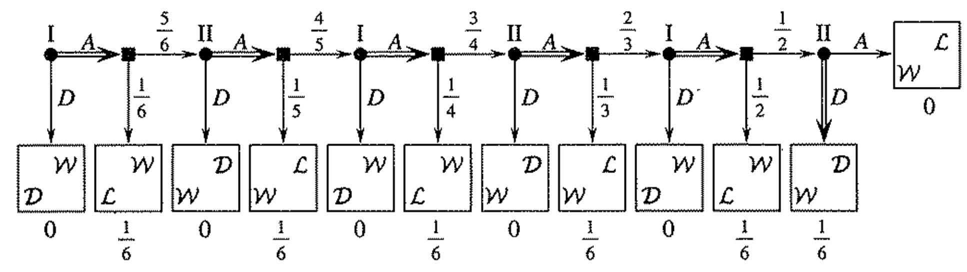


Figura 3.4. La ruleta rusa, versión 2.

3.3.2. *Versión 2 de la ruleta rusa*

La Figura 3.4 muestra una segunda forma de dibujar el árbol del juego de la ruleta rusa. Aquí no es necesario indicar conjuntos de información porque esta nueva versión es un juego de información perfecta. El precio que se paga por obtener esta simplificación es que hay que incluir seis jugadas del azar, una para cada recámara del revólver.

Una vez elegidas las estrategias puras de cada jugador, el desarrollo del juego está enteramente determinado *excepto* por las jugadas del azar. Consideremos, por ejemplo, el par de estrategias (AAA, AAD), que se indica con una doble raya en la Figura 3.4. Su uso da lugar a que los distintos nodos terminales se alcanzan con las probabilidades que se indican debajo de cada uno. Así, si se usa el par de estrategias (AAA, AAD), entonces el jugador I acaba con el resultado $\mathcal{W}$ la mitad de las veces, y con el resultado $\mathcal{L}$ las veces restantes. Por otra parte, si se usa el par de estrategias (DDD, AAD), entonces el jugador I obtiene $\mathcal{D}$ con seguridad. Si el jugador I sabe o adivina que el jugador II va a elegir AAD, ¿qué estrategia debería preferir entre AAA y DDD?

La pregunta no puede ser contestada con la información de que disponemos hasta ahora sobre las preferencias del jugador I. No basta con saber que $\mathcal{L} \prec_1 \mathcal{D} \prec_1 \mathcal{W}$. Necesitamos saber si prefiere $\mathcal{D}$ a la lotería en la que $\mathcal{W}$ ocurre con probabilidad 1/2 y $\mathcal{L}$ ocurre con probabilidad 1/2. Esto dependerá de su actitud respecto al riesgo. Si el jugador I es especialmente joven y romántico quizás preferirá la lotería. Un hombre de mediana edad como yo no considera que el premio merezca tal riesgo. No obstante, ambos estamos de acuerdo en considerar a $\mathcal{D}$ como un resultado intermedio entre $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$.

3.4. Elecciones arriesgadas

El problema que ha surgido al final de la sección anterior es el de hallar una forma matemáticamente tratable de describir las preferencias de un jugador sobre loterías que den más de dos premios.

Una aproximación ingenua al problema consiste en sustituir cada premio

Premio	$2	$4	$8	$16	...	$$2^k$	...
Sucesión de tiradas	H	TH	TTH	$TTTH$	...	$TT \ldots TH$	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$(\frac{1}{2})^k$	...

Figura 3.5. La lotería de San Petersburgo.

por su equivalente monetario[5] y calcular el valor esperado de esta nueva lotería. Una persona racional, ¿no preferiría simplemente la lotería que proporcionara la mayor esperanza en términos monetarios?

Vamos a ver con la ayuda de otra historia, también situada en los últimos días de los zares, que este enfoque no es acertado.

3.4.1. La paradoja de San Petersburgo

Mates

De acuerdo con esta historia, un casino de San Petersburgo estaba dispuesto a ofrecer cualquier tipo de lotería siempre que la dirección del casino pudiera establecer el precio de la entrada que se paga por participar.

Consideremos la lotería ilustrada en la Figura 3.5. Esta lotería puede ponerse en práctica tirando una moneda al aire repetidamente hasta que sale una cara. Si esto ocurre en el k-ésimo intento, usted gana 2^k dólares. ¿Cuánto debería usted estar dispuesto a pagar para participar en esta lotería?

Suponiendo que el resultado de cada tirada de la moneda es independiente, las probabilidades para el caso $k = 4$ se calculan como indicamos a continuación:

$$\begin{aligned} \text{prob}(TTTH) &= \text{prob}(T)\ \text{prob}(T)\ \text{prob}(T)\ \text{prob}\ (H) \\ &= (1/2)^4 = 1/16. \end{aligned}$$

Por tanto, la esperanza en dólares de la lotería de San Petersburgo, **L**, es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{L}) &= 2\ \text{prob}(H) + 4\ \text{prob}(TH) + 8\ \text{prob}(TTH) + \cdots \\ &= 2 \times 1/2 + 4 \times 1/4 + 8 \times 1/8 + \cdots \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots, \end{aligned}$$

lo que indica que la esperanza monetaria de la lotería es infinita. ¿Estaría usted, por tanto, dispuesto a liquidar su fortuna material a cambio de una

[5] La menor cantidad de dinero por la que el jugador estaría dispuesto a renunciar al premio.

entrada para esta lotería? Poca gente estaría dispuesta a hacerlo, especialmente después de observar que la probabilidad de conseguir mas de 8 dólares es tan sólo 1/8.

No estamos argumentando que elegir siempre la lotería con mayor esperanza monetaria sea irracional. Todo lo que decimos es que una teoría que sostenga que *solamente* éste es un comportamiento racional no será suficiente. Tampoco será suficiente *cualquier* teoría que pretenda ser capaz de *deducir* las actitudes de las personas respecto al riesgo de sus actitudes en situaciones seguras. Hace falta algo más sutil. Una teoría adecuada debe reconocer que el grado de riesgo que la gente desea asumir forma parte de sus preferencias de la misma manera que lo hace su deseo de comer helado o de escuchar a Beethoven.

3.4.2. Utilidades de Von Neumann y Morgenstern

Aunque la paradoja de San Petersburgo muestra que una persona racional no necesariamente desearía maximizar el valor *monetario* esperado de una lotería, Von Neumann y Morgensten dieron una lista de postulados de racionalidad sobre preferencias en situaciones de riesgo que implican que una persona racional se comporta *como* si estuviera maximizando *algo.* ¿Qué es este «algo»?

Una pista de lo que necesitamos ya apareció en el Capítulo 2. Entonces nos habíamos restringido a loterías cuyos únicos resultados surgían del conjunto $\Omega = \{\mathcal{L}, \mathcal{W}\}$. Como antes, se supondrá que $\mathcal{W} \succ \mathcal{L}$. Si una función de utilidad $u : \Omega \to \mathbb{R}$ representa esta preferencia, $u(\mathcal{L}) = a$ y $u(\mathcal{W}) = b$, siendo $a < b$.

Recuérdese que **p** denota la lotería en la que W ocurre con probabilidad p y $\mathcal{L}$ con probabilidad $1 - p$. El conjunto de loterías con premios en Ω se denotará por lot(Ω). Así **p** es un elemento del conjunto lot($\{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$). La utilidad esperada derivada de la lotería **p** viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}u(\mathbf{p}) &= pu(\mathcal{W}) + (1 - p)u(\mathcal{L}) \\ &= pb + (1 - p)a \\ &= a + p(b - a). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puesto que $b - a > 0$, se sigue que $\mathcal{E}u(\mathbf{p})$ es máxino cuando la probabilidad p de ganar es máxima.

Ahora necesitamos el primer supuesto de Von Neumann y Morgenstern sobre preferencias racionales. Es el supuesto de que, de entre dos loterías cuyos premios consisten solamente en $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$, un jugador racional preferirá siempre la que asigne mayor probabilidad a $\mathcal{W}$. Cuando se satisface este supuesto, la Ecuación (3.1) nos dice que $\mathcal{E}u$ es necesariamente una función de utilidad para las preferencias de un jugador racional sobre lot($\{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$). Esto es, un jugador racional actúa como si maximizara la utilidad esperada cuando toma decisiones sobre loterías con premios en el conjunto $\Omega = \{\mathcal{W}, \mathcal{L}\}$.

Las cosas son más complicadas cuando los premios intermedios entre $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$ también tienen que ser considerados, de forma que Ω es un conjunto mayor. Hay que hacer más supuestos de racionalidad, y deja de ser cierto que $\mathcal{E}u$ es una función de utilidad para las preferencias de un jugador racional sobre loterías siempre que u es una función de utilidad para sus preferencias sobre los premios. Si $\mathcal{E}u$ tiene que representar las preferencias de un jugador racional sobre *loterías*, en general es necesario seleccionar la función de utilidad $u : \Omega \to \mathbf{R}$ con mucho cuidado de entre las muchas utilidades que representan las preferencias del jugador sobre los *premios*. Una función de utilidad $u : \Omega \to \mathbf{R}$ seleccionada con el cuidado necesario se llama una *función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern*.

El segundo supuesto de Von Neumann y Morgenstern sobre preferencias racionales es que cada premio intermedio entre el mejor $\mathcal{W}$ y el peor $\mathcal{L}$ es equivalente a alguna lotería cuyos únicos premios son $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$. Esto es, para cada premio ω en el conjunto Ω, existe una probabilidad q tal que

$$\omega \sim \mathbf{q}.$$

Por ejemplo, si $\mathcal{W} = 100$ dólares y $\mathcal{L} = 0$ dólares, ¿cuál sería el valor de q cuando $\omega = 10$ dólares? Es poco probable que usted estuviera dispuesto a pagar 10 dólares para participar en la lotería $\mathbf{q}$, si $q = 0{,}01$. Pero puede que a usted le interesara pagar 10 dólares cuando $q = 0{,}25$. En tal caso, debe haber algun valor de q entre 0,01 y 0,25 que le deje indiferente entre participar a un coste 10 dólares y no participar.

Ahora podemos construir una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbf{R}$. Esta se define de manera que el valor $u(\omega)$ es la probabilidad q de la discusión anterior. Luego $q = u(\omega)$ se define de manera que sea cierto que el jugador racional de quien estamos hablando es indiferente entre conseguir ω con toda seguridad y conseguir la lotería en la que $\mathcal{W}$ ocurre con probabilidad $u(\omega)$ y $\mathcal{L}$ con probabilidad $1 - u(\omega)$.

Para comprobar que u es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern, es necesario confirmar que $\mathcal{E}u$ es una función de utilidad para las preferencias del jugador racional sobre las loterías. La Figura 3.6 ilustra los dos pasos en el razonamiento que justifica esta conclusión. Cada paso requiere un supuesto adicional.

El primer paso requiere el supuesto de que a un jugador racional no le importa que en una lotería un premio sea sustituido por otro que él considera equivalente al primero[6]. En la Figura 3.6, los premios disponibles en una lotería arbitraria $\mathbf{L}$ son $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Sustituimos cada premio ω_k por una lotería $\mathbf{q}_k$ que el jugador considera equivalente a ω_k. Esto es, q_k se elige tal

[6] Los críticos de la teoría olvidan con frecuencia que, si uno de los premios es una lotería, entonces se supone implícitamente que esta lotería es independiente de todas las demás loterías involucradas.

$\mathbf{L} =$

ω_1	ω_2	ω_3	$\cdots$	ω_n
p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

$\sim$

$\mathcal{W}$ | $\mathcal{L}$; q_1 | $1-q_1$	$\mathcal{W}$ | $\mathcal{L}$; q_2 | $1-q_2$	$\mathcal{W}$ | $\mathcal{L}$; q_3 | $1-q_3$	$\cdots$	$\mathcal{W}$ | $\mathcal{L}$; q_n | $1-q_n$
p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

$\sim$

$\mathcal{W}$	$\mathcal{L}$
$p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n$	$1 - (p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n)$

Figura 3.6. El razonamiento de Von Neumann y Morgenstern.

que $\omega_k \sim \mathbf{q}_k$. En la lotería compuesta que resulta, la probabilidad total de que el resultado sea W es $r = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n$. (Recordar la Figura 2.9.) El segundo supuesto necesario es que a un jugador racional no le importará que la lotería compuesta sea sustituida por la lotería simple $\mathbf{r}$[7]. Entonces será cierto que la lotería original $\mathbf{L}$ es equivalente a una lotería compuesta que a su vez es equivalente a $\mathbf{r}$.

El razonamiento muestra que, dadas dos loterías como $\mathbf{L}$, un jugador racional preferirá la que corresponde al mayor valor de r. Así, se comportará como si quisiera maximizar

$$\begin{aligned} r &= p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n \\ &= p_1u(\omega_1) + p_2u(\omega_2) + \cdots + p_nu(\omega_n) \\ &= \mathcal{E}u(\mathbf{L}). \end{aligned}$$

Se sigue que $\mathcal{E}u : \mathrm{lot}(\Omega) \to \mathbf{R}$ es una función de utilidad que representa las preferencias del jugador sobre las loterías. Luego, $u : \Omega \to \mathbf{R}$ es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern para las preferencias del jugador sobre los premios.

[7] A veces se dice que las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern miden cuánto se divierte la gente jugando. Sin embargo, este supuesto que permite reducir loterías compuestas a simples muestra claramente que este no es el caso. Los jugadores que disfrutan del *desarrollo* del juego en sí mismo presumiblemente preferirán la lotería compuesta a la simple que le es equivalente.

3.4.3. Aversión al riesgo

¿Cómo se enfrenta la teoría de Von Neumann y Morgenstern a la paradoja de San Petersburgo?

Consideremos una persona racional cuya utilidad para el dinero viene dada por una función[8] de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = 4\sqrt{x}. \tag{3.2}$$

Su utilidad esperada para la lotería de San Petersburgo **L** de la Figura 3.5 es

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}u(\mathbf{L}) &= \frac{1}{2}u(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u(2^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 u(2^3) + \cdots \\
&= 4\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{2^3} + \cdots\right\} \\
&= 4\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots\right\} \\
&= \frac{4}{1 - 1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 4 \times 3{,}42.
\end{aligned}$$

El jugador será indiferente entre la lotería **L** y una cantidad de dinero X si y sólo si sus utilidades son las mismas. Luego, X dólares es el equivalente en dólares de la lotería si y sólo si

$$\begin{aligned}
u(X) &= \mathcal{E}u(\mathbf{L}) \\
4\sqrt{X} &\approx 4 \times 3{,}42 \\
X &\approx (3{,}42)^2 = 11{,}70.
\end{aligned}$$

Así, 11,70 dólares es la cantidad máxima que el jugador pagará por participar en la lotería de San Petersburgo.

[8] El conjunto $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geqslant 0\}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos. Las siguientes observaciones serán útiles para seguir lo que viene a continuación:

1. $\sqrt{a^n} = (a^n)^{1/2} = a^{n/2} = (\sqrt{a})^n$;
2. $\sqrt{b/b} = 1/\sqrt{b}$;
3. Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica $1 + r + r^2 + \cdots$ tiene una suma finita. Su suma s satisface $s = 1 + r + r^2 + \cdots = 1 + r(1 + r + \cdots) = 1 + rs$ y, por tanto, $s = 1/(1 - r)$.

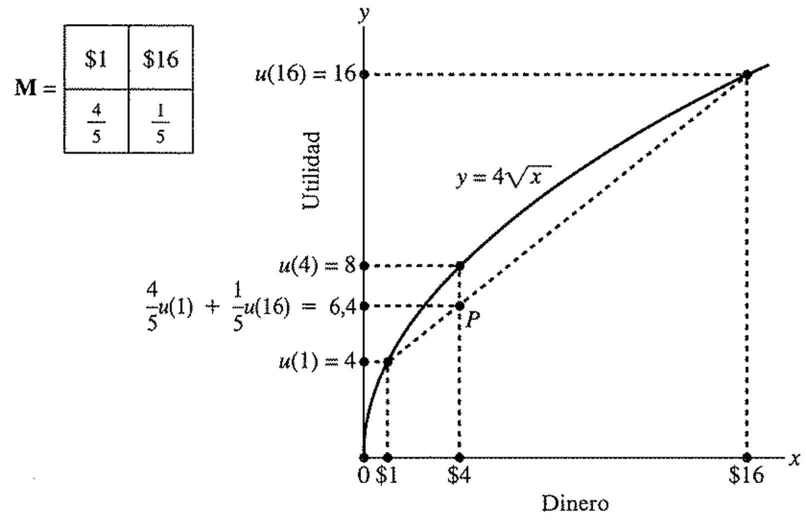


Figura 3.7. Una lotería con una esperanza en dólares igual a 4 dólares.

La lotería **M** de la Figura 3.7 es más simple que la lotería de San Petersburgo. Un jugador cuyas preferencias están representadas por la función de utilidad raíz cuadrada de (3.2) asignará a esta lotería una utilidad de

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}u(\mathbf{M}) &= \frac{4}{5}u(1) + \frac{1}{5}u(16) \\
&= \frac{4}{5} \times 4\sqrt{1} + \frac{1}{5} \times 4\sqrt{16} \\
&= \frac{16}{5} + \frac{16}{5} = 6{,}4.
\end{aligned}$$

La esperanza de la lotería **M** *en dólares* es

$$\mathcal{E}\mathbf{M} = \frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 16 = 4.$$

El gráfico a la derecha de la Figura 3.7 ilustra el hecho que el jugador prefiere obtener 4 dólares con seguridad a participar en la lotería **M**. Algebraicamente, la condición es que $u(4) > \mathcal{E}u(\mathbf{M})$. Esta desigualdad se satisface porque $u(4) = 4\sqrt{4} = 8$ y $\mathcal{E}u(\mathbf{M}) = 6{,}4$.

Una persona que siempre está dispuesta a vender la oportunidad de participar en una lotería con premios monetarios por una cantidad igual a

Cóncava = averso al riesgo | Afín = neutral al riesgo | Convexa = amante del riesgo

Figura 3.8. La forma de las funciones de utilidad determina las actitudes hacia el riesgo.

su valor esperado en dólares se dice que es *aversa al riesgo* con el dinero. Una persona que siempre estaría dispuesta a comprar la oportunidad de participar en una lotería por una cantidad igual a su valor esperado en dólares se dice que es *amante del riesgo.* Una persona que siempre es indiferente entre comprar y vender se dice que es *neutral al riesgo* (o *riesgo-neutral*).

La Figura 3.8 ilustra los gráficos de funciones de utilidad que representan, respectivamente, preferencias aversas al riesgo, neutrales al riesgo y amantes del riesgo. Como vimos en la Figura 3.7, una cuerda dibujada en el gráfico de una función de utilidad de una persona aversa al riesgo está por debajo de, o toca, el gráfico. Los matemáticos llaman *cóncava* a una función de estas características[9]. Y llaman *convexa* a una función cuyas cuerdas se encuentran por encima de, o tocando, el gráfico. Una persona con una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern convexa es amante del riesgo.

Una función cuyo gráfico es una recta se dice que es afín. Una función afín es simultáneamente cóncava y convexa (aunque no es *estrictamente* cóncava o *estrictamente* convexa). Por tanto, una persona con una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern afín es neutral al riesgo[10]. El o ella siempre es indiferente entre comprar o vender una lotería por una

[9] Una función diferenciable u es cóncava en un intervalo I si y sólo si su derivada u' decrece en I. Los economistas se refieren a $u'(x)$ como la *utilidad marginal*. Un jugador averso al riesgo tiene utilidad marginal decreciente para el dinero. Cada dólar extra vale menos que el anterior, para un jugador de estas características.

Una función diferenciable es decreciente en I si y sólo si $u'(x) \leqslant 0$ para cualquier x de I. Si u es dos veces diferenciable, es cóncava en I si y sólo si $u''(x) \leqslant 0$ para cualquier x de I. En el caso $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = 1/2x^{-1/2} > 0$, para $x > 0$, y u es (estrictamente) creciente en $\mathbf{R}_+$. Además, $u''(x) = -1/4x^{-3/2} < 0$, para $x > 0$, y u es (estrictamente) cóncava en $\mathbf{R}_+$.

Una función es convexa en I si y sólo si $-u$ es cóncava en I. Luego, un criterio para que una función u sea convexa en I es que $u''(x) \geqslant 0$ cuando x pertenece a I.

[10] Ya que el gráfico de una función afín es una línea recta, a veces se denominan «lineales». Por ello, los jugadores neutrales al riesgo se dice a veces que tienen preferencias «lineales en dinero».

cantidad en dólares igual a su valor esperado en dólares, y por tanto es simultáneamente amante del riesgo y averso al riesgo. Como explicaremos en la próxima sección, normalmente desearíamos escoger la escala de utilidad de un jugador neutral al riesgo de manera que sus preferencias sobre el dinero se expresaran por la simple función de utilidad $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definida por

$$u(x) = x.$$

La falacia que hace parecer paradójica la historia de San Petersburgo es que una persona racional sea necesariamente neutral al riesgo. Este puede ser el caso o puede no serlo. Una persona racional que resulta ser neutral al riesgo, o amante del riesgo, estará dispuesta a pagar cualquier cosa por participar en la lotería de San Petersburgo. Sin embargo, como hemos visto, una persona que es lo bastante aversa al riesgo no será tan imprudente. En particular, una persona cuya función de utilidad es la raíz cuadrada solamente pagará 11,70 dólares por participar[11].

3.5. Escalas de utilidad

Mates 3.5.2 ⟶

La condición para que $u : \Omega \to \mathbf{R}$ sea una función de utilidad que representa una relación de preferencia $\preceq$ definida en el conjunto Ω es que $a \preceq b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u(a) \leqslant u(b)$ para cada a y b en Ω. Ya que $u(a) \leqslant u(b) \Leftrightarrow (u(a))^3 \leqslant (u(b))^3$, se sigue que la función $v : \Omega \to \mathbf{R}$ definida por $v(s) = (u(s))^3$ también es una función de utilidad para $\preceq$.

Análogamente, $u(a) \leqslant u(b) \Leftrightarrow 2u(a) + 5 \leqslant 2u(b) + 5$. Luego la función $\omega : \Omega \to \mathbf{R}$ definida por $\omega(s) = 2u(s) + 5$ es otra función de utilidad para $\preceq$. Cualquiera de estas funciones de utilidad, y otras muchas, son representaciones igualmente buenas de la relación de preferencia $\preceq$ sobre Ω.

La misma libertad no se da al elegir una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbf{R}$. Es cierto que $(\mathcal{E}u)^3$ y $2(\mathcal{E}u) + 5$ representan las preferencias de un jugador racional sobre loterías tan bien como $\mathcal{E}u$, cuando u es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern. También es cierto que u^3 representa las preferencias de un jugador racional sobre *premios* tan bien como u. Pero es falso en general que u^3 es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern. Es decir, no es cierto en general que $\mathcal{E}(u^3)$ representa las preferencias de un jugador racional sobre loterías.

Pero sí es cierto que $2u + 5$ es necesariamente una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern, siempre que lo sea u. Esto es así porque,

[11] Esto sólo desmonta una forma de la paradoja de San Petersburgo. Otras formas aparecen si se aceptan funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern *no acotadas* (Ejercicio 3.7.21). Sin embargo, no necesitamos preocuparnos de estas formas recónditas de la paradoja porque nosotros casi siempre trabajaremos sólo con un número *finito* de premios posibles.

para cualesquiera constantes $A > 0$ y B, siempre se cumple que $\mathcal{E}(Au + B) = A\mathcal{E}u + B$. De aquí que maximizar $\mathcal{E}u$ sea lo mismo que maximizar $\mathcal{E}(Au + B)$ (cuando $A > 0$).

3.5.1. Transformaciones afines

La función $Au + B$ se dice que es una transformación[12] afín estrictamente creciente de u. El siguiente teorema dice que sólo transformaciones afines estrictamente crecientes de una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern pueden ser funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern para la misma relación de preferencia.

Teorema 3.5.1. Supongamos que $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern para la relación de preferencia $\precsim$ definida en lot(Ω). Entonces existen constantes $A > 0$ y B tales que

$$u_2 = Au_1 + B.$$

Demostración. Escojamos constantes $A_i > 0$ y B_i de manera que las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $U_i = A_i u_i + B_i$ satisfagan $U_i(\mathcal{L}) = 0$ y $U_i(\mathcal{W}) = 1$. Consideremos cualquier premio ω de Ω y escojamos q tal que $\omega \sim \mathbf{q}$. Entonces

$$U_i(\omega) = \mathcal{E}\,U_i(\mathbf{q}) = qU_i(\mathcal{W}) + (1 - q)U_i(\mathcal{L}) = q.$$

Luego $A_1u_1(\omega) + B_1 = A_2u_2(\omega) + B_2$. Se sigue el teorema al resolver esta ecuación para $u_2(\omega)$. □

3.5.2. Escalas de temperatura

El Teorema 3.5.1 muestra que el origen y la unidad de una escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern se pueden escoger de forma arbitraria,

[12] La terminología usada en este contexto puede inducir a confusión. Como hemos dicho antes, algunos autores se refieren a la función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = Ax + B$ como una función «lineal» porque su gráfico es una línea recta. Pero este uso es inconsistente con el uso que los matemáticos dan a la palabra «lineal» en álgebra lineal. Este requiere que una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaga $f(x) = Ax$. A veces se dice que f es una función afín «positiva» (porque $A > 0$). Sin embargo, la definición natural de función positiva simplemente requiere que sólo tome valores positivos. Otros autores insisten en llamar «lineal» a cualquier función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Con ello no quieren decir que u tenga necesariamente como gráfico una recta. Quieren decir que $\mathcal{E}u$ se obtiene a partir de u por medio del operador lineal $\mathcal{E}$. Es cierto que $\mathcal{E}$ es un operador lineal en sentido matemático estricto, pero esto no parece una excusa adecuada para introducir una terminología tan confusionista.

pero no existe más margen de maniobra. Al introducir esta idea, Von Neumann y Morgenstern hicieron una comparación esclarecedora con la medida de las temperaturas.

La escala centígrada, o de Celsius, asigna 0 °C al punto de congelación del agua a una presión atmosférica dada, y 100 °C a su punto de ebullición. Una vez que se han escogido estos valores, el valor centígrado para todas las demás temperaturas queda determinado. La escala Fahrenheit asigna 32 °F al punto de congelación del agua y 212 °F a su punto de ebullición. Aquí también, escogidos estos valores, el valor Fahrenheit para todas las demás temperaturas queda determinado. Obsérvese que la temperatura Fahrenheit f es una función afín estrictamente creciente de la temperatura centígrada c. En concreto,

$$f = \frac{9}{5}c + 32.$$

Se puede establecer una escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de forma similar. Hallada una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, se puede recalibrar la escala que define de la siguiente manera. Elijamos un resultado ω_0 de Ω que corresponda al origen de la nueva escala de utilidad. Elijamos otro resultado ω_1 de Ω con $\omega_1 \succ \omega_0$ para definir la unidad de la nueva escala. Ahora busquemos una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $U : \Omega \to \mathbb{R}$ para la cual $U(\omega_0) = 0$ y $U(\omega_1) = 1$.

Por el Teorema 3.5.1, $U = Au + B$. Estos A y B han de ser escogidos para que satisfagan las ecuaciones

$$0 = Au(\omega_0) + B$$
$$1 = Au(\omega_1) + B.$$

Los valores de A y B que resuelven este par de ecuaciones no son importantes. Lo que sí lo es es que las ecuaciones tienen una solución y que ello permite fijar siempre una nueva escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern con origen y unidad arbitrarios[13].

[13] Una propiedad *ordinal* de una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una propiedad invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes. Esto es, para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente, la compuesta $f \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ retiene esta propiedad necesariamente. La función compuesta $f \circ u$ se define por $f \circ u(s) = f(u(s))$.

Una propiedad *cardinal* es una propiedad invariante bajo transformaciones *afines* estrictamente crecientes. Esto es, para cualesquiera $A > 0$ y B, la función $Au + B$ retiene la misma propiedad necesariamente. La propiedad de definir una escala de temperatura es por tanto cardinal, como lo es la de ser una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa una relación de preferencia dada $\leqslant$. La propiedad de ser una mera función de utilidad que representa $\leqslant$ es ordinal.

El interés por estos términos es en gran parte histórico, y proviene de una época en la que los economistas creían que la idea de una función de utilidad cardinal carecía de sentido intrínsecamente.

3.5.3. La comparación de útiles

La unidad de una escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern se llama a veces un *útil*, de la misma forma que la unidad de una escala de temperatura se llama un grado. Al usar esta terminología hay que evitar algunas falacias. De éstas, la más importante desde el punto de vista de la teoría de juegos es la que asume que los útiles del jugador I se pueden comparar directamente con los útiles de la jugadora II.

Ya que el origen y la unidad de una escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern son arbitrarios, debe ser evidente que declarar que el útil de un jugador «vale» lo mismo que el de otro tiene tan poco sentido como decir que dos habitaciones están igualmente calientes por que las temperaturas son las mismas (sin haber comprobado previamente que los termómetros en ambas habitaciones usan la misma escala de temperaturas).

Con esto no queremos decir que la comparación de útiles no tenga sentido *intrínsecamente*, sino únicamente que la teoría de Von Neumann y Morgenstern no proporciona base alguna para hacerlo.

3.6. El noble Savage

Esta sección no va de buenos salvajes a la Rousseau*. Aquí discutiremos brevemente de qué forma el estadístico Savage reelaboró la teoría de Von Neumann y Morgenstern para incluir una descripción de cómo una persona que toma decisiones racionales debe organizar sus creencias en situaciones en las que no están especificadas probabilidades objetivas.

3.6.1. La paradoja de Allais

Hay que decir, en primer lugar, que la teoría de Von Neumann y Morgenstern tiene sus críticos. El economista Allais se ha destacado en este aspecto. Su intervención en una conferencia pronunciada por Savage ha sido citada muchas veces.

Econ 3.7 ⟶

Allais preguntó a Savage cuáles eran sus preferencias sobre determinadas loterías, y demostró entonces que las preferencias de Savage eran inconsistentes con los principios de racionalidad de Von Neumann y Morgenstern. La moraleja que se quería extraer de ello es que si un archidefensor de la teoría, como Savage, no respeta los principios de racionalidad, quién lo hará?

El argumento de Allais se puede ilustrar con las cuatro loterías de la Figura 3.9. Los premios en el conjunto $\Omega = \{\$0m, \$1m, \$5m\}$ se dan en millones de dólares para dramatizar la situación.

* Esto es una referencia al juego de palabras inducido por la palabra inglesa *savage*, que se puede traducir por salvaje. (*N. del T.*)

J =

$0m	$1m	$5m
0	1	0

K =

$0m	$1m	$5m
0,01	0,89	0,10

L =

$0m	$1m	$5m
0,89	0,11	0

M =

$0m	$1m	$5m
0,9	0	0,1

Figura 3.9. Loterías para la paradoja de Allais.

Como Savage, la mayoría de la gente expresa la preferencia $\mathbf{J} \succ \mathbf{K}$ porque **J** asegura $1m mientras **K** parece comparativamente poco atractiva por el riesgo de no conseguir nada. De nuevo como Savage, mucha gente expresa la preferencia $\mathbf{M} \succ \mathbf{L}$. Aquí el riesgo de no conseguir nada en absoluto no puede ser evitado. Por el contrario, el riesgo de este resultado final es alto en ambos casos. Sin embargo, si la probabilidad 0,89 en **L** se redondea a 0,9 y 0,11 se redondea a 0,1, entonces cualquiera que entienda de qué va la cosa preferirá **M** a la nueva **L**. Si se piensa que la nueva **L** es esencialmente la misma que la antigua **L**, existe por tanto una razón para preferir **M** a la vieja **L**.

Las preferencias $\mathbf{J} \succ \mathbf{K}$ y $\mathbf{M} \succ \mathbf{L}$ son inconsistentes con los supuestos de racionalidad de Von Neuman y Morgenstern. Si no fuera así, se podrían describir con una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Pero el razonamiento siguiente muestra que ello no es posible.

En una escala de utilidad, dos puntos se pueden fijar de forma arbitraria. En este caso nos interesa fijar $u(0) = 0$ y $u(5) = 1$. ¿Qué podemos decir ahora acerca del valor de Savage para $x = u(1)$? Observemos que

$$\mathcal{E}u(\mathbf{J}) = u(0) \times 0{,}0 + u(1) \times 1{,}0 + u(5) \times 0{,}0 = x$$
$$\mathcal{E}u(\mathbf{K}) = u(0) \times 0{,}01 + u(1) \times 0{,}89 + u(5) \times 0{,}10 = 0{,}89x + 0{,}10.$$

Ya que $\mathbf{J} \succ \mathbf{K}$, debe ser por tanto verdad que

$$x > 0{,}89x + 0{,}10$$
$$x > 10/11.$$

Por otra parte,

$$\mathcal{E}u(\mathbf{L}) = u(0) \times 0{,}89 + u(1) \times 0{,}11 + u(5) \times 0{,}0 = 0{,}11x$$
$$\mathcal{E}u(\mathbf{M}) = u(0) \times 0{,}9 + u(1) \times 0 + u(5) \times 0{,}10 = 0{,}10.$$

Ya que $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, debe ser cierto que

$$0{,}11x < 0{,}10$$
$$x < 10/11.$$

Pero no puede ser simultáneamente cierto que $x > 10/11$ y $x < 10/11$. Por tanto las preferencias de Savage son inconsistentes con los postulados de racionalidad de Von Neumann y Morgenstern.

¿Deberíamos concluir a partir de este ejemplo que los postulados de Von Neumann y Morgenstern no son aceptables como principios de racionalidad? Si fuera así, también deberíamos concluir, a partir del hecho de que grandes matemáticos cometen errores aritméticos elementales, que las leyes de la aritmética no acaban de funcionar. Esta fue, esencialmente, la respuesta de Savage a Allais. Una vez que le habían señalado sus inconsistencias, Savage confesó que había cometido un error y procedió a corregir sus preferencias.

3.6.2. *Racionalidad bayesiana*

Filo 3.7 ⟶

En las loterías que hemos discutido hasta ahora, las probabilidades venían dadas de antemano. Se sobreentendía que éstas eran probabilidades objetivas.

Por ejemplo, si uno sospecha que un par de dados están trucados, se pueden lanzar, digamos, 3.600 veces. Si los dados no son tramposos, un par de unos debería aparecer sobre unas 100 veces, porque la probabilidad de un par de unos en una tirada es 1/36. Sin embargo, si el par de unos solamente aparece 10 veces en 3.600 tiradas, entonces hay que ser realmente muy confiado para no rechazar la hipótesis de que los dados no están trucados, porque la evidencia sugiere que la probabilidad de sacar un par de unos en una tirada es aproximadamente 1/360.

Cuando se dispone de un gran número de datos, como en el ejemplo anterior, estamos autorizados a hablar de probabilidades *objetivas*. Sin embargo, en muchas ocasiones sería deseable poder hablar de la teoría de Von Neumann y Morgenstern en situaciones en las que no se dispone de probabilidades objetivas.

Supongamos, por ejemplo, que John tiene una cita con Mary, pero ella no aparece a la hora fijada. ¿Cuánto tiempo debería esperar John antes de llegar a la conclusión que le han dado plantón? Si esta es la primera vez, no tendrá datos para saberlo. Con todo, él ha de llegar a alguna conclusión.

Se puede simplificar la situación distinguiendo únicamente entre dos sucesos que John ha de considerar. El primer suceso E es que Mary finalmente aparecerá, si la espera. El segundo suceso F es que ella le ha dado plantón y, por tanto, la estará esperando en vano. Si la espera y finalmente aparece, obtiene el premio $\mathcal{W}$. Si la espera y no aparece, su premio es $\mathcal{L}$. También dispone de la opción de abandonar y marcharse a casa. A esta opción corresponde otro premio $\mathcal{D}$. ¿Prefiere el premio $\mathcal{D}$, o la lotería en la que consigue $\mathcal{W}$ si ocurre E y $\mathcal{L}$ si ocurre F?

Savage ofreció una lista de postulados para las preferencias que podemos esperar de una persona racional en estas circunstancias. Savage demostró que una persona que cumple estos postulados tomará decisiones *como* si maximizara una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbb{R}$ relativa a alguna medida de probabilidad $\text{prob} : \Omega \to \mathbb{R}$. Así, si John es racional, escogerá entre el mayor de los valores $u(\mathcal{D})$ y

$$u(\mathcal{W})\text{prob}(E) + u(\mathcal{L})\text{prob}(F).$$

La elegancia de la teoría de Savage reside en que permite caracterizar a quien toma decisiones racionales simplemente en términos de sus gustos y creencias. Los gustos de John se resumen en la función de utilidad $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Sus creencias quedan resumidas en la medida de probabilidad $\text{prob} : \Omega \to \mathbb{R}$. Los números prob($E$) y prob($F$) se llaman probabilidades *subjetivas*. Esto subraya que nadie está afirmando que las probabilidades de John están reflejando necesariamente datos objetivos sobre el mundo. Lo único que se afirma es que, cuando John no se comporte como si sus creencias estuvieran resumidas por estas probabilidades subjetivas, entonces será necesariamente inconsistente en la forma de tomar decisiones. En particular, sería vulnerable porque podrían escribir un *libro holandés* en su contra. Esto significa que alguien podría proponer un sistema de apuestas en el que John participaría voluntariamente, pero que asegura que John está condenado a terminar perdiendo en todos los casos. Un libro holandés, por tanto, es el equivalente en apuestas a la máquina de hacer dinero con la que se defendió la idea de preferencias transitivas en la Sección 3.1.1.

Por supuesto, ser racional consiste en mucho más que en simplemente ser consistente en la forma de tomar decisiones. Por esta razón, una persona que no viola los postulados de Savage al tomar decisiones se dice que es racional *bayesiano*. Este nombre no es muy apropiado. La teoría en sí misma ciertamente tiene poco que ver con Thomas Bayes, cuya regla mencionamos en la Sección 2.1.4. Sin embargo, es cierto que para una persona racional bayesiana la regla de Bayes será a menudo útil; por ello la terminología no está completamente fuera de lugar.

Savage subrayó que sólo era previsible que sus postulados de racionalidad se cumplieran bajo ciertas condiciones. Hablando de un modo no formal, Savage afirmó que para una persona racional, ser consistente solamente tiene sentido si ha tenido la oportunidad de considerar cuáles serían sus actitudes bajo *todas* las contingencias que se pueden llegar a dar. Savage llamó a esta restricción en el campo de aplicación de su teoría la hipótesis del *pequeño mundo*. Solamente cuando el número de posibilidades es lo bastante pequeño, podrá alguien, en la práctica, evaluar por adelantado las implicaciones de cualquier cosa que pueda concebiblemente llegar a pasar.

Ni siquiera añadiendo esta condición está todo el mundo de acuerdo en que los postulados de Savage tengan sentido. Allais es uno de los que critica el *principio de lo seguro* de Savage. En el problema de John, por ejemplo, supongamos que a John le gusta el resultado D por lo menos tanto como el resultado L. Entonces el principio de lo seguro implica que si el premio L en la «lotería» que obtiene cuando decide esperar es sustituido por D, entonces debe preferir la nueva lotería así obtenida a la vieja[14]. Puede parecer difícil enfrentarse a este principio de racionalidad. Sin embargo, como vimos en la Sección 3.6.1, las cosas se hacen más problemáticas cuando los premios son loterías.

Al elegir material para este libro mi objetivo ha sido no incluir material controvertido. Sin embargo, no existe manera de escribir un libro de teoría de juegos sin asumir la racionalidad bayesiana. En mi opinión, críticas como las de Allais no deberían dirigirse contra la plausibilidad de los supuestos de racionalidad de Savage, sino contra la plausibilidad de tratar a la gente ordinaria como si tomaran decisiones de forma consistente cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre. Por otra parte, los críticos que atacan los supuestos de racionalidad en cuanto supuestos de racionalidad están habitualmente respondiendo a algunas de las afirmaciones más exageradas de «bayesianos ingenuos» que no consideran necesario respetar la restricción de Savage del pequeño mundo.

Los especialistas en teoría de juegos pueden, afortunadamente, escoger un camino intermedio. Pueden estar de acuerdo con Allais en que las personas reales no son normalmente racionales bayesianas, pero que la teoría de juegos se ocupa de situaciones en las que se comportan como si lo fueran. Tampoco necesitan simpatizar con los bayesianos ingenuos. La hipótesis del pequeño mundo de Savage se cumple automáticamente dentro de los estrechos confines de un juego. No es fácil, por tanto, atacar con éxito el uso que los especialistas hacen de la teoría de juegos. No lo es, por lo menos, mientras resistan a la tentación de salirse de su propio campo.

3.7. Ejercicios

Mates 1. Si $\preceq$ es una relación de preferencia racional en el sentido de la Sección 3.1, demostrar que una y sólo una de las siguientes cosas se cumple

$$a \prec b, \quad a \sim b, \quad a \succ b.$$

[14] Puede ser útil volverse a leer la Sección 3.4.2 con la idea de localizar dónde se usó el principio de lo seguro al derivar las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern.

Mates 2. Demostrar que cualquier relación de preferencia racional es reflexiva. Esto es, para cualquier a del conjunto Ω, $a \preceq a$.

Mates 3. Si $\preceq$ es una relación de preferencia racional y si $\sim$ es la relación de indiferencia asociada, demostrar que $\sim$ satisface la totalidad y la transitividad. Demostrar que la relación de estricta preferencia asociada $\prec$ sólo satisface la transitividad.

Mates 4. Si $\preceq$ es una relación de preferencia racional, demostrar que

$$a \prec b \quad \text{y} \quad b \preceq c \quad \Rightarrow \quad a \prec c.$$

5. El comité (formado por tres miembros, I, II y III) de un club determina por votación sus preferencias colectivas sobre tres candidatos (A, B y C) a ser miembros del club. Las preferencias individuales de los miembros del comité son $A \prec_1 B \prec_1 C$, $B \prec_2 C \prec_2 A$ y $C \prec_3 A \prec_3 B$. Así pues, en una votación sobre quién entre A y B ha de ser escogido, ganará B porque conseguirá dos votos, mientras A sólo consigue uno. Demostrar que las preferencias colectivas obtenidas de esta forma no son transitivas[15].

Econ 6. Resolver el problema de optimización de Pandora de la Sección 3.2.1 en el caso en que $U : \Omega \to \mathbf{R}$ está definida por:
a) $U(g, v) = gv$. *b)* $U(g, v) = g^2 + v^2$.

Econ 7. Construir dos funciones de utilidad distintas que representen las preferencias

$$a \sim b \prec c \prec d \prec e \sim f.$$

Econ 8. Pandora sólo puede comprar ginebra y vodka en una de las cuatro combinaciones siguientes: $A = (1, 2)$, $B = (8, 4)$, $C = (2, 16)$ o $D = (4, 8)$. Al comprar, siempre dispone exactamente de 24 dólares para gastarse. Si la ginebra y el vodka se venden ambos a 2 dólares la botella, Pandora a veces compra la combinación B y a veces compra la combinación D. Si la ginebra se vende a 4 dólares la botella y el vodka a 1 dólar la botella, entonces siempre compra la combinación C. Hallar una función de utilidad $U : \{A, B, C, D\} \to \mathbf{R}$ consistente con esta conducta.

9. Las preferencias de una persona racional cumplen $\mathcal{L} \prec \mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}_2 \prec \mathcal{W}$. La persona considera $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ como equivalentes en algunas loterías cuyos únicos premios son $\mathcal{L}$ y $\mathcal{W}$. Las loterías apropiadas aparecen en la Figura 3.10. Hallar una función de Von Neumann y Morgenstern que represente estas preferencias. Usar esto para determinar

[15] A veces se hace referencia a este fracaso aparente de la «racionalidad colectiva» hablando de la «paradoja de la votación».

$\mathcal{D}_1 \sim$

$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$
0,6	0,4

$\mathcal{D}_2 \sim$

$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$
0,2	0,8

$\mathbf{L} =$

$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{W}$
0,25	0,25	0,25	0,25

$\mathbf{M} =$

$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{W}$
0,20	0,15	0,50	0,15

Figura 3.10. Loterías para el Ejercicio 3.7.9.

las preferencias de la persona entre las loterías **L** y **M** de la Figura 3.10.

10. Las preferencias sobre el dinero de una persona están representadas por una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = x^a$. ¿Qué implicaría sobre las preferencias de esta persona que $a < 0$? ¿Qué implicaría que $a = 0$? Explicar por qué la persona es aversa al riesgo si $0 \leqslant a \leqslant 1$ y amante del riesgo si $a \geqslant 1$.

    Si $a = 2$, explicar por qué la persona pagaría \$1m por la oportunidad de participar en la lotería **K** de la Figura 3.9. ¿Cuál es el equivalente en dólares para esta persona de la lotería **K**?

11. La función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de Pandora se elige de forma que $u(\$0) = 0$ y $u(\$10) = 1$.
    a) Si Pandora es aversa al riesgo, explicar por qué $u(\$1) \geqslant 0{,}1$ y $u(\$9) \geqslant 0{,}9$.
    b) En una lotería **L**, se dispone de los premios \$0, \$1, \$9 y \$10 con probabilidades 0,4, 0,3, 0,2 y 0,1, respectivamente. En una segunda lotería **M** se dispone de los mismos premios con probabilidades respectivas 0,5, 0,2, 0,1 y 0,2. Explicar por qué una Pandora aversa al riesgo violaría los axiomas de racionalidad de Von Neumann y Morgenstern si expresara la preferencia $\mathbf{L} \prec \mathbf{M}$.

Mates

12. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern y **L** es una lotería, explicar por qué es cierto que

$$\mathcal{E}\big(Au(\mathbf{L}) + B\big) = A\mathcal{E}u(\mathbf{L}) + B$$

13. ¿Cuál es la temperatura Fahrenheit cuando la temperatura Celsius es 20 °C? ¿Cuál es la temperatura centígrada cuando la temperatura Fahrenheit es −10 °F?

Econ

14. Intercambiar los premios de \$0m y \$5m en las loterías de la Figura 3.9. ¿Continúan siendo inconsistentes las preferencias originales de Savage?

15. Las reglas de la ruleta de Gale del Ejercicio 2.6.23 se cambian de forma que ahora el perdedor debe pagar al ganador una cantidad en dólares igual a la diferencia entre sus resultados. Si ambos jugadores son neutrales al riesgo sobre el dinero, explicar por qué se despreocuparán de las elecciones que hagan en el juego. (Véase Ejercicio 2.6.24.)

16. En la versión de la ruleta de Gale del Ejercicio 3.7.15, las preferencias del jugador I se alteran de manera que su utilidad para el dinero queda descrita por la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_1(x) = 3^x$. Designemos el suceso que el jugador I escoge la rueda i y la jugadora II escoge la rueda j por $(\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j)$. Hacer una lista con los seis posibles sucesos de este tipo. Para cada uno de estos sucesos, hallar la esperanza en dólares del jugador I, así como la utilidad que éste asigna a conseguir una cantidad en dólares igual a su esperanza. Hallar también la utilidad esperada del jugador I para cada uno de estos sucesos.

    ¿Es averso al riesgo el jugador I? Supongamos que la utilidad del dinero de la jugadora II viene descrita por la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $\phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_2(x) = -3^{-x}$. ¿Es aversa al riesgo?

Econ

17. Una asociación benéfica organiza una feria para recaudar fondos, pero la organizadora está preocupada por la posibilidad de que llueva el día del evento, lo cual ocurrirá con probabilidad p. Por tanto, considera la posibilidad de coger un seguro contra la lluvia. Su utilidad de Von Neumann y Morgenstern sobre el dinero, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$ para todo x. ¿Por qué ella prefiere más dinero que menos? ¿Por qué es estrictamente aversa al riesgo? ¿Por qué es u' estrictamente decreciente?

    Si el día del evento es soleado, la asociación recogerá y dólares. Si llueve, solamente recogerá z dólares. La compañía de seguros ofrece cobertura total contra la pérdida potencial de $(y - z)$ dólares en caso de lluvia por una cuota de M dólares, pero la organizadora puede escoger una cobertura parcial en la que paga una fracción f de la cuota. Esto significa que ella paga Mf dólares antes de celebrarse el evento y que la compañía pagará a su vez 0 dólares si el día es soleado y $(y - z)$ si llueve. (Para simplificar las cosas no hay que hacer la hipótesis realista de que f ha de limitarse a $0 \leqslant f \leqslant 1$.)

    a) ¿Cuál es la esperanza en dólares de la compañía de seguros si la organizadora paga la cuota entera?
    b) ¿Por qué la organizadora escoge f de manera que maximice

$(1 - p)u(y - Mf) + pu(z + (y - z)f - Mf)$? ¿Qué se obtiene cuando se diferencia esta expresión respecto a f?

c) Demostrar que la organizadora pagará la cuota entera ($f = 1$) si el contrato del seguro firmado con la compañía es «justo».

d) Demostrar que el contrato del seguro es «justo» si la organizadora paga la cuota entera.

e) Si el contrato es «injusto» con $M > p(y - z)$, demostrar que la organizadora con toda seguridad paga menos del seguro total ($f < 1$).

f) ¿Qué pensaría la organizadora acerca de firmar un contrato «justo» si fuera neutral al riesgo?

Fun

18. Un multimillonario misántropo disfruta viendo cómo la gente se equivoca. Declarándose un filántropo, muestra a Pandora dos cajas cerradas que contienen dinero. Pandora podrá quedarse el dinero que contenga la caja que abra. El multimillonario le explica que la cantidad que encontrará en cualquier caso es tal que la probabilidad de que la otra caja contenga el doble es 1/2. Las cajas son idénticas en apariencia y Pandora abre una al azar. Contiene n dólares. Pandora, que es neutral al riesgo, calcula que el valor esperado en dólares de la otra caja es $1/2(1/2n) + 1/2(2n) = 5n / 4$. Cuando Pandora se lamenta por haber escogido mal, el multimillonario misántropo se retira riéndose y exultante.

a) ¿Es que Pandora hubiera podido escoger mejor?

b) ¿Qué es paradójico en esta historia?

c) ¿Es que Pandora ha calculado correctamente el valor esperado en dólares de la otra caja?

d) Supongamos que el multimillonario ha preparado las cajas de manera que la probabilidad de que una contenga 2^k dólares y la otra contenga 2^{k+1} dólares es p_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$). Si Pandora lo supiera, y abriera una caja que contiene $n = 2^k$ dólares, explicar por qué su probabilidad condicionada de que la otra caja contiene $2n$ dólares sería $p_k/(p_k + p_{k-1})$. ¿Cuál sería su probabilidad condicionada de que la otra caja contiene $1/2n$ dólar?

e) Como continuación de *d*), ¿qué ley de las probabilidades dejarían de cumplir las probabilidades p_k si lo que el multimillonario dice a Pandora es cierto?

19. Al multimillonario del ejercicio anterior no le gusta que hayan descubierto que es un mentiroso y propone a Pandora otro problema de elección. El elige un número natural k con probabilidad $p_k > 0$ ($k = 1, 2, ...$) y entonces pone M_k dólares en una caja y M_{k+1} dólares en la otra. Pandora vuelve a escoger una caja al azar. Si el multimillonario arregla las cosas de manera que $M_2 > M_1$ y

$$M_{k+1}p_k + M_{k-1}p_{k-1} > M_kp_k + M_kp_{k-1} \qquad (k = 1, 2, ...),$$

explicar por qué Pandora siempre lamentará no haber elegido la otra caja. Comprobar que basta con tomar $M_k = 3^k$ y $p_k = (1/2)^k$ para que el plan del multimillonario funcione.

Mates

20. Supongamos que Pandora no es neutral al riesgo en el ejercicio anterior y que M_k representa una utilidad de Von Neumann y Morgenstern para cualquier cosa que el multimillonario ponga en una caja. Explicar por qué la utilidad esperada de Pandora antes de mirar lo que contiene una caja es

$$1/2p_1M_1 + \sum_{k=2}^{\infty} 1/2(p_k + p_{k-1})M_k.$$

Si esta utilidad esperada es finita, demostrar que la suma, entre límites apropiados, de la desigualdad citada en el ejercicio anterior permite concluir que $M_{k-1} > M_k$ ($k = 2, 3, ...$).

Explicar por qué se deduce de aquí que el multimillonario no puede sorprender con su truco a Pandora, salvo en el caso en que su utilidad esperada inicial es infinita. Relacionar esta conclusión con la paradoja de San Petersburgo de la Sección 3.4.1.

Mates

21. Continuando con el ejercicio anterior, explicar por qué Pandora sólo será inmune al truco del multimillonario si su utilidad de Von Neumann y Morgenstern para el dinero es acotada. Si es inmune, ¿por qué se sigue que no puede ser siempre amante del riesgo al elegir entre loterías cuyos premios son cantidades de dinero?

Econ

22. Quienes critican la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern a veces agudizan la paradoja de Allais (Sección 3.6.1) adoptando la siguiente variante. Un hombre rico es obligado a jugar una variante de la ruleta rusa bastante diferente de la de la Sección 3.3. Se hace girar el cilindro de un revólver con seis recámaras y que contiene *dos* balas, y el revólver es apuntado a su sien. Se le ofrece entonces la oportunidad de pagar dinero a cambio de retirar las balas antes de disparar. Resulta que el pago puede alcanzar los 10 millones de dólares antes de que el hombre sea indiferente entre pagar y correr el riesgo de ser disparado en la cabeza.

a) ¿Por qué este hombre rico también sería indiferente entre ser disparado cuando el revólver contiene *cuatro* balas y pagar 10 millones de dólares para que retiren *una* de las balas antes de apretar el gatillo? (Suponer que el hombre es racional en el sentido de Von Neumann y Morgenstern.)

b) ¿Por qué no estaría dispuesto a pagar 10 millones de dólares para que retiren *una* bala de un revólver que sólo contiene una bala?

c) ¿Estaría usted dispuesto a pagar más para que retiraran una bala de un revólver que contiene cuatro que para que retiraran una bala de un revólver que contiene sólo una bala? Si la respuesta es sí, entonces usted no es racional en el sentido de Von Neumann y Morgenstern. ¡Pero quizás usted preferiría no serlo![16].

[16] Mi propia reacción a éste y a otros ejemplos análogos no es la que los críticos de la teoría de Von Neumann y Morgenstern desearían. No tengo ninguna reacción visceral acerca de si preferiría pagar más para que retiraran una bala cuando sólo hay una que cuando hay cuatro. De la misma forma podrían preguntarme si prefiero $11 \times 17 \times 29$ dólares o $13 \times 19 \times 23$ dólares. En ambos casos mi reacción es que necesito calcular antes de dar una respuesta. Por lo que se refiere a la reacción visceral que aparentemente algunos tienen y que contradice lo que prescribe la teoría de Von Neumann y Morgenstern, ¿estarían estas personas dispuestas también a pagar más para que retiraran una bala de un revólver con sólo una bala que para que la retiraran de un revólver con *seis* balas? Sospecho que no. Pero retirar una bala cuando hay seis no es muy distinto a retirarla cuando hay cinco. Esto, a su vez, no es muy distinto a retirarla cuando hay cuatro. ¿*Cómo* medir las diferencias entre estos casos distintos? Esta es una pregunta que las reacciones viscerales no parece que puedan responder muy adecuadamente.

C A P I T U L O

4

Cobrar

4.1. Pagos

En el Capítulo 1 hemos construido las formas estratégicas de distintos juegos. Por ejemplo, la Figura 1.5 muestra el resultado, $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$, que se obtendría por medio de cada una de las estrategias puras que los jugadores pueden elegir en el juego G de las Secciones 1.3 y 1.4. La Figura 1.17 muestra la forma estratégica de un juego en el que los resultados son cantidades de dinero. En situaciones más complicadas los resultados pueden ser más difíciles de describir. El Capítulo 2, por ejemplo, muestra claramente que a veces será necesario incluir loterías entre los resultados posibles.

Con frecuencia las cosas se complicarían mucho si no pudieramos utilizar los resultados del Capítulo 3. En él aprendimos a identificar cada resultado de un juego con una lista de *pagos*, uno para cada jugador. Suponemos que todos los jugadores son racionales en el sentido de Von Neumann y Morgenstern y actúan para maximizar el valor esperado de una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern, $u_i : \Omega \to \mathbf{R}$, definida en el conjunto Ω de resultados finales del juego. El *pago* del jugador i en el resultado ω es simplemente la utilidad $u_i(\omega)$ de Von Neumann y Morgenstern.

4.1.1. *Funciones de pagos*

Sea S el conjunto de las estrategias puras del jugador I en un juego de dos jugadores, y sea T el conjunto de las estrategias puras de la jugadora II. Si el jugador I escoge la estrategia pura s y la jugadora II la estrategia pura t, entonces el curso que seguirá el juego está completamente determinado excepto por lo que se refiere a las jugadas al azar. De esta forma, el par (s, t) determina una *lotería* $\mathbf{L}$ sobre el conjunto Ω de resultados finales del juego. El pago $\pi_i(s, t)$ que el jugador i obtiene cuando se usa el par (s, t) es la utilidad esperada de la lotería $\mathbf{L}$. Esto es,

$$\pi_i(s, t) = \mathcal{E} u_i(\mathbf{L}).$$

4.1.2. *Una forma estratégica para el duelo*

Mates

Para ilustrar el uso de las funciones de pago, consideremos el juego duelo introducido en la Sección 2.4. Recordemos que $\mathcal{W}$ representa que el jugador II resulta tocado y $\mathcal{L}$ representa que el jugador I resulta tocado. Representaremos por $\mathbf{q}$ la lotería donde $\mathcal{W}$ se da con probabilidad q y $\mathcal{L}$ se da con probabilidad $1 - q$.

Lo importante de una estrategia pura en el duelo es a qué distancia deja acercarse al contrario antes de apretar el gatillo. Representaremos por d la estrategia pura según la cual un jugador ha de esperar hasta que un determinado nodo d ha sido alcanzado y disparar cuando llegue a d.[1]

Si el jugador I usa la estrategia pura d y el jugador II usa la estrategia pura e, entonces el resultado del juego depende de quién dispara primero. Si $d > e$, o sea que que el jugador I dispara primero, el resultado es la lotería $\mathbf{p}_1(\mathbf{d})$. Esta es la lotería en la que el jugador I sobrevive con probabilidad $p_1(d)$ y el jugador II sobrevive con probabilidad $1 - p_1(d)$. Si $d < e$, o sea que el jugador II dispara primero, el resultado es la lotería $\mathbf{1} - \mathbf{p}_2(\mathbf{e})$.

Por tanto, el pago $\pi_1(d, e)$ que consigue el jugador I si él usa la estrategia pura d y el jugador II usa la estrategia pura e viene dado por

$$\pi_1(d, e) = \begin{cases} p_1(d), & \text{si } d > e, \\ 1 - p_2(e), & \text{si } d < e, \end{cases} \tag{4.1}$$

en el supuesto que la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern del jugador I $u_1 : \{\mathcal{L}, \mathcal{W}\} \to \mathbb{R}$ es elegida, como en la Sección 3.4.2, de manera que $u_1(\mathcal{L}) = 0$ y $u_1(\mathcal{W}) = 1$.

Análogamente, el pago $\pi_2(d, e)$ que consigue el jugador II si usa la estrategia pura e y el jugador I usa la estrategia pura d viene dado por

$$\pi_2(d, e) = \begin{cases} 1 - p_1(d), & \text{si } d > e, \\ p_2(e), & \text{si } d < e, \end{cases} \tag{4.2}$$

en el supuesto que la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern del jugador II $u_2 : \{\mathcal{L}, \mathcal{W}\} \to \mathbf{R}$ es elegida de manera que $u_2(\mathcal{L}) = 1$ y $u_2(\mathcal{W}) = 0$.

En el resto del ejemplo, tomemos $D = 1$, y sea $d_0 = 0$, $d_1 = 0{,}1$, $d_2 = 0{,}2$, etc. Así pues, $d_{10} = 1$ es la raíz del juego del árbol de la Figura 2.6. La probabilidad $p_1(d)$ se toma igual a $1 - d$, y $p_2(d)$ igual a $1 - d^2$. Estos son los valores de $p_1(d)$ y $p_2(d)$ usados en el párrafo final de la Sección 2.4.1 para el caso $D = 1$.

Ahora es posible construir una tabla que muestre los pagos para cada par de estrategias puras (d, e) consideradas. Consideremos, por ejemplo, el par $(d_2, d_5) = (0{,}2; 0{,}5)$. Puesto que $d_2 < d_5$,

$$\pi_1(d_2, d_5) = 1 - p_2(d_5) = 1 - (1 - d_5^2) = d_5^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25;$$

$$\pi_2(d_2, d_5) = p_2(d_5) = 1 - d_5^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

[1] De hecho, hay muchas estrategias puras así. En la Sección 1.3 hemos visto que una estrategia pura debe especificar lo que hará un jugador en cada uno de los nodos de decisión por los que pasa, incluyendo aquellos que no serán alcanzados si sigue su propio plan. Para hacer las cosas con propiedad, por tanto, también deberíamos especificar lo que un jugador haría en los nodos $e < d$ que sólo serán alcanzados si deja de ejecutar su plan de disparar en el nodo d. La más simple de estas estrategias puras requiere que sus planes incluyan no sólo disparar en d, sino también en todos los nodos subsiguientes —si por desgracia resultara alcanzado—. La razón por la cual no necesitamos distinguir entre las estrategias puras que representaremos con la letra d es que dos estrategias puras cualesquiera de este tipo nunca conducen a resultados distintos. Esto es así porque especifican conductas distintas sólo en nodos que nunca serán alcanzados. Dos cualesquiera de estas estrategias serían, por tanto, indistinguibles, si ambas se incluyeran en la forma estratégica del duelo.

	$d_9 = 0{,}9$	$d_7 = 0{,}7$	$d_5 = 0{,}5$	$d_3 = 0{,}3$	$d_1 = 0{,}1$
$d_{10} = 1{,}0$	1,00 0,00	1,00 0,00	1,00 0,00	1,00 0,00	1,00 0,00
$d_8 = 0{,}8$	0,19 0,81	0,80 0,20	0,80 0,20	0,80 0,20	0,80 0,20
$d_6 = 0{,}6$	0,19 0,81	0,51 0,49	0,60 0,40	0,60 0,40	0,60 0,40
$d_4 = 0{,}4$	0,19 0,81	0,51 0,49	0,75 0,25	0,40 0,60	0,40 0,60
$d_2 = 0{,}2$	0,19 0,81	0,51 0,49	0,75 0,25	0,91 0,09	0,20 0,80
$d_0 = 0{,}0$	0,19 0,81	0,51 0,49	0,75 0,25	0,91 0,09	0,99 0,01

Figura 4.1. Una forma estratégica reducida para el duelo.

Estos pagos están contenidos en el recuadro de la Figura 4,1 que se encuentra en la fila d_2 y en la columna d_5. El pago del jugador I está en la esquina sudoeste de este recuadro y el del jugador II en la esquina nordeste.

4.1.3. El equilibrio de Nash

La noción de equilibrio de Nash se puede expresar de forma particularmente fácil en términos de funciones de pagos. Recordemos que en la Sección 1.8.1 hemos dicho que un equilibrio de Nash en un juego de dos jugadores es un par de estrategias (σ, τ) tal que σ es una respuesta óptima a τ y simultáneamente τ es una respuesta óptima a σ. Esto equivale a requerir que las desigualdades

$$\left.\begin{aligned} \pi_1(\sigma, \tau) &\geqslant \pi_1(s, \tau) \\ \pi_2(\sigma, \tau) &\geqslant \pi_2(\sigma, t) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

se cumplen para todas las estrategias puras s y t. La primera desigualdad dice que el jugador I no puede mejorar σ si la jugadora II no se desvía de τ. La segunda desigualdad dice que la jugadora II no puede mejorar τ si el jugador I no se desvía de σ.

Una forma estratégica reducida para el duelo es dada en la Figura 4.1. El mejor pago para el jugador I en cada columna ha sido encerrado en un círculo. Por ejemplo, 0,40 ha sido así señalado en la columna d_5. Puesto que 0,40 pertenece a la fila d_6, esto nos dice que la estrategia pura d_6 es la respuesta óptima del jugador I a la elección de la estrategia pura d_5 por parte del jugador II. Con frecuencia nos encontraremos que existen varias respuestas óptimas. Por ejemplo, cualquier estrategia pura excepto d_{10} es una respuesta óptima del jugador I a la elección de la estrategia pura d_9 por parte del jugador II.

El mejor pago para el jugador II en cada fila también ha sido encerrado en un círculo. Por ejemplo, 0,60 aparece así encerrado tres veces en la fila d_6. Por tanto, las estrategias puras d_5, d_3 y d_1 son respuestas óptimas del jugador II a la elección de la estrategia pura d_6 por parte del jugador I.

Obsérvese que el único recuadro de la Figura 4.1 en el que ambos pagos están encerrados en círculos es el que se encuentra en la fila d_6 y en la columna d_5. Así pues, el único par de estrategias puras que constituye un equilibrio de Nash es (d_6, d_5). Cada una de las estrategias puras del par es una respuesta óptima a la otra[2].

¿Qué podemos deducir comparando esta conclusión con el análisis del duelo de la Sección 2.4.1? En aquella sección el algoritmo de Zermelo fue usado para determinar un equilibrio subjuego-perfecto del duelo. El método usado en la presente sección es menos refinado en el sentido que determina el conjunto de *todos* los equilibrios de Nash[3]. Los equilibrios subjuego-perfectos se encuentran en este conjunto porque todos los equilibrios subjuego-perfectos son equilibrios de Nash (Sección 1.8). Pero el conjunto también puede contener equilibrios de Nash que no son subjuego-perfectos. Afortunadamente esta dificultad no se da aquí porque existe un único equilibrio de Nash, y éste debe ser el equilibrio subjuego-perfecto que descubriría una aplicación del algoritmo de Zermelo.

El párrafo final de la Sección 2.4.1 hace observar que jugadores racionales abrirán fuego cuando se encuentren a la distancia $\delta = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}62$, en el supuesto que los nodos $d_0, d_1, ..., d_n$ se encuentren muy próximos. En la versión del duelo aquí estudiada la distancia entre nodos es 0,1, que no es muy pequeño comparado con $D = 1$. Con todo, el jugador I abre fuego a la distancia $d_6 = 0{,}60$, bastante próxima a δ.

[2] Obsérvese que (d_6, d_5) es un punto de silla en la Figura 4.1. Como se ha explicado en la Sección 1.7.2, esto significa que el resultado $\pi_1(d_6, d_5) = 0{,}4$ es el mejor para el jugador I en su columna y el peor para el jugador I en su fila. Pero sólo en juegos estrictamente competitivos, como el duelo, un equilibrio de Nash es necesariamente un punto de silla. En juegos estrictamente competitivos, la segunda desigualdad en (4.3) equivale a $\pi_1(\sigma, \tau) \leqslant \pi_1(\sigma, t)$ porque en estos juegos lo que es bueno para el jugador II es malo para el jugador I. Sin embargo, en juegos más generales no tiene por qué haber relación alguna entre lo que es bueno para el jugador II y lo que es malo para el jugador I.

[3] Es decir, el conjunto de todos los equilibrios de Nash de estrategias *puras*. También puede haber equilibrios de Nash de estrategias *mixtas*. (Véase el Capítulo 6.)

	t_1	t_2	t_3
s_1	1 1	0 2	−1 3
s_2	0 2	0 4	0 6

Figura 4.2. Un juego bimatricial.

4.2. Juegos bimatriciales

Las funciones de pagos $\pi_i : S \times T \to \mathbf{R}$ no son sino una representación simbólica de la forma estratégica de un juego. Por ejemplo, supongamos que el jugador I tiene dos estrategias puras s_1 y s_2 mientras que la jugadora II dispone de tres estrategias puras t_1, t_2 y t_3. Las funciones de pagos de los jugadores están definidas por

$$\pi_1(s_i, t_j) = ij$$
$$\pi_2(s_i, t_j) = (i - 2)(j - 2).$$

La Figura 4.2 ilustra esta situación. En esta figura la fila s representa la estrategia pura s del jugador I y la columna t representa la estrategia pura t de la jugadora II. El pago $\pi_1(s, t)$ del jugador I se encuentra en la esquina sudoeste del recuadro situado en la fila s y la columna t. El pago $\pi_2(s, t)$ de la jugadora II se encuentra en la esquina nordeste.

A veces estas representaciones de formas estratégicas se llaman un *juego bimatricial* porque está determinado por dos *matrices de pagos*[4]. En la Figura 4.2, la matriz de pagos del jugador I es A, y la de la jugadora II es B, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2.1. Juegos de jugadas simultáneas

Al pasar desde la forma extensiva de un juego a la forma estratégica, se consigue simplificar las cosas desde el punto de vista matemático. Un árbol de juego es un objeto matemático complicado, mientras que un par de

[4] Hablaremos brevemente de matrices en la Sección 4.3.

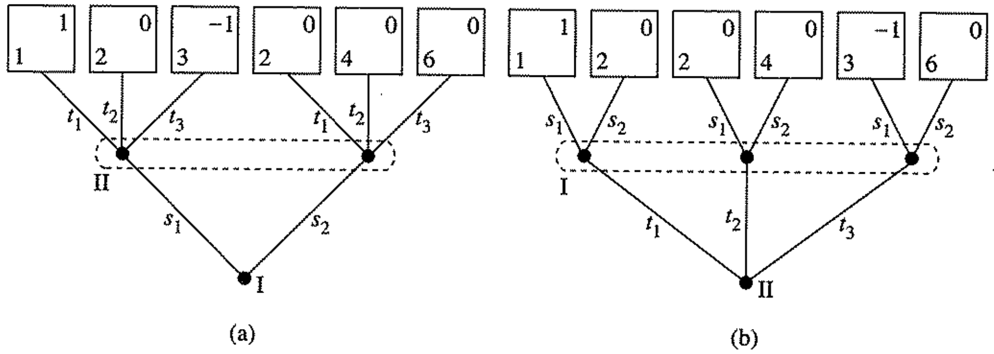


Figura 4.3. Juegos de jugadas simultáneas.

matrices son fáciles de describir. A veces conseguimos ganar en simplicidad sin dar nada a cambio. Por ejemplo, nuestro estudio de una forma estratégica del duelo en la Sección 4.1.2 nos condujo a la misma conclusión que nuestro estudio de su forma extensiva en la Sección 2.4.1. Sin embargo, como veremos, las cosas no siempre son tan satisfactorias.

Para una clase de juegos se puede *garantizar* que no se pierde nada cuando se pasa a la forma estratégica. Se trata de la clase de los juegos de jugadas simultáneas. Se podría pensar, de entrada, que es imposible dar una forma extensiva como modelo de estos juegos, porque un árbol de juego, por su propia naturaleza, impone un orden secuencial sobre los tiempos en los que ocurren cosas. Sin embargo, considerénse los dos juegos ilustrados en la Figura 4.3.

En el juego de la Figura 4.3(a), el jugador I juega primero, pero el conjunto de información que contiene los dos nodos de decisión de la jugadora II asegura que ésta, al elegir, no conoce la decisión tomada por el jugador I. Así pues los dos jugadores podrían equivalentemente haber jugado simultáneamente. Lo mismo es cierto en el juego de la Figura 4.3(b). Aunque la jugadora II juega primero en este juego, que el jugador I sea ignorante de su elección cuando él toma una decisión sobre su jugada significa que de forma equivalente ambos hubieran podido jugar simultáneamente.

Por tanto, todo lo importante contenido en las dos formas extensivas de la Figura 4.3 se halla contenido en la forma estratégica que les es común. Esta es el juego bimatricial de la Figura 4.2.

Filo 4.3 ⟶

Hemos visto que no se pierde nada al reducir nuestra atención a la forma estratégica de un juego de jugadas simultáneas. A veces se defiende que esto mismo es cierto para cualquier juego. El argumento es que los jugadores racionales pueden condensar todas sus consideraciones en un único instante anterior al inicio del juego. En este instante, eligen simultáneamente una estrategia pura. Puesto que los jugadores racionales toman decisiones óptimas, nunca tendrán necesidad de reconsiderarlas. Así pues, según este argumento, *todos* los juegos pueden ser considerados como juegos de jugadas simultáneas y, por tanto, cualquier forma extensiva puede ser sustituida sin perder nada por su forma estratégica.

Este argumento no es sólido[5]. Es cierto, sin embargo, que a menudo se puede aprender mucho sólo con examinar la forma estratégica de un juego. A veces, como ocurre con el duelo, se puede aprender todo lo que uno desearía saber.

4.3. Matrices

Revisión 4.5 ⟶

No es necesario saber muchas cosas acerca de matrices para estudiar juegos bimatriciales. Incluso lo que se explica a continuación es más de lo que resulta realmente esencial.

Una *matriz* $m \times n$ es un conjunto de números ordenados rectangularmente en m filas y n columnas. Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2. A veces la notación usada induce a confusión entre una matriz y un número. Por ejemplo, la matriz cero, de cualesquiera dimensiones, siempre se representa por 0. Se escribe

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

y el lector debe deducir a partir del contexto si 0 es el número cero o una matriz cero. Sin embargo, siempre es importante que quede muy claro qué es un número y qué una matriz. La diferencia se subraya en muchas ocasiones designando a los números como *escalares.*

[5] Aunque fue propuesto por Von Neumann y Morgenstern, y continúa siendo defendido por algunos eminentes especialistas. La razón por la que el argumento no es sólido es que un análisis de un juego que da por sentado que estrategias suboptimas son *literalmente* imposibles no puede ser adecuado. Por ejemplo, si jugar subóptimamente fuera literalmente imposible en el duelo, entonces la forma estratégica de la Figura 4.1 consistiría sólo del único recuadro (d_6, d_5). Para explicar por qué una estrategia es óptima, es necesario considerar las consecuencias de jugar estrategias alternativas, de manera que su suboptimalidad pueda ser demostrada. Esta refutación, sin embargo, no es adecuada para versiones más sofisticadas del argumento.

4.3.1. Aritmética de matrices

Trasposición. La *traspuesta*[6] M^{T} de una matriz M se obtiene al tomar las columnas de M como filas de M^{T}. Por ejemplo,

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conviene destacar tres hechos. En primer lugar, siempre es cierto que $(M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = M$. Segundo, si M es una matriz 1×1, entonces $M = M^{\mathrm{T}}$. Tercero, si M es una matriz $m \times n$, entonces sólo se puede cumplir que $M = M^{\mathrm{T}}$ si $m = n$, lo que significa que M es una matriz *cuadrada*. Si se cumple que $M = M^{\mathrm{T}}$, entonces diremos que M es una matriz *simétrica*.

Adición de matrices. Dos matrices se pueden sumar si y sólo si tienen las mismas dimensiones. Basta con sumar las correspondientes casillas. Por ejemplo,

$$A + B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hay que suponer que el 0 en $B + 0$ representa la matriz cero 3×2 para que la expresión tenga sentido. Obsérvese, sin embargo, que no es posible conseguir que la expresión

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

tenga sentido.

Multiplicación por un escalar. Cualquier matriz puede ser multiplicada por cualquier escalar. Basta con multiplicar cada casilla de la matriz por el escalar dado. Por ejemplo,

$$4A = 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B - A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

[6] A menudo se usa la notación M' para la traspuesta de M.

Multiplicación de matrices. El producto de matrices CD tiene sentido si el número de columnas de C es igual al número de filas de D, *pero no lo tiene en caso contrario.* Si C es una matriz $m \times n$ y D es una matriz $n \times p$, entonces CD es una matriz $m \times p$.

Por ejemplo, si A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2, entonces el producto AB tiene sentido. Es la matriz 2×2 dada por

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Las casillas de AB se han calculado así:

$$9 = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 3; \quad -1 = 0 \times 2 + 1 \times -1 + 3 \times 0;$$

$$5 = -1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 3; \quad -2 = -1 \times 2 + 0 \times -1 + 2 \times 0.$$

Considérese la casilla 5. Se encuentra en la *segunda* fila y *primera* columna de AB. Se calcula, por tanto, usando la *segunda* fila de A y la *primera* columna de B. Multiplíquense simplemente las casillas de la segunda fila de A con las correspondientes de la primera columna de B y súmense los resultados como muestra la Figura 4.4.

Otros ejemplos de productos de matrices son

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

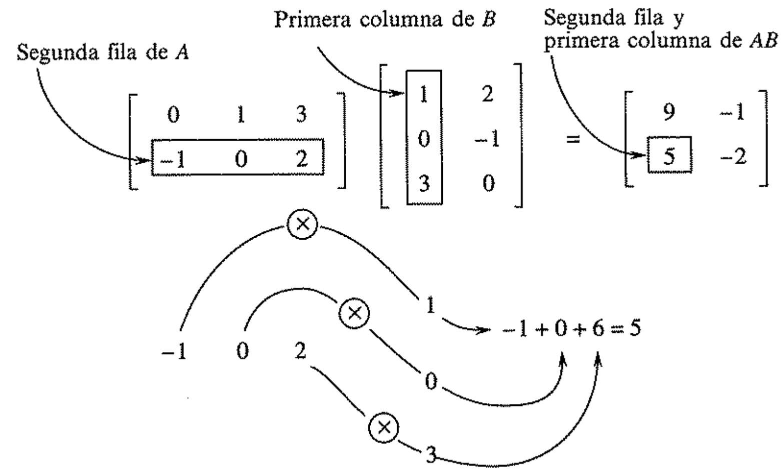


Figura 4.4. La multiplicación de matrices.

Obsérvese que $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Esta identidad, que es muy útil, se cumple siempre que el producto AB tiene sentido.

Es necesario ser muy prudente al multiplicar matrices. No se puede garantizar que el producto de dos matrices arbitrarias tenga sentido. Por ejemplo, no se puede multiplicar una matriz 2×3 por otra matriz 2×3 y, por tanto, no tiene sentido escribir AB^{T}. Incluso cuando todos los productos de matrices involucrados tienen sentido, sólo algunas de las leyes usuales de la multiplicación son válidas. Por ejemplo, siempre se cumple que $(LM)N = L(MN)$ cuando todos los productos tienen sentido, pero no es necesariamente cierto que $LM = ML$, ni siquiera cuando ambos miembros tienen sentido. Obsérvese, por ejemplo, que $AB \neq BA$. Las dos matrices ni siquiera tienen las mismas dimensiones. La matriz AB es 2×2, mientras que BA es 3×3.

4.4. Vectores

Podemos pensar un vector n-dimensional como una lista de n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Esta lista se puede expresar por medio de una matriz $n \times 1$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Las componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de esta matriz se llaman las *coordenadas* del *vector columna* x. Esta forma de representar un vector como una columna es cómoda si se utiliza el álgebra matricial. Si no es así, es más cómodo representar un vector como la matriz $1 \times n$

$$x^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n],$$

porque ocupa menos espacio en una página. Esta notación para un *vector fila* se utilizará de forma intercambiable con la notación más habitual $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

El conjunto de todos los vectores n-dimensionales se representa por $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Un vector de $\mathbb{R}^2$ se interpreta habitualmente como la localización de un punto en un plano referido a unos ejes cartesianos. El vector $0 = (0, 0)$ hace de origen para el par de ejes. La Figura 4.5(a) muestra la localización de $x = (x_1, x_2)$ cuando pensamos en él como expresión de un punto.

La Figura 4.5(b) muestra un vector x interpretado alternativamente como un desplazamiento. En esta interpretación, x significa «muévase todo x_1 unidades hacia la derecha y x_2 unidades hacia arriba». Este desplaza-

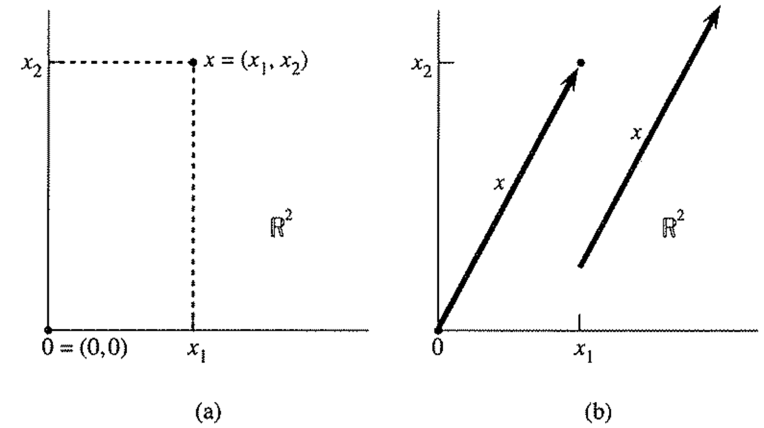


Figura 4.5. Vectores como puntos o desplazamientos.

miento se puede representar con una flecha cuyo final está en 0 y cuyo extremo afilado se encuentra en el punto x. Sin embargo, el mismo desplazamiento puede ser representado por cualquier otra flecha con la misma longitud y dirección.

4.4.1. Aritmética vectorial

Puesto que los vectores pueden ser representados por matrices, pueden ser sumados y multiplicados por un escalar de la misma forma que las matrices. Si α y β son escalares, y x e y son vectores de $\mathbb{R}^2$, entonces la *combinación lineal* $\alpha x + \beta y$ se define por

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2).$$

(Obsérvese que hemos elegido la representación en fila para que la definición cupiera en sólo una línea.)

El significado geométrico de expresiones de este tipo es muy importante. Diremos más cosas sobre ellas en el Capítulo 5. De momento, obsérvese simplemente que $x + y$ se puede interpretar como el desplazamiento que resulta de utilizar primero el desplazamiento x y a continuación utilizar el desplazamiento y. La Figura 4.6(a) ilustra esta idea. (También clarifica por qué la regla para sumar vectores se llama *ley, o regla, del paralelogramo.*)

4.4.2. Vectores ortogonales

Supongamos que x e y son vectores columna n-dimensionales. No se puede multiplicar x por y porque el producto de dos matrices $n \times 1$ no tiene

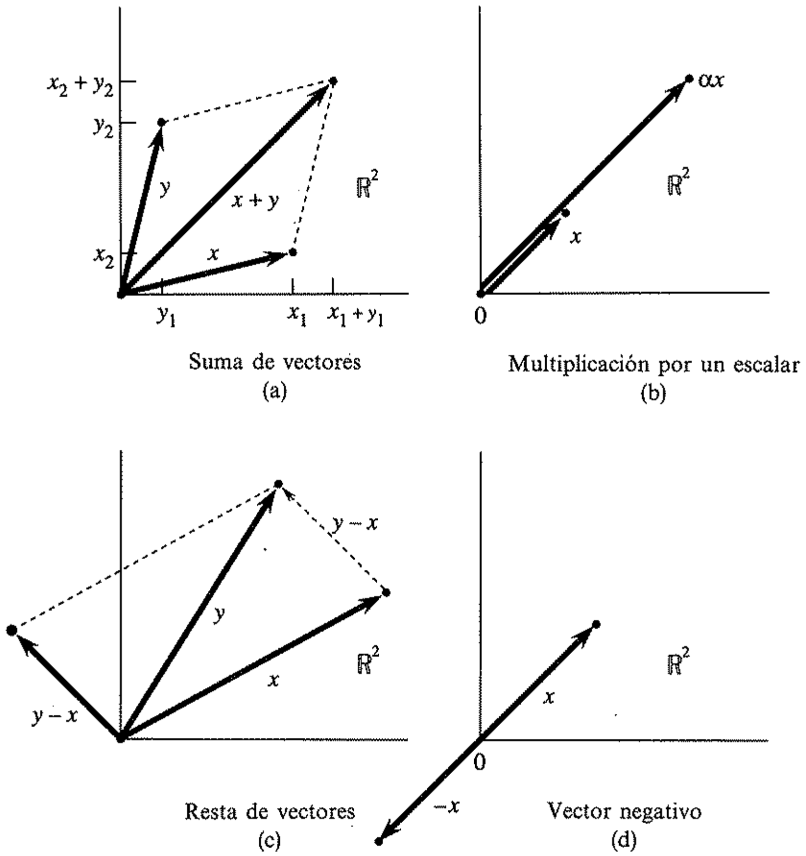


Figura 4.6. Suma de vectores y multiplicación por un escalar.

sentido (excepto cuando $n = 1$). Sin embargo, el producto $x^\mathrm{T}y$ sí tiene sentido porque x^T es una matriz $1 \times n$ e y es una matriz $n \times 1$. El producto de dos matrices así es una matriz 1×1. Así pues, $x^\mathrm{T}y$ es el escalar dado por

$$x^\mathrm{T}y = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Los matemáticos se refieren habitualmente a $x^\mathrm{T}y$ como el *producto interior*[7] de los vectores x e y.

[7] A menudo se usa la notación $(x, y) = x^\mathrm{T}y$, a pesar del riesgo de confusión que representan los otros usos de (x, y). A veces $x^\mathrm{T}y$ se llama el *producto escalar*. A veces se escribe $x \cdot y$ y se llama (en inglés) *dot product*.

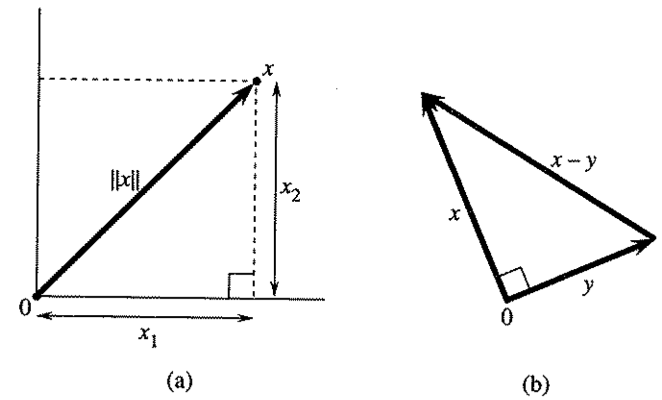


Figura 4.7. El teorema de Pitágoras.

Como ocurría en la sección anterior, el significado geométrico de esta idea es importante. Para ver por qué, es necesario introducir la noción de *longitud* $\|x\|$ de un vector x. Ésta se define por

$$\|x\|^2 = x^\mathrm{T}x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

La Figura 4.7 ilustra el caso $n = 2$. El teorema de Pitágoras nos dice que $\|x\|$ es simplemente la longitud de la flecha que representa a x cuando éste es pensado como un desplazamiento.

Apliquemos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la Figura 4.7(b). Puesto que[8] $y^\mathrm{T}x = x^\mathrm{T}y$,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ (x - y)^\mathrm{T}(x - y) &= x^\mathrm{T}x + y^\mathrm{T}y \\ x^\mathrm{T}x - y^\mathrm{T}x - x^\mathrm{T}y + y^\mathrm{T}y &= x^\mathrm{T}x + y^\mathrm{T}y \\ x^\mathrm{T}y &= 0. \end{aligned}$$

La lección importante que hay que aprender de este cálculo algebraico es que una condición necesaria y suficiente para que dos vectores x e y sean *ortogonales* (o perpendiculares, o «formen un ángulo recto») es que su producto escalar $x^\mathrm{T}y$ sea cero.

[8] Ambos lados de la igualdad son iguales a $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. O, de forma más elegante, puesto que $y^\mathrm{T}x$ es un escalar, es igual a su propia traspuesta. Así pues, $y^\mathrm{T}x = (y^\mathrm{T}x)^\mathrm{T} = x^\mathrm{T}(y^\mathrm{T})^\mathrm{T} = x^\mathrm{T}y$.

4.4.3. Ordenación de vectores

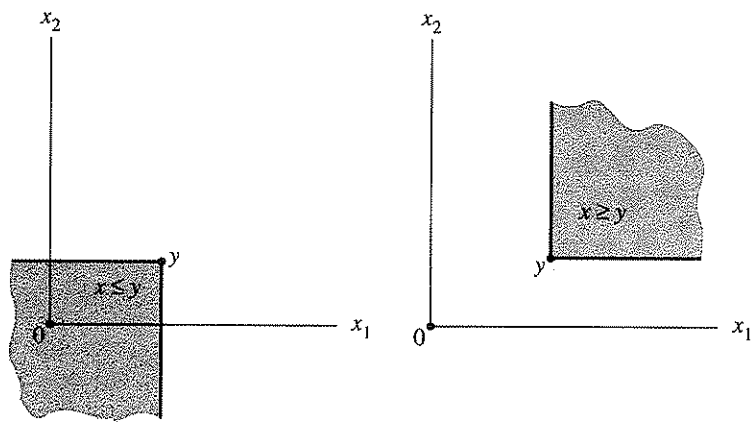
Si x e y son vectores n-dimensionales, entonces $x \leqslant y$ significa que $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2, \ldots, x_n \leqslant y_n$. Por ejemplo,

$$(4, -1, 2, 0) \leqslant (4, 0, 3, 1) \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

La Figura 4.8(a) muestra el conjunto de todos los x de $\mathbb{R}^2$ tales que $x \leqslant y$. La Figura 4.8(b) muestra el conjunto de todos los x de $\mathbb{R}^2$ tales que $x \geqslant y$. Obsérvese que estos dos conjuntos no forman todo $\mathbb{R}^2$. Esto es, para ciertos x e y no es cierto que $x \leqslant y$ ni tampoco que $x \geqslant y$. Por ejemplo, es falso que $(1, 2) \geqslant (2, 1)$, y falso que $(1, 2) \leqslant (2, 1)$.

Usaremos la notación $x < y$ para significar que $x \leqslant y$, pero que $x \neq y$. Por tanto, en (4.4) los símbolos pueden ser reemplazados por símbolos $<$. Usaremos la notación $x \ll y$ para representar que $x_1 < y_1, x_2 < y_2, \ldots, x_n < y_n$. Sería, por tanto, incorrecto reemplazar en (4.4) los símbolos $\leqslant$ por símbolos $\ll$. Los siguientes resultados son correctos:

$$(4, -1, 2, 0) \ll (5, 0, 4, 1) \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$



(a) (b)

Figura 4.8. Ordenación de vectores en $\mathbb{R}^2$.

4.5. Hiperplanos

Mates

¿Cuál es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$? Más exactamente, ¿cuál es la ecuación de un plano que pasa por el punto $y = (1, 2, 3)^T$ y es ortogonal al vector $p = (2, 2, 8)^T$?

El diagrama de la Figura 4.9(a) nos ayudará a contestar esta pregunta. Si el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ pertenece al plano, p debe ser ortogonal al vector $x - y$. Por tanto, el producto escalar de los vectores p y $x - y$ es cero. Esto es,

$$p^T(x - y) = 0.$$

Luego la ecuación del plano es

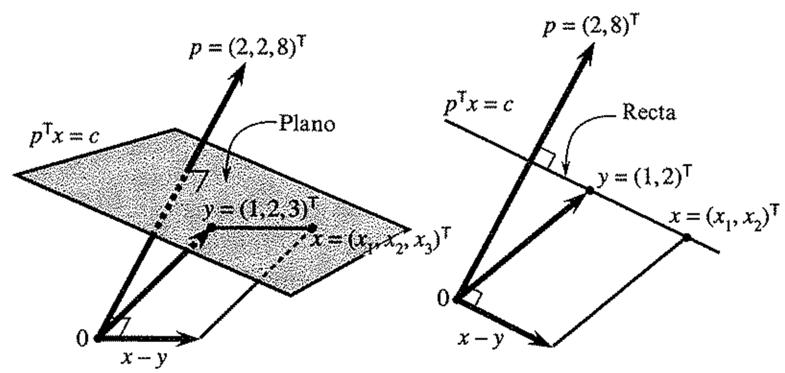
$$p^T x = c,$$

siendo $c = p^T y = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 8 \times 3 = 30$. La ecuación también puede ser escrita

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 30. \tag{4.5}$$

De la misma forma se puede preguntar por la ecuación en $\mathbb{R}^2$ de la línea recta que pasa por el punto $y = (1, 2)^T$ y es ortogonal al vector $p = (2, 8)^T$. La Figura 4.9(b) muestra esta línea. El mismo razonamiento de antes muestra que la línea es $p^T x = c$, siendo $c = p^T y = 2 \times 1 + 8 \times 2 = 18$. Esto se puede escribir

$$2x_1 + 8x_2 = 18.$$



(a) (b)

Figura 4.9. Hiperplanos.

En general, si $p \neq 0$, el conjunto de todos los x de $\mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación $p^T x = c$ se llama un *hiperplano*[9]. El vector p es *normal* al hiperplano. Esto significa simplemente que es ortogonal al hiperplano. Hemos visto que en $\mathbb{R}^2$ el hiperplano $2x_1 + 8x_2 = 18$ es una recta uno de cuyos vectores normales es $(2, 8)^T$. El hiperplano $2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 30$ de $\mathbb{R}^3$ es un plano ordinario uno de cuyos vectores normales es $(2, 2, 8)^T$. En $\mathbb{R}^n$ la ecuación lineal

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = c$$

define un hiperplano que tiene como vector normal $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$[10].

4.5.1. Gradientes

Los manuales de cálculo infinitesimal introducen la idea de *gradiente* de una función diferenciable $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El vector gradiente $\nabla f(y)$ de f en el punto y es

$$\nabla f(y) = (f_{x_1}(y), f_{x_2}(y), ..., f_{x_n}(y))^T$$

Mates 4.6 ⟶

En esta expresión $f_{x_i}(y)$ representa la derivada parcial $\partial f/\partial x_i$ en el punto y.

Por ejemplo, si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define por $g(x_1, x_2) = x_1^2x_2^3$, entonces

$$g_{x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1x_2^3 \quad ; \quad g_{x_2} = \frac{\partial g}{\partial x_2} = 3x_1^2x_2^2.$$

Cuando $y = (2, 1)^T$,

$$\nabla g(y) = (g_{x_1}(2, 1), g_{x_2}(2, 1)) = (4, 12)^T.$$

Si el punto y pertenece a la superficie[11]

$$f(x) = c.$$

entonces $\nabla f(y)$ es un vector normal a la superficie en el punto y. Aquí supondremos este hecho cierto sin más. Se sigue que el hiperplano

$$\nabla f(y)^T(x - y) = 0$$

debe ser tangente a la superficie $f(x) = c$ en el punto y.

[9] El prefijo «hiper» significa un objeto análogo a uno tridimensional. El lector estará probablemente familiarizado con él gracias a series como Star Trek.

[10] Un hiperplano no tiene un *único* vector normal. Si p es normal y $\lambda \neq 0$ es un escalar, entonces λp también es normal. Por ejemplo, $(1, 1, 4)^T$ es un segundo vector normal al plano definido por (4.5) ya que esta ecuación puede ser reescrita como $x_1 + x_2 + 4x_3 = 15$.

[11] Algunos autores prefieren decir «hipersuperficie».

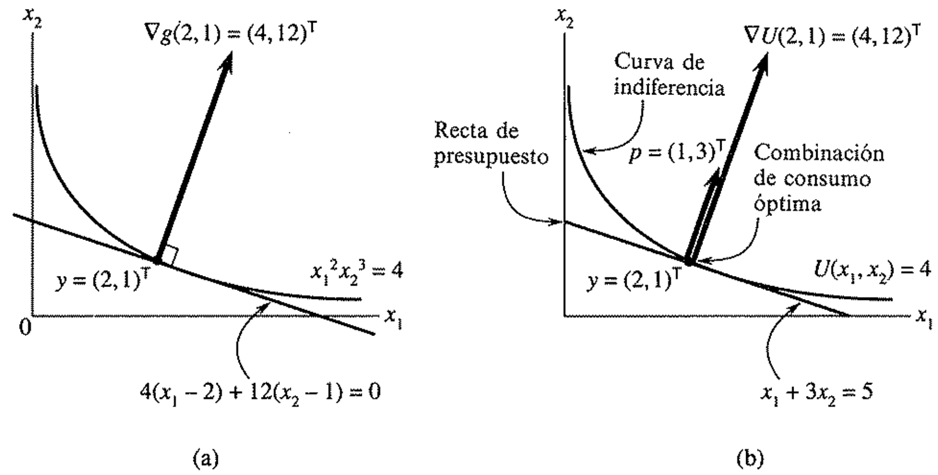


Figura 4.10. Normales y tangentes.

El diagrama de la Figura 4.10(a) ilustra el caso para la curva $x_1^2x_2^3 = 4$. Puesto que $y = (2, 1)^T$ pertenece a la curva $g(x_1, x_2) = 4$, el vector $\nabla g(y) = (4, 12)^T$ es normal a la curva $x_1^2x_2^3 = 4$ en el punto $(2, 1)^T$. La recta tangente[12] a la curva $x_1^2x_2^3 = 4$ en el punto $(2, 1)^T$ viene dada por $4(x_1 - 2) + 12(x_2 - 1) = 0$.

4.5.2. Vectores de precios

Econ 4.6 ⟶

Los vectores se usan en economía para muchas cosas. Por ejemplo, en la Sección 3.2.1 Pandora estaba pensando en la cantidad de ginebra y de vodka que iba a comprar con los 10 dólares que tenía en el bolsillo. La ginebra cuesta 4 dólares por botella y el vodka 1 dólar por botella. Ella puede comprar, por consiguiente, cualquier paquete de mercancías (g, v) que se encuentre en su recta de presupuesto $4g + v = 10$. El aspecto a destacar de forma inmediata es simplemente que el paquete de mercancías (g, v) es un vector bidimensional.

En una situación más complicada, Pandora puede tener que considerar n mercancías. Entonces tendría que elegir un vector n-dimensional x entre todos los que puede permitirse comprar. Para determinar qué paquete x de

[12] Para obtenerla de un modo más familiar es necesario expresar la curva en la forma $x_2 = h(x_1) = (4x_1^{-2})^{1/3}$. La pendiente de la tangente buscada es ahora $h'(2) = -4^{1/3} \times (2/3) \times 2^{-5/3} = -2^{2/3} \times (2/3) \times 2^{-5/3} = -1/3$. Para relacionar esto con la discusión del texto, recuérdese que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}.$$

mercancías puede comprar, Pandora necesita un *vector de precios* n-dimensional p. La k-ésima coordenada p_k del vector de precios p es el precio al que se intercambia la k-ésima mercancía. Así, el valor del paquete de mercancías x es $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$. Si Pandora tiene I dólares en el bolsillo y se los gasta todos, el paquete de mercancías que compre satisfará $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I$. Considerando p y v como vectores columna, llegamos a la conclusión que un paquete de mercancías x comprado según los precios p por una cantidad I pertenece al *hiperplano de presupuesto* de Pandora

$$p^{\mathrm{T}}x = I.$$

La Figura 4.10(b) muestra el caso $n = 2$. La función de utilidad de Pandora $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ se define por $U(x_1, x_2) = x_1^2x_2^3$. El vector de precios p viene dado por $p = (1, 3)^{\mathrm{T}}$. El primer producto (ginebra) cuesta 1 dólar por unidad, y el segundo (vodka), 3 dólares por unidad. Pandora puede gastar 5 dólares. Su problema consiste en elegir una combinación de consumo óptima x sujeta a la condición de pertenecer a su recta de presupuesto $x_1 + 3x_2 = 5$.

La combinación óptima y debe encontrarse en un punto en el que una curva de indiferencia $U(x) = c$ es tangente a la recta de presupuesto $p^{\mathrm{T}}x = I$. En un punto así los vectores normales a $U(x) = c$ y a $p^{\mathrm{T}}x = I$ deben apuntar en la misma dirección (o en direcciones opuestas), como muestra la Figura 4.10(b). Dos vectores u y v apuntan en la misma dirección (o en direcciones opuestas[13]) si y sólo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $u = \lambda v$. Puesto que p es normal a $U(x) = c$ en y, una condición necesaria para que y sea óptimo es que exista un escalar $\lambda \neq 0$ tal que

$$p = \lambda \nabla U(y). \tag{4.6}$$

(Los que entienden de estas cosas reconocerán en λ un «multiplicador de Lagrange», o un «precio sombra».)

En el caso de Pandora, (4.6) se reduce a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = p = \lambda \nabla U(y) = \lambda \begin{bmatrix} U_{x_1}(y) \\ U_{x_2}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda y_1 y_2^3 \\ 3\lambda y_1^2 y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación vectorial se puede escribir como dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda y_1 y_2^3 \\ 3 &= 3\lambda y_1^2 y_2^2. \end{aligned}$$

[13] Apuntan en la misma dirección si $\lambda > 0$, y en direcciones opuestas si $\lambda < 0$.

Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos

$$1 = \frac{2y_2}{y_1}.$$

Esta ecuación ha de ser resuelta conjuntamente con la ecuación

$$y_1 + 3y_2 = 5,$$

que expresa que y está en la recta de presupuesto. Las soluciones son $y_1 = 2$ e $y_2 = 1$. Así pues, la combinación de consumo óptima es $y = (2, 1)^{\mathrm{T}}$.

4.6. Dominación

En el juego bimatricial de la Figura 4.2, el jugador I dispone de dos estrategias puras, s_1 y s_2. La estrategia pura s_2 *domina fuertemente* a la estrategia pura s_1. Esto significa que para el jugador I es mejor usar s_2 que s_1 con *independencia* de lo que haga el jugador II. En términos algebraicos, el criterio es que

$$\pi_1(s_2, t) > \pi_1(s_1, t),$$

para los tres valores de la estrategia pura t de la jugadora II. La fila s_1 de la matriz de pagos del jugador I es (1, 2, 3). La fila s_2 es (2, 4, 6). El criterio por el que s_2 domina fuertemente a s_1 se puede expresar en términos de estas filas escribiendo

$$[2 \quad 4 \quad 6] \gg [1 \quad 2 \quad 3].$$

Ninguna de las estrategias puras de la jugadora II en el juego bimatricial de la Figura 4.2 está fuertemente dominada. Sin embargo, la estrategia pura t_1 *domina débilmente* a la estrategia pura t_2. Esto significa que la jugadora II nunca puede perder si juega t_1 en lugar de t_2, y a veces puede ganar. El criterio es, por tanto,

$$\pi_2(s, t_1) \geqslant \pi_2(s, t_2),$$

para todas las estrategias puras s del jugador I, cumpliéndose la desigualdad *estricta* por lo menos para un valor de s. En términos de las columnas de la matriz de pagos de la jugadora II, esto se traduce en el requisito

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, es cierto que

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

Luego la estrategia pura t_1 domina débilmente a la estrategia pura t_3, y la estrategia pura t_2 domina débilmente a la estrategia pura t_3.

Si la estrategia a domina fuertemente a la estrategia b, entonces también es cierto que a domina débilmente a b. Así pues, afirmar que una estrategia domina débilmente a otra incluye la posibilidad de que la dominación sea fuerte. Para evitar confusiones en este punto, podemos decir simplemente que a *domina* a b. Esto implica que a domina débilmente a b sin provocar el mal entendido de sugerir que queda excluida la posibilidad de una dominación fuerte.

4.6.1. Eliminación de estrategias dominadas

Un jugador racional nunca usará una estrategia fuertemente dominada. Al buscar los equilibrios de Nash de un juego bimatricial, podemos empezar, por tanto, suprimiendo todas las filas y columnas que corresponden a estrategias fuertemente dominadas. Por ejemplo, la fila s_1 puede ser suprimida en el juego bimatricial de la Figura 4.2. Esto deja el simple juego bimatricial 1×3 de la Figura 4.11.

En el juego bimatricial 1×3 de la Figura 4.11, ninguna de las estrategias puras de la jugadora II están dominadas, ni siquiera en sentido débil. Por tanto, no podemos conseguir reducciones adicionales por medio de argumentos de dominación. Se puede comprobar que (s_2, t_1), (s_2, t_2) y (s_3, t_3) son todos equilibrios de Nash del juego de la Figura 4.2. Sin embargo, no siempre será cierto que sólo quedan equilibrios de Nash despues de suprimir todas las estrategias dominadas.

La Figura 4.12 muestra el uso de la misma técnica en el juego bimatricial 6×5 de la Figura 4.1. Consideraciones de dominación reducen el juego a la única casilla (d_6, d_5), que ya sabemos que es el único equilibrio de Nash de esta versión del duelo. Los pasos de esta reducción son listados a continuación:

	t_1	t_2	t_3
s_2	0 2	0 4	0 6

Figura 4.11. Una versión simplificada de la Figura 4.2.

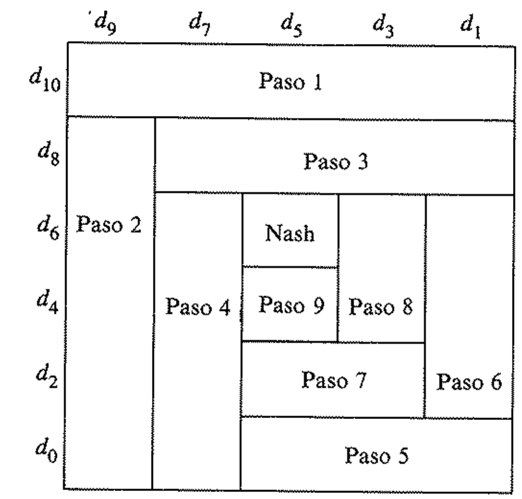


Figura 4.12. Eliminación sucesiva de estrategias dominadas en el duelo.

Paso 1. Suprimir la fila d_{10} porque está *fuertemente* dominada por la fila d_8.

Paso 2. En el juego bimatricial 5×5 obtenido, suprimir la columna d_9 porque está *fuertemente* dominada por la columna d_7.

Paso 3. En el juego bimatricial 5×4 obtenido, suprimir la fila d_8 porque está *fuertemente* dominada por la fila d_6.

Paso 4. En el juego bimatricial 4×4 obtenido, suprimir la columna d_7 porque está *fuertemente* dominada por la columna d_5.

Paso 5. En el juego bimatricial 4×3 obtenido, suprimir la fila d_0 porque está *fuertemente* dominada por la fila d_6.

Estas eliminaciones proporcionan un juego bimatricial 3×3 en el que no existen estrategias puras fuertemente dominadas. Si queremos continuar por este camino, deberemos suprimir estrategias *débilmente* dominadas. Pero al hacer esto es necesario actuar con precaución. Un jugador o una jugadora racional no puede salir perjudicado al descartar sus estrategias débilmente dominadas, pero esto no implica que *nunca* sea racional el uso de una estrategia débilmente dominada. Después de concluir el proceso de suprimir las estrategias dominadas, el juego simplificado obtenido siempre contendrá por lo menos un equilibrio de Nash del juego original. Pero otros equilibrios de Nash del juego original se pueden haber perdido, si por el camino ha sido necesario recurrir a la dominación débil.

Paso 6. En el juego bimatricial 3×3 obtenido tras el Paso 5, suprimir la columna d_1 porque está *débilmente* dominada por la columna d_3.

Paso 7. En el juego bimatricial 3 × 2 obtenido, suprimir la fila d_2 porque está *fuertemente* dominada por la fila d_6.

Paso 8. En el juego bimatricial 2 × 2 obtenido, suprimir la columna d_3 porque está *débilmente* dominada por la columna d_5.

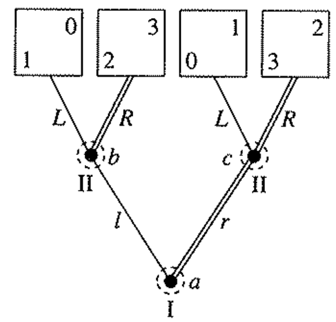
Paso 9. En el juego bimatricial 2 × 1 obtenido, suprimir la fila d_4 porque está *fuertemente* dominada por la fila d_6.

Esta larga serie de eliminaciones deja el juego bimatricial 1 × 1 que consiste de la única casilla del juego original que pertenece a la fila d_6 y a la columna d_5. Así pues, la estrategia pura (d_6, d_5) debe ser un equilibrio de Nash del juego original.

4.6.2. Racionalidad y estrategias dominadas

Un jugador no necesita saber nada sobre el adversario para decidir que usar una estrategia fuertemente dominada nunca puede ser óptimo. Es irracional usar una estrategia fuertemente dominada tanto si el adversario es Von Neumann como si es un chimpancé. Sin embargo, para justificar la eliminación de la columna d_9 en el Paso 2 de la Sección 4.6.1, la jugadora II ha de saber que el jugador I es lo bastante racional como para tener la seguridad de que no usará la estrategia fuertemente dominada d_{10}. Análogamente, para justificar la eliminación de la fila d_8 en el Paso 3, el jugador I ha de saber que la jugadora II suprimirá la columna d_9 en el Paso 2. Así pues, el jugador I ha de saber que la jugadora II sabe que el jugador I no es tan irracional como para jugar una estrategia fuertemente dominada. Para justificar la eliminación de la columna d_7 en el Paso 4, la jugadora II ha de saber que el jugador I sabe que la jugadora II que el jugador I no es tan irracional como para jugar una estrategia fuertemente dominada. Para justificar un número arbitrario de eliminaciones de estrategias fuertemente dominadas, es necesario asumir que es *conocimiento común* que ninguno de los jugadores es lo bastante irracional como para jugar una estrategia fuertemente dominada.

No es esta la primera vez que mencionamos el conocimiento común. En este punto, sin embargo, es importante que el término se entienda con el significado técnico con el que es usado por los especialistas en teoría de juegos. En teoría de juegos, algo es conocimiento común si todo el mundo lo sabe; si todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe; si todo el mundo sabe que todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe; y así sucesivamente. Los especialistas en teoría de juegos asumen habitualmente que las reglas del juego y las preferencias de los jugadores son conocimiento común. Al analizar un juego, normalmente también necesitan suponer que el hecho que todos los jugadores comparten unos principios de racionalidad apropiados también es conocimiento común (aunque raramente los hacen



	LL	LR	RL	RR
l	1, 0	1, 0	2, 3	2, 3
r	0, 1	3, 2	0, 1	3, 2

Figura 4.13. Equilibrios de Nash y subjuego-perfectos.

explícitos). El más débil de todos estos principios de racionalidad es el que aconseja no usar estrategias fuertemente dominadas[14].

4.6.3. Perfección y estrategias dominadas

El juego que usaremos en esta sección viene dado en la Figura 4.13. Se dan tanto la forma extensiva como la forma estratégica. (Obsérvese que la jugadora II dispone de cuatro estrategias puras *LL*, *LR*, *RL* y *RR* por los motivos dados en la Sección 1.3.) Los mejores pagos para el jugador I en cada columna de la forma estratégica aparecen dentro de un círculo, y lo mismo pasa con los mejores pagos de la jugadora II dentro de cada fila. Esto nos permite identificar los tres pares de estrategias puras que son equilibrios de Nash: (*r*, *LR*), (*l*, *RL*) y (*r*, *RR*). Los segmentos doblados en la forma extensiva han sido obtenidos usando el algoritmo de Zermelo. Esto descubre que sólo (*r*, *RR*) es un equilibrio subjuego-perfecto. Recuérdese de la Sección 1.8.2 que algunos equilibrios de Nash son inaceptables porque exigen a los jugadores hacer jugadas irracionales en nodos que no serían alcanzados si se utilizaran las estrategias de los equilibrios de Nash. Por ejemplo, el equilibrio de Nash (*r*, *LR*) le pide a la jugadora II que opte por *L* en el nodo *b*. Este es un plan irracional porque la elección de *L* en el nodo *b* le proporciona a la jugadora II un pago de 0, mientras que la elección de *R* le proporciona un pago de 3. Análogamente, el equilibrio de Nash (*l*, *RL*) le pide a la jugadora II que opte por la elección irracional de *L* en el nodo *c*. Sólo el equilibrio de Nash subjuego-perfecto (*r*, *RR*) está libre de estas irracionalidades y es, por tanto, viable como una solución racional para el juego.

[14] Volveremos sobre estas cuestiones en el Capítulo 10. La Sección 10.8.2 es particularmente relevante.

Se podría objetar que no importa que la jugadora II piense actuar irracionalmente en el nodo c, cuando se utiliza el equilibrio de Nash (l, RL), porque el nodo c no será alcanzado si el jugador I escoge l en el nodo a. Pero esto no es correcto. La razón por la cual los jugadores continúan usando sus estrategias de equilibrio es por lo que ocurriría si llegaran a desviarse de ellas. Supongamos, por ejemplo, que un libro de teoría de juegos supuestamente prestigioso recomendara el equilibrio de Nash (l, RL) para jugadores racionales en el juego de la Figura 4.13. Tras leer el libro, el jugador I supondría que la jugadora II jugaría R si se alcanza el nodo b, y jugaría L si se alcanza el nodo c. El, por tanto, querría seguir el consejo del libro y jugar l porque esto le proporciona un pago de 2, mientras que jugar r sólo le da un pago de 0. Así pues, el nodo c no sería alcanzado. Pero lo que el libro diga acerca de lo que II debería planear para el caso de alcanzar el nodo c está lejos de ser irrelevante. Es este plan el que disuade al jugador I de elegir r. Pero el jugador I no debería dejarse disuadir tan fácilmente. En lugar de confiar en el libro de teoría de juegos, debería preguntarse a sí mismo: ¿seguirá la jugadora II realmente el consejo del libro y elegirá L si yo juego r? Puesto que es increíble que una jugadora racional II actúe así, el jugador I debería concluir que el consejo del libro de teoría de juegos no vale para nada. Por tanto, un libro de teoría de juegos que recomienda (l, RL) no puede conservar su prestigio. Unicamente puede sobrevivir a un examen crítico del tipo esbozado aquí si recomienda el equilibrio subjuego-perfecto (r, RR).

Hasta ahora esta sección se ha ocupado de retomar ideas presentadas con anterioridad. Ha llegado el momento de relacionar estas ideas con la eliminación de estrategias dominadas. En la forma estratégica de la Figura 4.13, la estrategia pura RR de la jugadora II domina fuertemente a LL. También domina débilmente a LR y a RL. Al suprimir LL, LR y RL nos quedamos con un juego 2×1 en el que la estrategia pura r del jugador I domina fuertemente a l. Así pues, la eliminación sucesiva de estrategias dominadas conduce al equilibrio subjuego-perfecto (r, RR).

Esto no es por casualidad. El algoritmo de Zermelo y la eliminación de estrategias dominadas están íntimamente relacionados en juegos finitos de información perfecta[15]. Por ejemplo, el segmento R del nodo b está doblado en el árbol del juego de la Figura 4.13 porque el uso de R en b proporciona a la jugadora II un pago de 3, mientras que el uso de L en b sólo le proporciona 0. En términos de estrategias, esto se puede expresar diciendo que Rx domina débilmente a Lx, tanto si $x = L$ como si $x = R$. Es decir, Rx es por lo menos tan bueno como Lx, haga lo que haga el jugador I. Análogamente, el doble segmento R en el nodo c corresponde a la observación de que yR domina débilmente a yL, tanto si $y = L$ como si $y = R$. Doblar los segmentos R en los nodos b y c, por tanto, corresponde a la eliminación de las estrategias dominadas LL, LR y RL en la forma estratégica. Doblar el segmento r en el nodo a corresponde a la eliminación de la estrategia dominada l en el juego entonces obtenido.

[15] Recuérdese que un juego de información perfecta es aquél en que los jugadores siempre saben lo que ha ocurrido en el juego hasta este momento. Los conjuntos de información sólo contienen un único nodo. Por tanto, los juegos de jugadas simultáneas de la Sección 4.2.1 son juegos de información imperfecta.

4.6.4. Advertencia

Algunos especialistas en teoría de juegos son grandes partidarios de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. A veces se encontrará usted, por consiguiente, con que el método es recomendado sin ningún tipo de reservas como una manera de «resolver» los juegos en los que su utilización conduce a un perfil estratégico único. En mi opinión, puesto que no es necesariamente irracional usar una estrategia *débilmente* dominada, es necesario ser cauto al eliminar estas estrategias, no sea que por error nos deshagamos de algo importante[16].

No caben dudas, sin embargo, sobre el valor de esta técnica como un instrumento de cálculo, si es usada discretamente. En particular, es importante tener presente que podemos perder equilibrios al eliminar estrategias débilmente dominadas. La Sección 4.6.1 ilustra este peligro en el caso de equilibrios de Nash, pero también puede pasar que se eliminen equilibrios subjuego-perfectos (incluso en juegos finitos de información perfecta). Habitualmente, los equilibrios que son eliminados no merecen mejor suerte porque nadie los usaría en la situación real de la que fue abstraído el juego. Pero no podemos confiar en que este sea siempre el caso.

Por esta razón, el método de la eliminación sucesiva de estrategias es escasamente utilizado en este libro, y nunca para decidir cuál, entre distintos equilibrios, debería ser considerado la «solución» del juego. Por ejemplo, en la Sección 4.7 es utilizado como un recurso auxiliar para determinar los equilibrios subjuego-perfectos de un juego finito de información perfecta cuya forma estratégica conocemos. Como muestra la Sección 4.6.3, se puede utilizar con este fin si la estrategias dominadas son eliminadas de la forma estratégica *en el mismo orden* que serían eliminadas si utilizaramos el algoritmo de Zermelo en la forma extensiva. Entonces queda garantizado que por el camino no perderemos equilibrios subjuego-perfectos[17]. Si el resultado final es único, *debe* ser un equilibrio subjuego-perfecto[18].

[16] Han sido publicados recientemente una serie de ejemplos que confirman la necesidad de tomar precauciones. El Ejercicio 7.9.34 es el ejemplo de Van Damme.

[17] Sin embargo, no queda garantizado que al final del proceso *únicamente* nos quedaremos con equilibrios subjuego-perfectos. Ni siquiera en el caso de juegos finitos de información perfecta ocurre necesariamente que se da una correspondencia exacta entre el uso del algoritmo de Zermelo y la eliminación ordenada de estrategias dominadas. La razón es que, al usar el algoritmo de Zermelo, a veces se puede elegir entre doblar varios segmentos que son todos ellos igualmente buenos, como en el juego de la Figura 1.18. No existen estrategias dominadas

En la discusión anterior hemos subrayado el *orden* con que se eliminan las estrategias dominadas porque de hecho en algunos casos puede alterar los resultados. El orden con que se eliminan estrategias *fuertemente* dominadas nunca es relevante, pero el Ejercicio 4.8.20 muestra que a veces se pueden obtener resultados distintos al cambiar el orden con que se eliminan estrategias *débilmente* dominadas. En particular, puede ocurrir que se pierdan equilibrios subjuego-perfectos en un juego finito de información perfecta al eliminar estrategias débilmente dominadas con el orden equivocado.

4.7. Otra vez la ruleta rusa

Mates

El juego de la ruleta rusa fue introducido en la Sección 3.3 para hacer ver que no es posible analizar juegos en general sin disponer de información sobre las actitudes de los jugadores relativas al riesgo. Las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern se ocupan de este problema. Esta sección vuelve a considerar la ruleta rusa para ver como esto funciona en la práctica.

En la ruleta rusa cada jugador ha de considerar tres resultados, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{W}$, que podemos identificar con muerte, deshonor y victoria. Sea $\Omega = \{\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{W}\}$, y escojamos las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

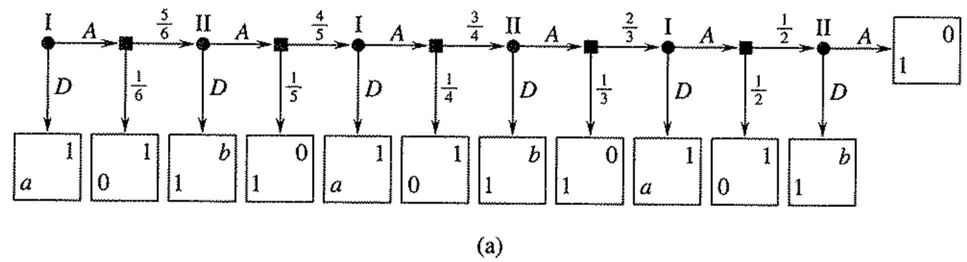
$$u_1(\mathcal{L}) = 0 \quad , \quad u_1(\mathcal{D}) = a \quad , \quad u_1(\mathcal{W}) = 1,$$
$$u_2(\mathcal{L}) = 0 \quad , \quad u_2(\mathcal{D}) = b \quad , \quad u_2(\mathcal{W}) = 1.$$

Recordemos que $u_i(\mathcal{D}) = q$, significa que el jugador i cambia $\mathcal{D}$ por la lotería $\mathbf{q}$ en la que gana $\mathcal{L}$ con probabilidad $1 - q$ y $\mathcal{W}$ con probabilidad q. Así pues, cuanto más pequeño sea el valor de $u_i(\mathcal{D})$, tanto más dispuesto estará el jugador a arriesgarse[19].

en la forma estratégica de este juego y, por tanto, la eliminación sucesiva de estrategias dominadas no elimina nada.

[18] Ya que el algoritmo de Zermelo termina necesariamente tras un número finito de pasos, los juegos finitos de información perfecta siempre tienen por lo menos un equilibrio subjuego-perfecto.

[19] Si le parece que lo horrible que es morirse está devaluado en esta discusión, fíjese, primero, en que el análisis no cambiaría sustancialmente si tomáramos $u_i(L) = -1.000$ en lugar de $u_i(L) = 0$. Esto sólo representa recalibrar las escalas de utilidad, como se explica en la Sección 3.5. No sería en absoluto realista tomar $u_i(L) = -\infty$, ni siquiera si la teoría de Von Neumann y Morgenstern lo permitiera. Una elección así implicaría que un jugador no estaría dispuesto a cruzar una calle transitada ni siquiera en el caso en que le ofrecieran un millón de dólares. La razón es que, por muchas precauciones que tome, siempre se dará una probabilidad pequeña pero positiva de ser atropellado. La utilidad esperada del jugador al aceptar la oferta sería pues necesariamente $-\infty$.



(a)

	DDD	ADD	AAD	AAA
DDD	a, 1	a, 1	a, 1	a, 1
ADD	$\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}b$	$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}a$, $\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}a$, $\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}a$, $\frac{5}{6}$
AAD	$\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}b$	$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}$
AAA	$\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}b$	$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

(b)

Figura 4.14. Una forma estratégica simplificada para la ruleta rusa.

La Figura 4.14(a) muestra una forma extensiva de la versión 2 de la ruleta rusa en la que cada nodo terminal está marcado con los pagos correspondientes al resultado que representa. La Figura 4.14(b) es una forma estratégica simplificada en la que únicamente se incluyen cuatro de las ocho estrategias puras de cada jugador. La ruleta rusa es un juego de tiempo, como el duelo. Lo único realmente importante es cuánto tiempo puede esperar un jugador antes de retirarse. Así pues, en realidad sólo necesitamos una estrategia pura para cada uno de los tiempos de espera posibles.

La Figura 4.15 muestra un método para calcular las casillas en la forma estratégica para el par de estrategias puras (*AAD*, *ADD*). Cuando se usa este par de estrategias puras, las partidas del juego que podríamos obtener dependen de las elecciones que hace la suerte. Sus elecciones se representan por *a*, por «a través», y por *d*, por «abajo». La partida [*AaAaAd*] se da si Suerte juega *a* en la primera y en la segunda jugadas de azar, y *d* en la

Partidas	$[Ad]$	$[AaAd]$	$[AaAaAd]$	$[AaAaAaD]$
Pagos	0 / 1	1 / 0	0 / 1	1 / b
Probabilidades	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

Figura 4.15. La lotería que se obtiene usando *(AAD, ADD)*.

tercera jugada de azar. La probabilidad[20] de esta partida es prob(*aad*) = 5/6 × 4/5 × 1/4 = 1/6. La utilidad esperada de la lotería obtenida al usar (*AAD*, *ADD*) se obtiene multiplicando cada uno de los pagos de un jugador por la probabilidad con que ocurre, y sumando finalmente los productos resultantes. Así pues,

$$\pi_1(AAD, ADD) = 0 \times 1/6 + 1 \times 1/6 + 0 \times 1/6 + 1 \times 1/2 = 2/3,$$

$$\pi_2(AAD, ADD) = 1 \times 1/6 + 0 \times 1/6 + 1 \times 1/6 + b \times 1/2 = 1/3 + b/2.$$

En el caso 1 de la Figura 4.16, $a = 0{,}25$ y $b = 0{,}55$. El jugador I es más indiferente ante el peligro que el jugador II. ¿Cómo afecta esto a la manera de jugar? Para responder a esta pregunta estudiaremos los equilibrios subjuego-perfectos del juego.

Como muestra el Ejercicio 4.8.25, las jugadas de azar en la forma extensiva de la ruleta rusa complican el uso directo del algoritmo de Zermelo. Sin embargo, podemos imitar el uso del algoritmo de Zermelo en la forma extensiva del juego si eliminamos estrategias dominadas en la forma estratégica en el mismo orden con que serían eliminados si el algoritmo de Zermelo fuera usado en la forma extensiva. Al usar el algoritmo de Zermelo, empezaríamos por el último nodo de decisión, donde el jugador II ha de elegir entre *A* y *D*. Como se ha explicado en la Sección 4.6.3, esta elección es equivalente a elegir entre las estrategias puras *AAA* y *AAD*. El primer paso al eliminar estrategias en el caso 1 de la Figura 4.16, por tanto, consiste en decidir cuál de las columnas *AAA* y *AAD* domina a la otra. Para el segundo paso, es necesario prestar atención al penúltimo nodo de decisión. En este nodo, el jugador I ha de elegir entre *A* y *D*. Esta elección es equivalente a decidir entre las estrategias puras *AAA* y *AAD*. Así pues, el Paso 2 consiste en determinar cuál de las filas *AAA* y *AAD* domina a la otra después de suprimir la columna eliminada en el Paso 1. La serie completa de pasos es la siguiente:

Paso 1. Eliminar la columna *AAA* porque está dominada por la columna *AAD*.

[20] En lugar de calcular, se puede observar simplemente que esta es la probabilidad 1/6 de que la bala se encuentre en la tercera cámara del revolver.

	DDD	*ADD*	*AAD*	*AAA*
DDD	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00
ADD	0,83 / 0,63	0,33 / 0,83	0,33 / 0,83	0,33 / 0,83
AAD	0,83 / 0,63	0,67 / 0,61	0,42 / 0,67	0,42 / 0,67
AAA	0,83 / 0,63	0,67 / 0,61	0,50 / 0,59	0,50 / 0,50

Caso 1: $a = 0{,}25$, $b = 0{,}55$

	DDD	*ADD*	*AAD*	*AAA*
DDD	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00	0,25 / 1,00
ADD	0,83 / 0,37	0,33 / 0,83	0,33 / 0,83	0,33 / 0,83
AAD	0,83 / 0,37	0,67 / 0,46	0,42 / 0,67	0,42 / 0,67
AAA	0,83 / 0,37	0,67 / 0,46	0,50 / 0,54	0,50 / 0,50

Caso 2: $a = 0{,}25$, $b = 0{,}25$

	DDD	*ADD*	*AAD*	*AAA*
DDD	0,95 / 1,00	0,95 / 1,00	0,95 / 1,00	0,95 / 1,00
ADD	0,83 / 0,96	0,80 / 0,83	0,80 / 0,83	0,80 / 0,83
AAD	0,83 / 0,96	0,67 / 0,81	0,65 / 0,67	0,65 / 0,67
AAA	0,83 / 0,96	0,67 / 0,81	0,50 / 0,66	0,50 / 0,50

Caso 3: $a = 0{,}95$, $b = 0{,}95$

Figura 4.16. Tres casos particulares.

	Valores de los parámetros		Jugador I	Jugadora II
I imprudente, II cauta	$a = 0{,}25$	$b = 0{,}55$	*AAA*	*DDD*
Ambos imprudentes	$a = 0{,}25$	$b = 0{,}25$	*AAA*	*AAD*
Ambos cautos	$a = 0{,}95$	$b = 0{,}95$	*DDD*	*DDD*

Figura 4.17. Comparación de conductas en los tres casos estudiados.

Paso 2. Eliminar la fila *AAD* en el juego que se obtiene porque está dominada por la fila *AAA*.

Paso 3. Eliminar la columna *AAD* en el juego que se obtiene porque está dominada por la columna *ADD*.

Paso 4. Eliminar la fila *ADD* en el juego que se obtiene porque está dominada por la fila *AAA*.

Paso 5. Eliminar la columna *ADD* en el juego que se obtiene porque está dominada por la columna *DDD*.

Paso 6. Eliminar la fila *DDD* en el juego que se obtiene porque está dominada por la fila *AAA*.

Después de estas eliminaciones sólo queda el par (*AAA*, *DDD*). Por las razones dadas en la Sección 4.6.4, se sigue que este es el único equilibrio subjuego-perfecto del juego[21].

En el caso 2 de la Figura 4.16 $a = 0{,}25$ y $b = 0{,}\ 25$, luego ambos jugadores son imprudentes. Procediendo, como en el caso 1, a eliminar estrategias dominadas en el orden apropiado, hallamos que el único equilibrio subjuego-perfecto es (*AAA*, *AAD*).

En el caso 3, $a = 0{,}95$ y $b = 0{,}\ 95$, luego ambos jugadores son cautos. Aquí el único equilibrio subjuego-perfecto es (*DDD*, *DDD*). (Obsérvese que, en el caso 3, existen *cuatro* equilibrios de Nash, pero tres de ellos son eliminados por el camino y, por tanto, no son subjuego-perfectos.)

La Figura 4.17 resume las conclusiones. Es importante observar que las actitudes de los jugadores respecto a la asunción de riesgos influye enormemente en la manera de jugar el juego. Pero no hay que pretender extraer ninguna conclusión de los *pagos* que cada jugador consigue en distintas

[21] Un camino alternativo a la misma conclusión es rodear el mejor pago del jugador I en cada columna y el mejor pago de la jugadora II en cada fila. Esto mostrará que el único par de estrategias puras que es un equilibrio de Nash es (*AAA*, *DDD*). Puesto que existe por lo menos un equilibrio subjuego-perfecto y todo equilibrio subjuego-perfecto es un equilibrio de Nash (Sección 1.8.2), se sigue que (*AAA*, *DDD*) debe ser subjuego-perfecto.

versiones del juego. Recuérdese de la Sección 3.5.3 que no tiene por qué tener sentido la comparación de las utilidades de distintos jugadores.

No deberíamos, por ejemplo, comparar los casos 2 y 3 y concluir que a dos prudentes caballeros de mediana edad les va mejor el juego, cuando juegan uno contra el otro, que a dos fogosos jóvenes. Es cierto que ambos jugadores consiguen un pago de aproximadamente 1 en el caso 3, mientras sólo consiguen un pago de aproximadamente 1/2 en el caso 2. Pero, ¿qué satisfacción produce a un hombre mayor vencer con seguridad? Tal vez mucho menor que la que a un joven le produce disponer de la mitad de las oportunidades de vencer, incluso cuando una cara de la moneda representa una probabilidad del 50 por 100 de ser alcanzada por un disparo.

4.8. Ejercicios

1. Construir una forma estratégica simplificada para el duelo como en la Sección 4.1.2, pero tomando $p_1(d) = p_2(d) = 1 - d^2$. (Este caso fue estudiado en el Ejercicicio 2.6.13, pero ahora $D = 1$.) Rodear el mejor pago para el jugador I en cada columna y el mejor pago para el jugador II en cada fila. A partir de aquí, hallar un equilibrio de Nash. ¿A qué distancia estarán los jugadores cuando el primero dispare? ¿Quién disparará primero?
2. Jerry se puede esconder en el dormitorio, el estudio o en la cocina. Tom puede buscarle en uno, pero sólo en uno, de estos sitios. Si le busca donde se está escondiendo, le caza con toda seguridad, en caso contrario Jerry se escapa.
   a) Asignar de forma apropiada utilidades de Von Neumann y Morgenstern a los posibles resultados.
   b) Dibujar el árbol del juego para el caso en que Tom puede ver dónde se esconde Jerry antes de buscarle. Hallar el juego bimatricial 3×27 que es la forma estratégica correspondiente. (Jerry es el jugador I.)
   c) Dibujar el árbol del juego para el caso en que Jerry puede ver antes de esconderse dónde le va a buscar Tom. Hallar el juego bimatricial 27×3 que es la forma estratégica correspondiente.
   d) Dibujar dos árboles de juego que correspondan ambos al caso en que los dos, Tom y Jerry, toman decisiones ignorando la elección del otro. Hallar el juego bimatricial 3×3 que es la forma estratégica correspondiente.
   e) En todos los casos, hallar los pares de estrategias puras que son equilibrios de Nash[22].

[22] La literatura económica suele ser confusa cuando quiere establecer paralelos en el terreno de la economía a estos juegos de gato y ratón. Véase en la Sección 7.2.2 una discusión de la noción de «equilibrio de Stackelberg».

Revisión 3. Dados

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

decidir cuál de las siguientes expresiones tiene sentido. Cuando lo tengan, hallar las matrices que representan.
a) $A + B$ *b*) $B + C$ *c*) $A^{\mathrm{T}} + B$
d) $3A$ *e*) $3B - 2C$ *f*) $A - (B + C)^{\mathrm{T}}$

Revisión 4. Responder las siguientes preguntas sobre las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) ¿Por qué tiene sentido AB? ¿Por qué no tiene sentido BA? Calcular AB.
b) ¿Por qué tienen sentido BC y CB? ¿Es cierto que $BC = CB$?
c) Calcular $(AB)C$ y $A(BC)$ y mostrar que son iguales.
d) Comprobar que $(BC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$.

Revisión 5. Mostrar que el sistema de «ecuaciones lineales»

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

se puede expresar en la forma $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; \text{y} \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Revisión 6. Dados los vectores columa 2×1

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; y = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \; ; \; z = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

hallar
a) $x + y$ *b*) $3y$ *c*) $-2z$
d) $y - z$ *e*) $2x + y$.
Ilustrar cada resultado geométricamente.

Revisión 7. Si x e y son vectores columna $n \times 1$, explicar por qué $x^{\mathrm{T}}y$ y xy^{T} siempre están definidos, pero $x^{\mathrm{T}}y \neq xy^{\mathrm{T}}$ excepto si $n = 1$. ¿Por qué es cierto que $x^{\mathrm{T}}y = y^{\mathrm{T}}x$ para todo n?

Revisión 8. Dados los vectores columna 3×1

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; y = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \; ; \; z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

hallar
a) $x^{\mathrm{T}}x$ *b*) $x^{\mathrm{T}}y$ *c*) $x^{\mathrm{T}}z$
d) $y^{\mathrm{T}}z$ *e*) $\|x\|$ *f*) $\|x - y\|$.
Verifíquese que $x^{\mathrm{T}}(3y + 2z) = 3x^{\mathrm{T}}y + 2x^{\mathrm{T}}z$.

Revisión 9. Utilizar los resultados del Ejercicio 4.8.8 para determinar lo siguiente:
a) La distancia de 0 a x.
b) La distancia de x a y.
c) Qué vectores, entre x, y, z, son ortogonales.

Revisión 10. Para cualquier vector 1×2 y, los conjuntos

$$A = \{x : x \geqslant y\}$$
$$B = \{x : x > y\}$$
$$C = \{x : x \gg y\}$$

representan regiones de $\mathbf{R}^2$. Dibujar estas regiones para el caso $y = (1, 2)$. Decir si z pertenece a A, B o C para cada uno de los siguientes vectores z:
a) $z = (2, 3)$ *b*) $z = (2, 2)$
c) $z = (1, 2)$ *d*) $z = (2, 1)$.

11. Cada una de las ecuaciones siguientes define un plano en $\mathbf{R}^3$. Para cada una de ellas, hallar un vector p ortogonal al plano y tal que $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant 0$ y $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$
b) $-x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6$
c) $x_2 + x_3 = 0$.

12. Cada una de las ecuaciones siguientes define una recta en $\mathbf{R}^2$. Para cada una de ellas, hallar un vector p ortogonal a la recta y tal que $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ y $p_1 + p_2 = 1$.
a) $x_1 + 2x_2 = 10$
b) $-x_1 - 3x_2 = 6$
c) $x_2 = 0$.
¿Cuál es la relación entre la pendiente de cada una de estas rectas y la razón p_1/p_2?

Mates 13. Hallar $\nabla g(1, 2)$ cuando $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ está definida por $g(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. A partir de aquí determinar un vector normal a la curva $x_1^2 x_2 = 2$ en el punto $(1, 2)^{\mathrm{T}}$. Escribir la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 2)^{\mathrm{T}}$.

Econ

14. La función de utilidad de Pandora $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ queda definida por $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. El vector precio p viene dado por $p = (2, 1)^\top$. Pandora puede gastarse 4 dólares. ¿Cuál es su combinación de consumo óptima sujeta a su restricción presupuestaria?

Econ

15. La función de utilidad de Pandora $U : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ queda definida por $U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3$. El vector precio p viene dado por $p = (1, 1, 1)^\top$. Pandora puede gastarse 8 dólares. ¿Cuál es su combinación de consumo óptima sujeta a su restricción presupuestaria?

Fun

16. El coronel Blotto puede mandar cada una de sus cinco compañías a una de entre diez posiciones cuya importancia está valorada en 1, 2, 3, ..., 10, respectivamente. A cada posición sólo se puede mandar una compañía. Su oponente, el conde de Baloney, debe hacer lo mismo simultáneamente con sus cuatro compañías. Cualquier posición no defendida que es atacada es capturada. Si una misma posición es atacada por ambos bandos, ninguno de los dos la captura. El pago de cada uno de estos jefes es la suma de los valores de las posiciones que captura menos la suma de los valores de las posiciones capturadas por el enemigo. ¿Qué haría el coronel Blotto si supiera lo que es una estrategia dominada?
17. Utilizar el método de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas en la forma estratégica simplificada obtenida en el Ejercicio 4.8.1. ¿Por qué el resultado es un equilibrio subjuego-perfecto?
18. Mostrar que el juego de la Sección 1.9.2 tiene dos equilibrios subjuego-perfectos. Escribir una forma estratégica y aplicar el método de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas en la medida en que sea posible. Mostrar con ello que este método no elimina necesariamente los pares de estrategias puras que no son equilibrios de Nash.
19. Utilizar el juego bimatricial de la Figura 4.18 para mostrar que se pueden perder equilibrios de Nash al aplicar el método de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. El equilibrio de Nash que aquí se pierde, ¿es uno cuya pérdida habría que lamentar?
20. Utilizar el juego bimatricial de la Figura 4.19 para mostrar que podemos obtener resultados distintos al eliminar en distinto orden estrategias débilmente dominadas.

1, 1	100, 0
0, 100	100, 100

Figura 4.18. El juego bimatricial del Ejercicio 4.8.19.

0, 0	0, 1
1, 0	0, 0

Figura 4.19. El juego bimatricial del Ejercicio 4.8.20.

Filo

21. Si el par de estrategias puras (d_6, d_5) tuviera que ser defendido como solución del juego bimatricial de la Figura 4.1 basándose en afirmaciones como:

> Todo el mundo sabe que todo el mundo sabe que ... todo el mundo sabe que nunca nadie usa una estrategia debilmente dominada,

¿cuántas veces debería aparecer la frase «todo el mundo sabe»?

22. Construir un juego finito de información perfecta en el que un equilibrio subjuego-perfecto se pierde si eliminamos estrategias débilmente dominadas de la forma estratégica en un orden determinado. (No es necesario que el árbol del juego sea muy complicado.)
23. En la versión 2 de la ruleta rusa explíquese por qué

$$\pi_1(ADD, AAD) = 1/6 + (2/3)a,$$
$$\pi_2(ADD, AAD) = 5/6.$$

24. Muéstrese que existen dos equilibrios de Nash en la forma estratégica simplificada de la ruleta rusa cuando $a = 0{,}25$ y $b = 0{,}65$ (Sección 4.7). ¿Por qué sólo uno de ellos es subjuego-perfecto?
25. En la versión 2 de la ruleta rusa, utilícese el algoritmo de Zermelo para hallar todos los equilibrios subjuego-perfectos en los casos 1, 2 y 3 de la Sección 4.7. (En cada caso utilícese un modelo distinto del esqueleto del árbol del juego de la Figura 4.20. Comenzar, hacia

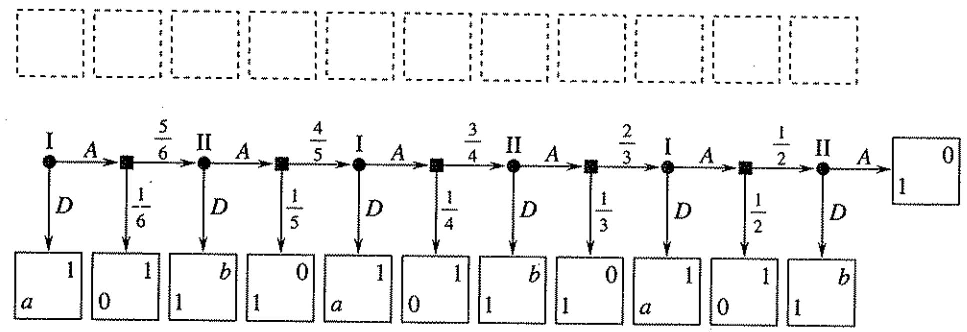


Figura 4.20. El esqueleto de un árbol de juego para la ruleta rusa.

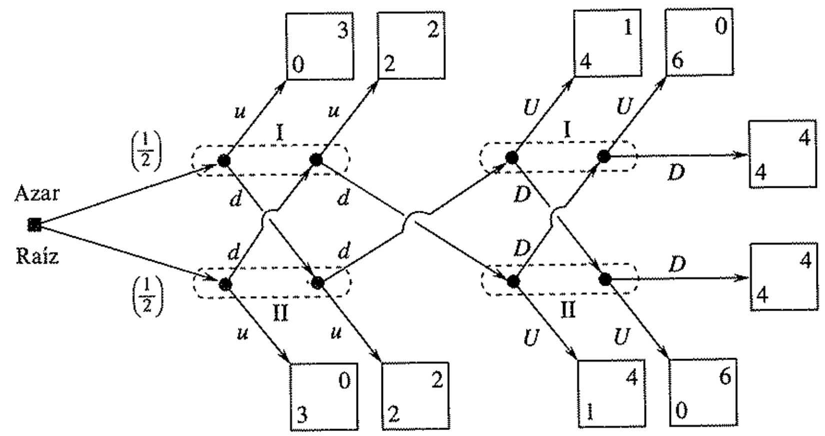


Figura 4.21. La forma extensiva para el Ejercicio 4.8.27.

atrás, por el final del árbol, doblando los segmentos que representan juego óptimo. En las casillas dibujadas encima de cada nodo no terminal x, escribir los pagos que conseguiría cada jugador si se alcanzara el nodo x y los jugadores hubieran jugado óptimamente en el subjuego cuya raíz es x.

26. Explicar qué estrategias puras coloca usted en la categoría de «débilmente dominada» cuando dobla segmentos al utilizar el algoritmo de Zermelo en el caso 1 del Ejercicio 4.8.25.
27. Obtener la forma estratégica 4×4 del juego cuya forma extensiva se da en la Figura 4.21. Eliminando estrategias dominadas, mostrar que (dU, dU) es un equilibrio de Nash. ¿Existen otros equilibrios de Nash?
28. Escribir la forma estratégica 3×8 de la versión de la ruleta de Gale dada en el Ejercicio 3.7.15 para las funciones de utilidad dadas en el Ejercicio 3.7.16. Aplicar el método de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas a esta forma estratégica.

Econ

29. Un filántropo excéntrico está dispuesto a donar hasta mil millones de dólares a una universidad. Invita a los rectores de Yalebridge y Harford a la habitación de un hotel donde tiene los mil millones de dólares en un maletín, y explica a sus invitados que le gustaría que los dos rectores jugaran un juego[23] para decidir qué universidad se queda con la donación. El árbol del juego se muestra en la Figura 4.22. La primera jugada consiste en que el filántropo ofrece 1 dólar al jugador I (Yalebridge), quien puede aceptarlo o rechazarlo. Si

[23] El juego es una adpatación de Reny de un juego introducido por Rosenthal. Es conocido como el ciempiés porque el árbol del juego tiene muchas «patas».

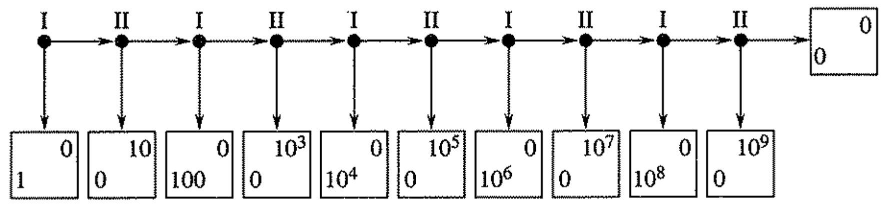


Figura 4.22. El ciempiés de Rosenthal.

lo rechaza, el filántropo ofrece 10 dólares a la jugadora II (Harford). Si los rechaza, se ofrece 100 dólares al jugador I, y así sucesivamente. Después de cada rechazo se ofrece una cantidad diez veces mayor al otro jugador o jugadora. Si se dan diez rechazos, a la jugadora II le serán ofrecidos los mil millones. Si los rechaza, el filántropo coge el dinero y se lo vuelve a llevar al banco.

a) Analícese el juego utilizando el algoritmo de Zermelo y hallar el único equilibrio subjuego-perfecto. ¿Qué resultaría al eliminar sucesivamente estrategias débilmente dominadas en este juego?

b) ¿Es probable que los rectores de Yalebridge y Harford confíen tanto en la racionalidad del otro como para que llegara a darse el caso que ambos jugaran en la práctica el equilibrio subjuego-perfecto? (Véase la Sección 1.8.3.) ¿Cuál sería su predicción acerca de lo que haría el rector de Yalebridge si se le ofrecieran 100.000 dólares (si se hubiera dado el caso que las ofertas menores habían sido rechazadas)?

c) ¿Cómo jugaría usted este juego?[24].

Econ

30. El jugador I juega en primer lugar el juego de la cadena de supermercados de la Figura 1.24 contra el jugador II, y a continuación lo vuelve a jugar contra el jugador III que ha sustituido al jugador II. El resultado es el juego de tres jugadores ilustrado por la Figura 4.23.

a) Mostrar que tanto el algoritmo de Zermelo como la eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadas conduce a la conclusión que todos los jugadores escogerán «izquierda» en el juego de la Figura 4.23.

b) Explicar por qué se obtendría la misma conclusión si el juga-

[24] Hay gente que encuentra una semejanza entre este problema y la historia del «examen inesperado». Un profesor anuncia a sus estudiantes que les va a poner un examen algún día de la semana próxima. Ellos le preguntan qué día será y les contesta que será un día en el que no se lo esperen. Ellos deducen que no puede ser el viernes, porque se lo esperarían el viernes si no se lo hubiera puesto el lunes, martes, miércoles o jueves. Entonces deducen que tampoco se lo puede poner el jueves, y así sucesivamente. Luego, según argumentan los estudiantes, el examen no se lo puede poner nunca, y nadie estudia. ¡Pero el lunes por la mañana el profesor les pone un examen y todos se sorprenden!

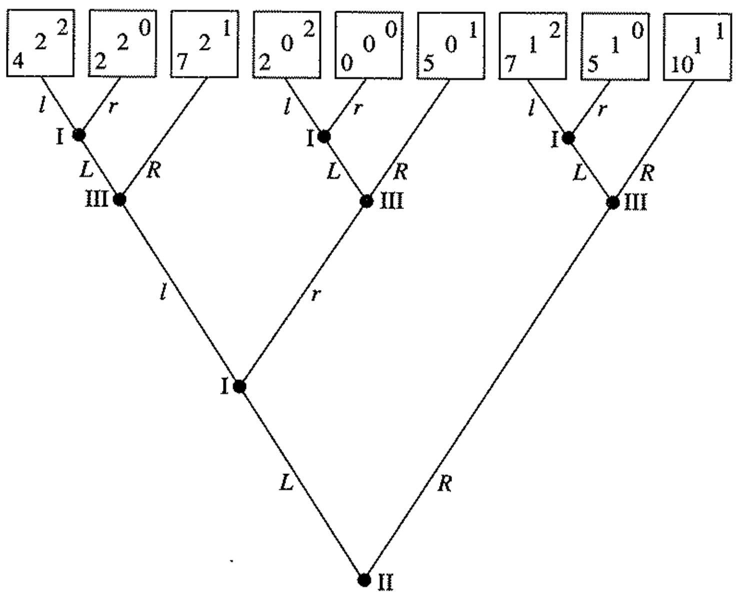


Figura 4.23. El juego de la cadena de supermercados jugado dos veces.

dor I jugara el juego de la cadena de supermercados sucesivamente contra 100 personas distintas[25].

c) Revisar los Ejercicios 1.10.22 y 1.10.23. Interpretar el jugador I como un monopolio que domina el mercado y los demás jugadores como empresas independientes que están considerando entrar en el mercado (entrantes potenciales) en 100 ciudades distintas. Si se diera el caso que los entrantes potenciales llegaran a entrar efectivamente en el mercado en 99 ciudades y el monopolio dominante decidiera responder luchando en las 99 ciudades, ¿cuál sería probablemente la predicción del último entrante potencial acerca de la reacción del monopolio a su entrada en el mercado? ¿Cómo actuaría el último entrante potencial después de hacer la predicción que le acaba de atribuir? ¿Qué se deduce al comparar esta conducta con la que se le asigna al último entrante potencial cuando se usan el algoritmo de Zermelo o la eliminación de estrategias débilmente dominadas para analizar el juego?

d) ¿Qué haría usted si fuera el monopolio dominante? ¿Por qué no es irracional esta conducta?

[25] Esta es la «paradoja de la cadena de supermercados» de Selten. El resto del ejercicio trata de por qué la conclusión debería parecer paradójica.

C A P I T U L O

5

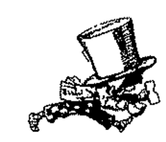
Cerrar tratos

5.1. Introducción

La teoría de juegos no sólo se ocupa de conflictos: también se ocupa de la cooperación. Por ejemplo, si una persona quiere vender su casa y otra persona quiere comprarla, entonces los dos individuos están interesados en transferir la propiedad del uno al otro. Esto requiere que cooperen en la firma de un contrato de compraventa. Pero hay muchos precios a los que la casa se puede vender. El vendedor prefiere precios altos y el comprador los prefiere bajos. Por tanto, el conflicto existe en potencia. Si ni el comprador y ni el vendedor han de perder lo que pueden ganar por medio de la cooperación, deben encontrar alguna manera de resolver el conflicto.

Han surgido instituciones sociales que regulan estas transacciones. En particular, la compraventa de casas empieza habitualmente con un período de negociación seguido de la firma de un contrato vinculante, o que obliga a las partes. El presente capítulo se ocupa de modelos que intentan estudiar estas instituciones utilizando ideas de la teoría de juegos.

5.2. Convexidad



Revisión 5.3 ⟶

La primera parte del capítulo describe un tratamiento axiomático del problema de la negociación. El tratamiento requiere discutir previamente la noción de conjunto convexo. Esta idea también será muy útil en capítulos posteriores.

5.2.1. Combinaciones convexas

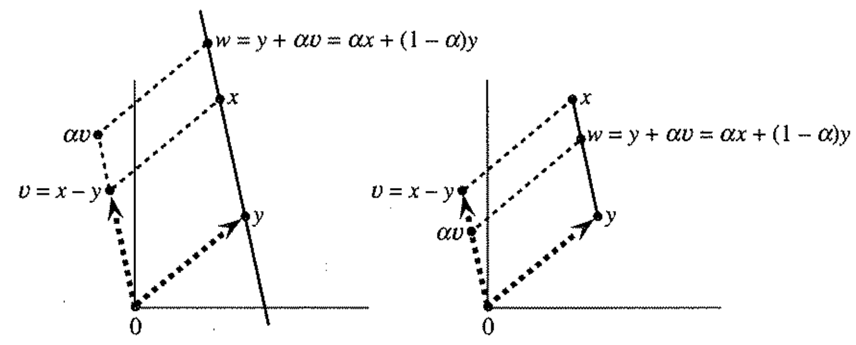
Si α y β son escalares y x e y son vectores de $\mathbb{R}^2$, la *combinación lineal* $\alpha x + \beta y$ se define por

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2).$$

Decimos que una combinación lineal $w = \alpha x + \beta y$ es una *combinación afín* de x e y si $\alpha + \beta = 1$. Así pues,

$$w = \alpha x + (1 - \alpha)y = y + \alpha(x - y)$$

es una combinación afín de x e y. La Figura 5.1(a) muestra que el conjunto de todas las combinaciones afines de x e y es la línea recta que pasa por los puntos x e y. (O, equivalentemente, es la línea recta que pasa por y con la dirección del vector $v = x - y$.)



(a) (b)

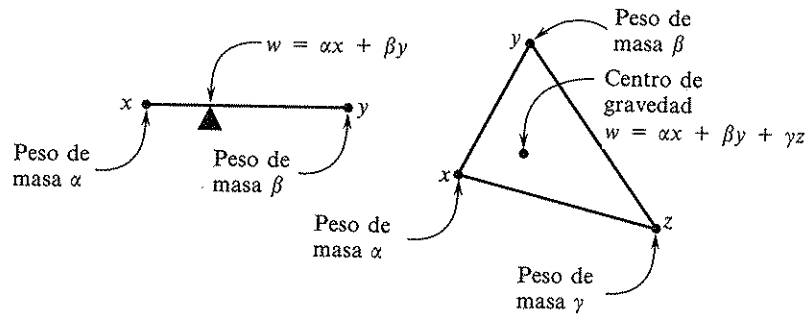
Figura 5.1. Combinaciones afines y convexas.

Una *combinación convexa* de dos vectores x e y es una combinación lineal $w = \alpha x + \beta y$ en la que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$. La Figura 5.1(b) muestra que el conjunto de todas las combinaciones convexas de x e y es el segmento de línea recta que une x e y.

En la Figura 5.1(b), sea d la longitud del vector $v = x - y$. Entonces la longitud del vector $(2/3)v$ es $(2/3)d$. Se sigue que

$$w = (2/3)x + (1/3)y$$

se encuentra en el punto de la recta que une x e y situado a la distancia $(1/3)d$ de x y a la distancia $(2/3)d$ de y. Imagínese el segmento como una pieza de alambre rígido sin peso propio pero con un peso de masa 2/3 en x y un peso de masa 1/3 en y. Entonces w se encuentra en el *centro de gravedad* del sistema. Como muestra la Figura 5.2(a), el sistema estará en equilibrio si se hace descansar en w.



(a) (b)

Figura 5.2. Centros de gravedad.

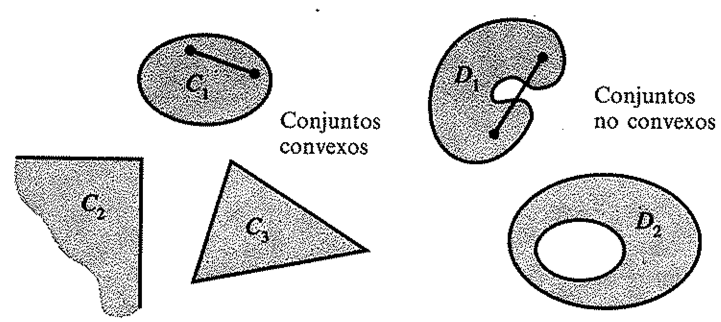


Figura 5.3. Conjuntos convexos y no convexos.

La expresión

$$w = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$$

es una combinación lineal de los k vectores $x_1, x_2, ..., x_k$. Esta expresión se convierte en una combinación afín cuando $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$. Es una combinación convexa cuando $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$ y $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, ..., \alpha_k \geqslant 0$. La Figura 5.2(b) muestra que la combinación convexa $w = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ se encuentra en el centro de gravedad del sistema formado por pesos de masas α_i colocados en los puntos x_i.

En economía los vectores se usan para representar combinaciones de mercancías. Por ejemplo, en la Sección 3.2.1 el vector (2, 6) representa la combinación en la que Pandora obtiene 2 botellas de ginebra y 6 botellas de vodka. La combinación (5, 3) le asigna 5 botellas de ginebra y 3 botellas de vodka. La combinacion convexa

$$1/3(2, 6) + 2/3(5, 3) = (4, 4)$$

corresponde a una mezcla física de ambos paquetes. La cantidad de cada mercancía en la mezcla se obtiene tomando 1/3 de esta mercancía de la primera combinación y 2/3 de la mercancía contenida en la segunda combinación.

5.2.2. Conjuntos convexos

Un conjunto C es convexo si, siempre que contiene dos puntos x e y, también contiene el segmento que los une. La Figura 5.3 muestra algunos conjuntos convexos, C_1, C_2 y C_3, junto a algunos conjuntos D_1 y D_2 que no lo son.

Algebraicamente[1], un conjunto C es *convexo* si siempre que $x \in C$ e $y \in C$, entonces

$$\alpha x + \beta y \in C,$$

[1] Recordemos que $x \in S$ significa que x es un elemento (o miembro) del conjunto S.

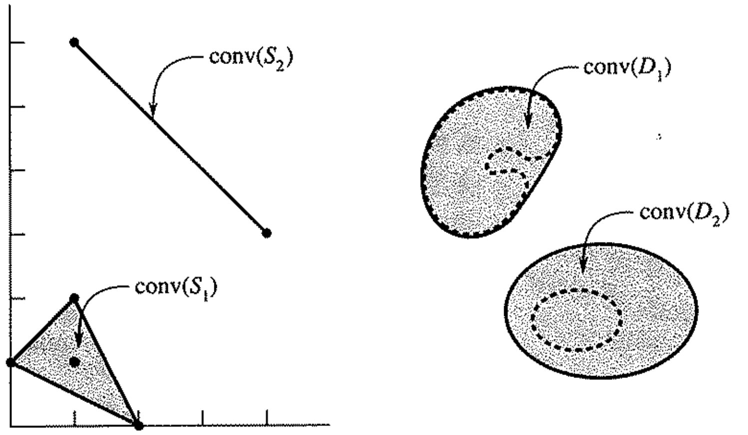


Figura 5.4. Clausuras convexas.

para toda combinación convexa $\alpha x + \beta y$ de x e y. Es fácil comprobar que un conjunto convexo contiene necesariamente todas las combinaciones convexas de un número cualquiera de sus elementos.

La *clausura convexa* de un conjunto S se designa por conv(S). Es el menor conjunto convexo que contiene a S y está formado por todas las combinaciones convexas de los puntos de S. La Figura 5.4 muestra las clausuras convexas de los conjuntos $S_1 = \{(0, 1), (2, 0), (1, 3), (1, 1)\}$ y $S_2 = \{(1, 6), (4, 3)\}$. También muestra las clausuras convexas de los conjuntos D_1 y D_2 de la Figura 5.3.

5.2.3. Rectas soporte

Una recta divide el plano $\mathbb{R}^2$ en dos «semi-espacios», como muestra la Figura 5.5. Si el interior de un conjunto convexo C se encuentra en uno de los

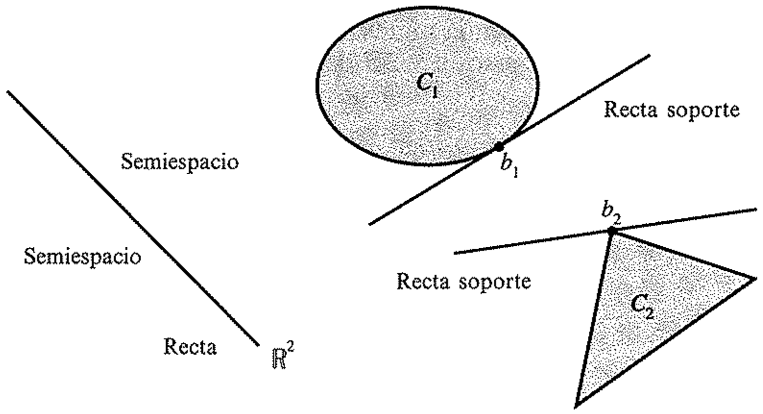


Figura 5.5. Rectas soporte.

semi-espacios definidos por una recta l que pasa por uno de los puntos frontera b de C, entonces diremos que l es una *recta soporte* de C en b.

5.2.4. Funciones cóncavas, convexas y afines

Recordemos que un criterio para definir una función cóncava es que las cuerdas trazadas desde puntos de su gráfica a puntos de su gráfica se encuentran en la gráfica o por debajo de ella. Así, en la Figura 3.7, el segmento que une los puntos $(1, u(1))$ y $(16, u(16))$ se encuentra necesariamente en, o debajo de, la gráfica de la función $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 4\sqrt{x}$. Los puntos de este segmento son combinaciones convexas de $(1, u(1))$ y $(16, u(16))$. El punto P señalado en la Figura 3.7 es la combinación convexa

$$4/5(1, u(1)) + 1/5(16, u(16)) = (4, 4/5\, u(1) + 1/5\, u(16)).$$

Puesto que este punto se encuentra en, o por debajo de, la gráfica, debe cumplirse que

$$u(4) = u(4/5 \times 1 + 1/5 \times 16) \geqslant 4/5u(1) + 1/5u(16).$$

Una generalización de este razonamiento conduce al siguiente criterio algebraico para definir una función cóncava. Sea C un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es cóncava en C si, y sólo si, para cada x e y de C,

$$f(\alpha x + \beta y) \geqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$$

siempre que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$. Esto se traduce geométricamente por la condición de que el conjunto de puntos en, o por debajo de, la gráfica de la función es convexo.

La condición que define una función convexa es que para cada x e y de C,

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$$

siempre que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$. Esto se traduce geométricamente por la condición de que el conjunto de puntos en, o por encima de, la gráfica de la función es convexo.

La condición que define una función afín es que para cada x e y de C,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

siempre que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$[2]. Las funciones afines, por tanto, se caracterizan por la condición de conservar las combinaciones convexas. Más

[2] Si $C = \mathbb{R}^n$, la condición $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$ es redundante. Sin la condición $\alpha + \beta = 1$, la condición $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ caracteriza a las funciones lineales.

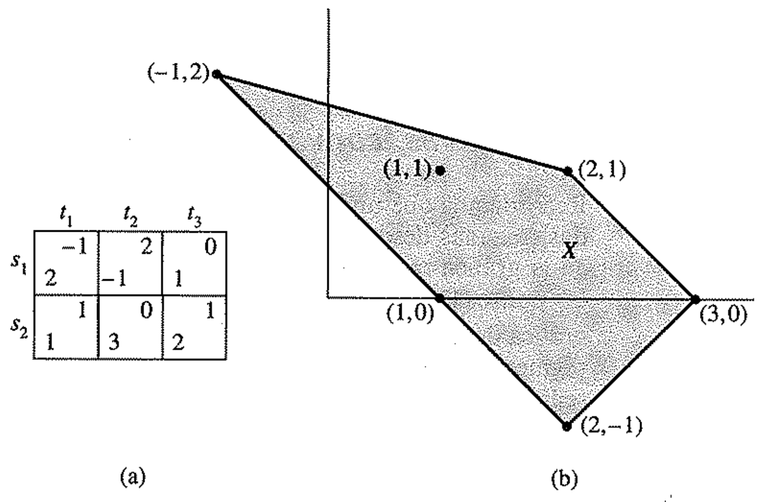


Figura 5.6. Una región de pagos.

exactamente, si z es una combinación convexa de x e y, entonces $f(z)$ es la misma combinación convexa de $f(x)$ y $f(y)$. Esto es, $z = \alpha x + \beta y \Rightarrow f(z) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Se sigue de aquí que las funciones afines preservan las estructuras convexas. Por ejemplo, si l es una recta soporte del conjunto convexo S en b, entonces $f(l)$ es una recta soporte del conjunto convexo $f(S)$ en $f(b)$[3].

5.3. Regiones de beneficio cooperativo

Supongamos que los jugadores de un juego pueden firmar, antes de empezar el juego, un acuerdo vinculante, o que les obliga, sobre las estrategias que deben ser utilizadas. El conjunto de pares de pagos que pueden conseguir de esta forma será llamado la *región de pagos cooperativos* del juego.

5.3.1. Contratos que especifican loterías

La Figura 5.6(a) muestra un juego bimatricial. La clausura convexa de todos los pares de pagos que aparecen en este juego bimatricial aparece en la Figura 5.6(b).

[3] Cuando X es un conjunto, la notación $f(X)$ representa el conjunto imagen de X por la función f. Esto es,

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Si a los jugadores se les permite firmar, antes de empezar el juego, un contrato que les obliga sobre qué estrategias puras hay que utilizar, entonces pueden conseguir cualquier par de pagos del conjunto X. Esto es evidente, por ejemplo, en el caso del par de pagos (1, 1). Sólo es necesario que el contrato especifique que hay que usar el par de estrategias puras (s_2, t_1). Sin embargo, ningún par de estrategias puras conduce al par de pagos (2, 0).

Para conseguir el par de pagos (2, 0), los jugadores deben firmar un contrato especificando que utilizarán una lotería. Por ejemplo, el contrato podría especificar que hay que lanzar una moneda. Si sale cara, hay que utilizar el par de estrategias puras (s_2, t_3). Si sale cruz, hay que utilizar el par de estrategias puras (s_1, t_1). La utilidad de Von Neumann y Morgenstern que consigue el jugador I es

$$1/2\pi_1(s_2, t_3) + 1/2\pi_1(s_1, t_1) = 1/2 \times 2 + 1/2 \times 2 = 2,$$

donde π_i designa la función de pagos del jugador i. La jugadora II consigue

$$1/2\pi_2(s_2, t_3) + 1/2\pi_2(s_1, t_1) = 1/2 \times 1 + 1/2 \times (-1) = 0.$$

Obsérvese que el par de pagos obtenido (2, 0) viene dado por

$$(2, 0) = 1/2(2, 1) + 1/2(2, -1),$$

donde (2, 1) es el par de pagos que se obtiene al utilizar (s_2, t_3) y (2, −1) es el par de pagos obtenido al utilizar (s_1, t_1).

Un razonamiento similar muestra que *todas* las combinaciones convexas de X se pueden conseguir firmando contratos que especifiquen loterías adecuadas.

Si al firmar contratos los jugadores no disponen de otros recursos, entonces X es la región de pagos cooperativos del juego.

5.3.2. Eliminación libre

¿De qué otros recursos pueden disponer los jugadores al firmar contratos? Una posibilidad es que cada jugador se pueda comprometer a quemar dinero antes de empezar el juego. Probablemente este no es un plan atractivo para ninguno de los dos jugadores, pero es una posibilidad que no puede ser lógicamente excluida. Cuando se acepta esta posibilidad los economistas dicen que se acepta la *eliminación libre*.

Con la eliminación libre, el conjunto X de la Figura 5.6(b) ha de ser reemplazado por el conjunto Y de la Figura 5.7(a). Por ejemplo, para conseguir el par de pagos (3, −2), un contrato puede especificar que hay que utilizar el par de estrategias puras (s_2, t_2), pero que antes de empezar el juego la jugadora II debe quemar exactamente la cantidad de dinero necesaria para asegurar que el pago 0 que obtendría se reduce a −2.

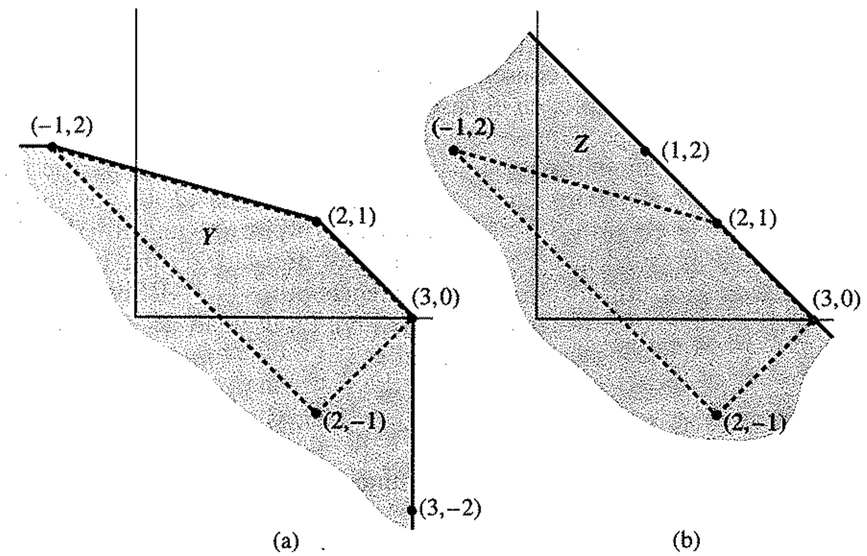


Figura 5.7. Otras regiones de pagos cooperativos.

5.3.3. «Utilidad transferible»

A veces se supone que se pueden escribir contratos en los que se especifica que algunos útiles se transferirán de uno a otro jugador al terminar el juego. Si ello es posible, entonces el conjunto Y de la figura 5.7(a) debe ser reemplazado por el conjunto Z de la Figura 5.7(b). Por ejemplo, para conseguir el par de pagos (1, 2), el contrato debe especificar el uso del par de estrategias puras (s_2, t_3) seguido de la transferencia de un útil del jugador I a la jugadora II. El uso de (s_2, t_3) proporciona el par de pagos (2, 1). La transferencia de un útil del jugador I a la jugadora II transforma esto en

$$(2 - 1, 1 + 1) = (1, 2).$$

Los lectores atentos abrigarán sospechas sobre estas transferencias por las razones dadas en la Sección 3.5.3. Los útiles no son objetos reales y, por tanto, no pueden ser transferidos realmente; sólo los bienes materiales pueden ser intercambiados de hecho. Una utilidad transferible, por tanto, sólo tiene sentido en casos especiales. El caso más importante es aquel en que ambos jugadores son neutrales al riesgo y sus escalas de utilidad de Von Neumann y Morgenstern han sido escogidas de tal manera que su utilidad por una cantidad de dinero x es simplemente $u_i(x) = x$. En este caso, la transferencia de un útil de un jugador a otro es exactamente lo mismo que transferir un dólar.

5.4. El conjunto de negociación

¿Qué podemos decir acerca de los contratos que un jugador racional colocado frente al juego de la Figura 5.6(b) debería firmar? Von Neumann y Morgenstern concluyeron que lo único que un especialista en teoría de juegos puede decir es que el resultado se encontrará en lo que ellos llamaron el *conjunto de negociación*[4]. Este es el conjunto de todos los pares de pagos individualmente racionales y Pareto-eficientes en la región de pagos cooperativos X. Lo que esto significa se explica en las subsecciones siguientes.

5.4.1. Eficiencia de Pareto

Una cosa es factible si es posible escogerla. Un resultado x en un conjunto factible X es *Pareto-eficiente*[5] si no existe otro resultado y en X tal que gusta a todos los jugadores por lo menos tanto como x y a algunos jugadores les gusta más que x.

Si X es un conjunto de pares de pagos, que un punto x de X sea Pareto-eficiente se traduce por la condición que, para todo y,

$$y > x \Rightarrow y \notin X. \tag{5.1}$$

Recordemos que la notación $y \geqslant x$ significa que $y_i \geqslant x_i$ para cada i. La notación[6] $y \gg x$ significa que $y_i > x_i$ para cada i. La notación $y > x$ significa que $y \geqslant x$, pero $y \neq x$. Si $y > x$, entonces y es una mejora de Pareto de x. La condición (5.1) dice, por tanto, que x es Pareto-eficiente cuando no son posibles mejoras de Pareto de x.

[4] La idea del conjunto de negociación se encuentra íntimamente relacionada con la idea de *curva de contrato*, introducida por el economista Edgeworth. También está íntimamente relacionada con el caso de dos jugadores del *núcleo*, según se define en la teoría de juegos cooperativa. Coincide con la segunda noción cuando los pagos de desacuerdo son iguales a los niveles de seguridad de los jugadores.

[5] Este concepto recibe su nombre del sociólogo italiano Pareto, que introdujo la idea. A veces un punto Pareto-eficiente se llama un *óptimo de Pareto*, pero esta es una desafortunada contribución a la terminología porque sugiere que un punto Pareto-eficiente no puede ser mejorado. Pero es Pareto-eficiente que una madre dé todos los bombones de la caja a uno de sus niños dejando a los demás sin ninguno. Ninguno de los niños puede mejorar su situación sin empeorar la de otros. Sin embargo, nadie estaría dispuesto a afirmar que la decisión de la madre es necesariamente óptima desde un punto de vista social.

[6] Se podría definir la Pareto-eficiencia débil por $y \gg x \Rightarrow y \notin X$. La definición dada en el texto se podría entonces denominar la Pareto-eficiencia fuerte. Esta última es más fuerte que la primera porque hay menos x que satisfacen el último criterio.

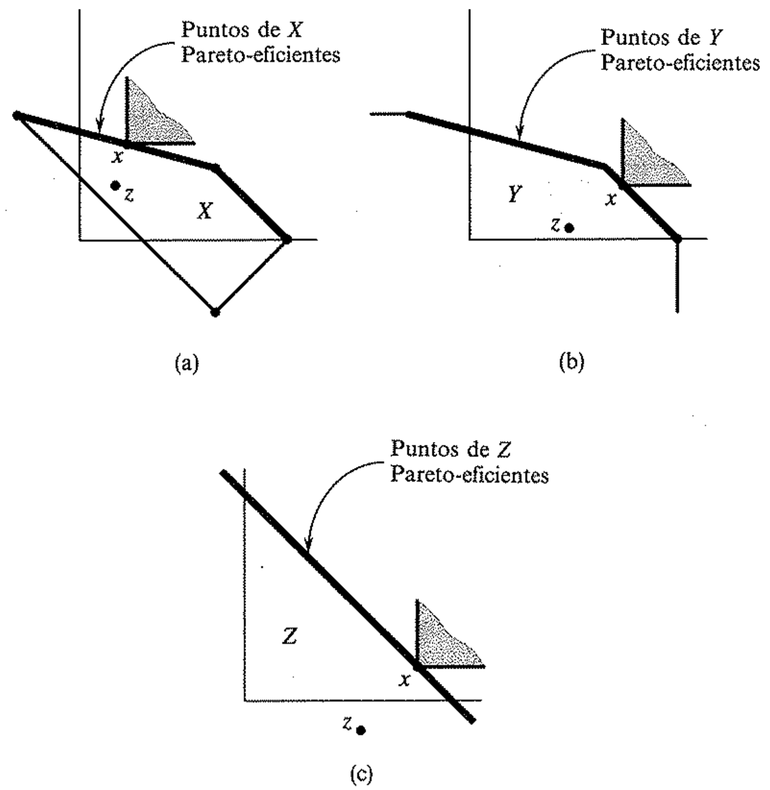


Figura 5.8. Puntos Pareto-eficientes.

La Figura 5.8 muestra los puntos Pareto-eficientes[7] de los conjuntos X, Y y Z de las Figuras 5.6 y 5.7. Los conjuntos sombreados indican las mejoras de Pareto de x. En cada caso, z es un punto factible para el cual x es una mejora de Pareto.

5.4.2. Racionalidad individual

Un acuerdo es *individualmente racional* si asigna a cada jugador una utilidad que es por lo menos tan grande como la que un jugador puede garantizarse en ausencia de un acuerdo. En este capítulo daremos por supuesto que en el conjunto X existe un *punto de desacuerdo* d[8]. La interpretación es que si los jugadores son incapaces de ponerse de acuerdo sobre el contrato a firmar, entonces es conocimiento común que la consecuencia será que el jugador I obtiene un pago d_1 y la jugadora II obtiene un pago d_2. Un par de pagos x del conjunto X corresponde a un contrato individualmente racional si, y sólo si, $x \geqslant d$.

[7] Obsérvese que no es cierto que todos los puntos frontera de Y son Pareto-eficientes. Sin embargo, sí es cierto que todos los puntos frontera de Y son *débilmente* Pareto-eficientes.

[8] ¿Qué deberíamos hacer si no se da un punto de desacuerdo? No existen respuestas fáciles. La Sección 6.9 considera una manera posible de determinar un punto de desacuerdo, pero hay otras muchas.

5.4.3. Algunos conjuntos de negociación

Recordemos que un conjunto de negociación está formado por todos los puntos individualmente racionales y Pareto-eficientes de X. La Figura 5.9 muestra los conjuntos de negociación de los conjuntos X, Y y Z de la Figura 5.8 para el caso en que el punto de desacuerdo es $d = (1, 0)$.

Es obvio por qué Von Neumann y Morgenstern sugirieron que un jugador racional no firmará un contrato que no sea individualmente racional. En lugar de firmar un acuerdo así, uno de los jugadores (por lo menos) preferiría estar en desacuerdo y obtener el pago de desacuerdo. Sólo es

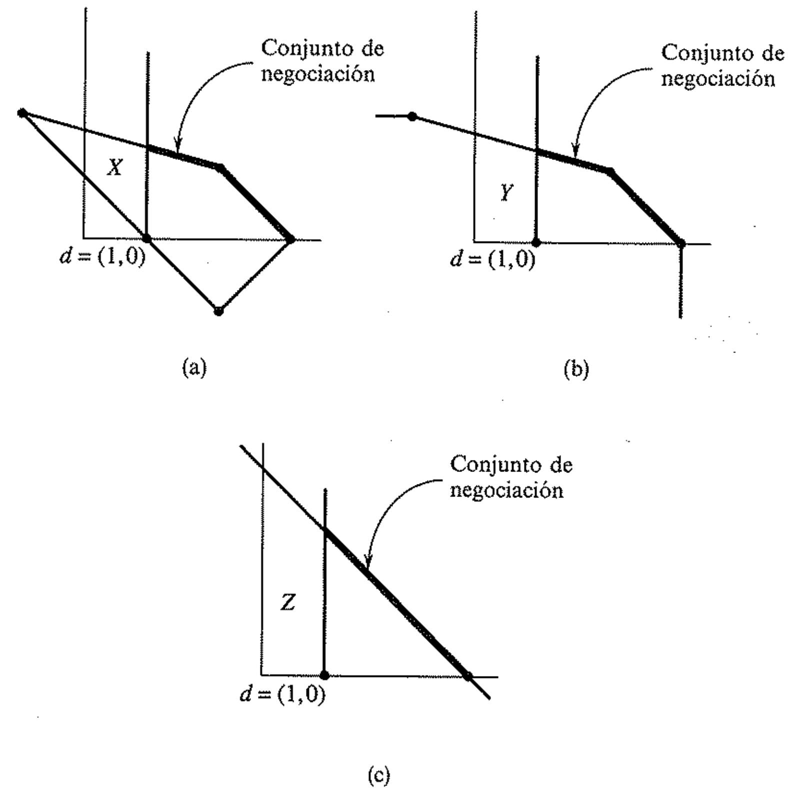
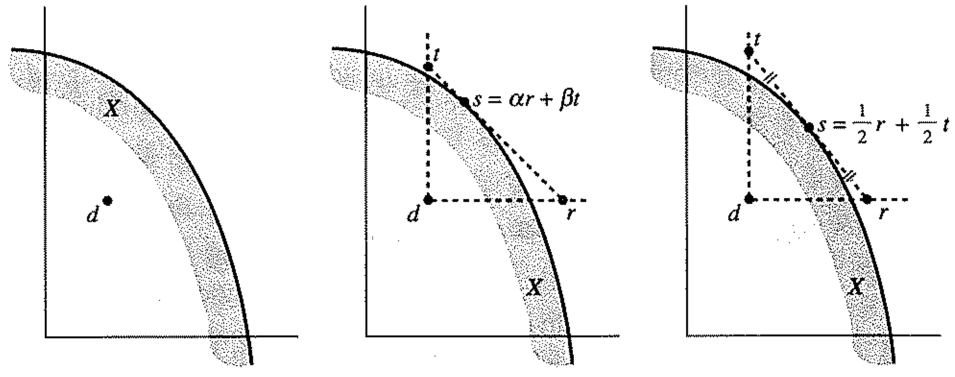


Figura 5.9. Algunos conjuntos de negociación.



(a) (b) (c)

Figura 5.10. El problema de la negociación de Nash.

ligeramente menos obvio porque excluyeron contratos que no son Pareto-eficientes. En los diagramas de la Figura 5.8, el punto z no es Pareto-eficiente porque x es una mejora de Pareto factible. Si se propusiera la firma de un contrato que proporciona el resultado z, por lo menos uno de los jugadores tendría un incentivo para proponer un contrato que proporcionara en su lugar el resultado x, y el otro jugador no podría oponer una objeción racional[9].

5.5. Soluciones de negociación de Nash

Mates

John Nash afirmó que se puede decir algo más acerca del par de pagos sobre el que dos jugadores se pondrán de acuerdo que simplemente que debe pertenecer al conjunto de negociación. Nash dió una lista de «axiomas» que un par de pagos así debe satisfacer en un problema de negociación abstracto, y probó que sólo *un* par de pagos satisface los axiomas. Se dice que este par de pagos es la *solución de negociación de Nash* del problema.

5.5.1. Problemas de negociación de Nash

Matemáticamente, un problema de negociación de Nash es simplemente un par (X, d) en el que X representa el conjunto de pares de pagos factibles y d es un punto en X que representa las consecuencias del desacuerdo. La Figura 5.10(a) muestra un par (X, d) de este tipo. Sólo consideraremos conjuntos factibles tales que:

[9] Si el segundo jugador es indiferente entre x y z, el primer jugador puede proponer un resultado y que es un poco peor que x para el primer jugador y un poco mejor que z para el segundo jugador.

1. El conjunto X es convexo.
2. El conjunto X es cerrado y acotado superiormente[10].
3. Se permite la eliminación libre.

El conjunto de todos los problemas de negociación (X, d) que satisfacen estas condiciones se representa por B.

5.5.2. Soluciones de negociación

Una solución de negociación es una función $F : B \to \mathbb{R}^2$ con la propiedad que $F(X, d)$ pertenece al conjunto X. $F(X, d)$ se interpreta como el par de pagos en el que un par de jugadores racionales se pondrían de acuerdo si se enfrentaran al problema de negociación (X, d).

Como ejemplo de una solución de negociación, cojamos $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$ con $\alpha + \beta = 1$. Definamos $G(X, d)$ igual a s en la Figura 5.10(b). En este diagrama, s es un punto frontera de X y la recta que pasa por r, s y t es una recta soporte de X en s. El punto s y la recta soporte se eligen de manera que

$$s = \alpha r + \beta t.$$

La función $G : B \to \mathbb{R}^2$ definida de esta forma se llama la *solución de negociación de Nash generalizada* correspondiente a los «poderes de negociación» α y β. Cuanto mayor es el poder de negociación de un jugador, más conseguirá utilizando la *solución de negociación de Nash generalizada*. El propio Nash sólo consideró el caso en que ambos jugadores tienen el mismo poder de negociación. Por esta razón la solución de negociación de Nash *regular* $N : B \to \mathbb{R}^2$ se entiende que hace referencia al caso particular en que $\alpha = \beta = 1/2$. Si la solución de negociación de Nash es mencionada sin especificación adicional, se entenderá que nos estamos refiriendo a la versión regular.

La Figura 5.10(c) ilustra el hecho que s estará a medio camino entre r y t al utilizar la solución de negociación de Nash regular. Por supuesto, ni el punto s ni la recta soporte de X en s serán los mismos que los de la Figura 5.10(b). Un punto a medio camino entre r y t en la Figura 5.10(b) ni siquiera pertenecería al conjunto X.

5.5.3. Cómo hallar soluciones de negociación de Nash

Es particularmente fácil calcular soluciones de negociación de Nash en el caso de un conjunto Z como el de la Figura 5.7(b). Una recta soporte en un

[10] Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos frontera. Por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ es cerrado porque contiene sus dos puntos frontera, 0 y 1. El intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene a ninguno de sus dos puntos frontera. Un conjunto S está acotado superiormente si existe un b tal que $x \leqslant b$ para todo x de S.

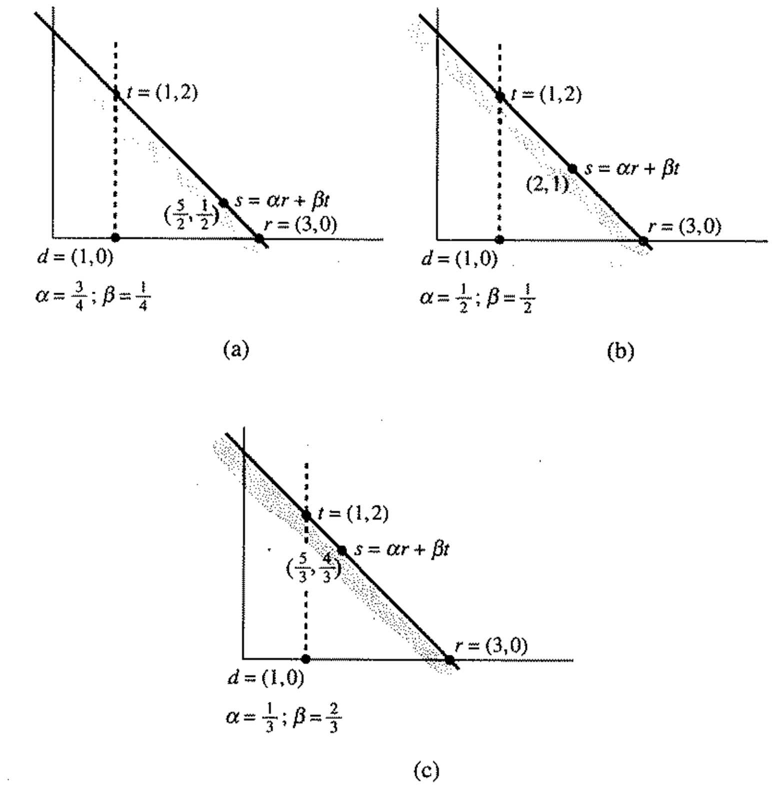


Figura 5.11. Soluciones de negociación de Nash.

punto s en la frontera de Z es simplemente la recta que forma la frontera de Z. Se sigue que r y t se encuentran necesariamente donde las rectas horizontales y verticales que pasan por el punto de desacuerdo d cortan la frontera de Z. La Figura 5.11 ilustra esta situación en el caso en que $d = (1, 0)$. Aquí es cierto que $r = (3, 0)$ y $t = (1, 2)$. La Figura 5.11(a) muestra la situación de la solución de negociación de Nash generalizada $s = G(Z, d)$ en el caso en que $\alpha = 3/4$ y $\beta = 1/4$. La Figura 5.11(c) muestra la situación de $s = G(Z, d)$ en el caso en que $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$. La Figura 5.11(b) muestra la situación de la solución de negociación de Nash regular $s = N(Z, d)$.

Al determinar la situación de estas soluciones de negociación es importante recordar que $s = \alpha r + \beta t$ si y sólo si $s_1 = \alpha r_1 + \beta t_1$ y $s_2 = \alpha r_2 + \beta t_2$. Por ejemplo, si $s = N(Z, d)$, de manera que $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$, entonces $s_1 = 1/2 \times 3 + 1/2 \times 1 = 2$ y $s_2 = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 2 = 1$.

No siempre es fácil determinar soluciones de negociación. El conjunto Y de la Figura 5.7(a) servirá para ilustrar este punto. La Figura 5.12 muestra la solución de negociación de Nash generalizada $s = G(Y, d)$ para $d = (1, 0)$ y cuatro pares distintos de poderes de negociación. Obsérvese que la recta soporte en s es distinta en cada caso. En particular, cuando $\alpha = 3/8$ y

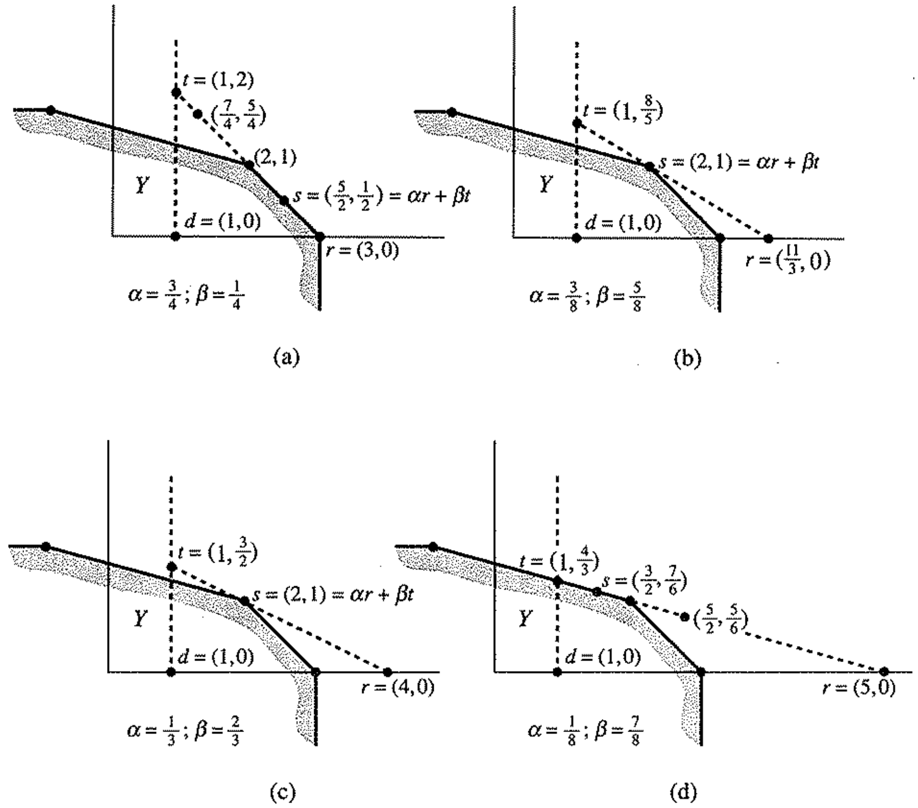


Figura 5.12. Otras soluciones de negociación de Nash.

$\beta = 5/8$ y cuando $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ la solución se encuentra en (2, 1) en ambos casos, pero en cada uno de ellos hay que escoger rectas soporte de Y en s *distintas*.

Se puede evitar tener que elegir en un problema simple como (Y, d) razonando como Sherlock Holmes. Como él dijo, cuando todas las demás posibilidades han sido eliminadas, la que queda *tiene* que ser cierta. Sabemos que s pertenece al conjunto de negociación, como muestra la Figura 5.10(b). Se sigue que una recta soporte de Y en s tiene que ser como la que muestra la Figura 5.12(a) o la de la Figura 5.12(d), excepto cuando s se encuentra en una de las esquinas (3, 0) o (2, 1). Pero r y t no pueden, por ejemplo, estar situadas como en la Figura 5.12(a) si $\alpha = 3/8$ y $\beta = 5/8$, porque entonces $(7/4, 5/4) = \alpha r + \beta t$ no pertenecería al conjunto Y. Análogamente, r y t no pueden estar situados como en la Figura 5.12(d) porque $(5/2, 5/6) = \alpha r + \beta t$ no estaría en el conjunto Y. Así pues, cuando $\alpha = 3/8$ y $\alpha = 5/8$, s debe estar en una de las esquinas (3, 0) o (2, 1). No puede ser que $s = (3, 0)$, pues entonces $\alpha = 0$. Así pues, $s = (2, 1)$, como muestra la Figura 5.12(b). Por razones parecidas, es cierto que $s = (2, 1)$, si $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$, como muestra la Figura 5.12(c).

Es importante observar que en todos estos ejemplos, cuanto mayor es α comparativamente a β, tanto mayor es la parte asignada al jugador I por la solución de negociación. Análogamente, cuanto mayor es β comparativamente a α, tanto mayor es la parte asignada a la jugadora II por la solución de negociación. Así pues, si el problema de negociación debe ser resuelto por medio de una solución de negociación generalizada de Nash, es bueno ser un jugador con gran poder de negociación.

5.5.4. Los axiomas de Nash

¿Qué propiedades debería satisfacer un procedimiento racional para resolver problemas de negociación? Los criterios propuestos por Nash se pueden expresar de modo informal como sigue:

- El resultado final no debería depender de cómo estan calibradas las escalas de utilidad de los jugadores.
- El par de pagos acordado siempre debería pertenecer al conjunto de negociación.
- Si los jugadores a veces se ponen de acuerdo en el par de pagos s cuando t es factible, entonces nunca se ponen de acuerdo en t cuando s es factible.
- En situaciones simétricas, ambos jugadores obtienen lo mismo.

La primera propiedad simplemente reconoce que la elección de un origen y una unidad para una escala de utilidad es arbitraria. La segunda propiedad fue discutida en la sección anterior. La cuarta propiedad no es tanto una hipótesis sobre racionalidad como una decisión a limitar nuestra atención a procedimientos de negociación que tratan a los jugadores simétricamente. No se utilizará en la demostración del teorema que sigue. Sólo nos queda por considerar la tercera propiedad.

La tercera propiedad es una versión de la *independencia de alternativas irrelevantes*. La historia que se suele contar para justificar esta hipótesis es del tipo siguiente. Dos personas eligen un plato para compartir en un restaurante chino. El menú ofrece tres alternativas: Chow Mein, Chop Suey y Egg Foo Young. Tras una larga discusión, escogen Chop Suey. El camarero aparece entonces y les informa de que se les ha terminado el Chow Mein. Si esto hace que las dos personas cambien de decisión y escojan Egg Foo Young, entonces se habrá violado el principio de la independencia de alternativas irrelevantes. La idea es que la elección entre Chop Suey y Egg Foo Young debería ser independiente de que haya o no Chow Mein. Este constituye una alternativa irrelevante porque no sería elegido ni aun cuando pudiera ser obtenido.

Mates
5.6 ⟶

Para demostrar un teorema es necesario formular las propiedades antes citadas como hipótesis matemáticas de una solución de negociación $f : B \to \mathbb{R}^2$. Una vez que han sido expresadas matemáticamente, las propiedades son llamadas (algo pomposamente) axiomas.

El primer axioma debe decir que no importa cómo están calibradas las escalas de utilidad. Supongamos, por ejemplo, que la solución de negociación concede 50 útiles a la jugadora II. Ella adopta entonces una nueva escala de utilidad tal que un resultado cuya antigua utilidad era u tiene asignada ahora una utilidad $U = (9/5)u + 32$ en la nueva escala. Si no ha cambiado nada más, la jugadora II debería conseguir $9/5 \times 50 + 32 = 112$ nuevos útiles por medio de la solución de negociación.

Para expresar esta idea de forma más general, necesitamos dos transformaciones afines estrictamente crecientes $\tau_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\tau_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Recordemos que una transformación afin estrictamente creciente está definida por $\tau_i(u) = A_i u + B_i$, donde $A_i > 0$. A partir de τ_1 y τ_2 podemos construir una función $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiendo

$$\tau(x) = \big(\tau_1(x_1), \tau_2(x_2)\big) = (A_1x_1 + B_1, A_2x_2 + B_2).$$

Axioma 5.1. Dadas cualesquiera transformaciones afines estrictamente crecientes τ_1 y τ_2,

$$F\big(\tau(X), \tau(d)\big) = \tau\big(F(X, d)\big).$$

El segundo axioma debe decir que $F(X, d)$ pertenece al conjunto de negociación del problema de negociación (X, d). Por tanto, tiene dos partes. La primera dice que $F(X, d)$ es individualmente racional. La segunda dice que $F(X, d)$ es Pareto-eficiente.

Axioma 5.2

$$\text{(i)}\quad F(X, d) \geqslant d$$

$$\text{(ii)}\quad y > F(X, d) \;\Rightarrow\; y \notin X.$$

El tercer axioma es la independencia de alternativas irrelevantes y es ilustrado por la Figura 5.13. El conjunto Y es un subconjunto de X que contiene $F(X, d)$. Los elementos de X que no están en Y son alternativas irrelevantes. Si la solución de negociación escoge $F(X, d)$ para el problema de negociación (X, d), entonces también debería escoger $F(X, d)$ para el problema de negociación (Y, d), porque la elección debería ser independiente de la posibilidad o imposibilidad de disponer de alternativas irrelevantes.

Axioma 5.3. Si $d \in Y \subseteq X$, entonces

$$F(X, d) \in Y \;\Rightarrow\; F(Y, d) = F(X, d).$$

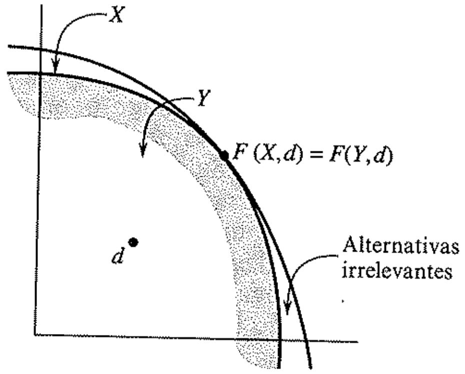


Figura 5.13. Independencia de alternativas irrelevantes.

Cualquier solución de negociación de Nash generalizada $G : B \to \mathbb{R}^2$ satisface los Axiomas 5.1, 5.2 y 5.3. El interés del siguiente teorema consiste en que afirma que estas son las *únicas* soluciones de negociación que satisfacen los axiomas.

Teorema 5.5.1 (Nash). Si $G : B \to \mathbb{R}$ satisface los Axiomas 5.1, 5.2 y 5.3, entonces F es una solución de negociación de Nash generalizada para unos poderes de negociación α y β[11].

Demostración. Empecemos con el problema de negociación simple $(Z, 0)$ en el que el punto de desacuerdo es el vector nulo $0 = (0, 0)$ y el conjunto factible Z está formado por todos los pares de pagos x que satisfacen $x_1 + x_2 \leqslant 1$. El problema $(Z, 0)$ queda ilustrado en la Figura 5.14(a).

Por el Axioma 5.2, la solución $s' = F(Z, 0)$ para el problema de negociación $(Z, 0)$ se encuentra en algún punto del segmento que une $r' = (1, 0)$ y $t' = (0, 1)$.

Escojamos α y β que cumplan $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ tales que

$$s' = \alpha r' + \beta t'.$$

A continuación consideremos un problema de negociación cualquiera (X, d). La Figura 5.14(c) muestra un problema típico. Sea $s = G(X, d)$, donde G es la solución de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes de negociación α y β. Entonces $s = \alpha r + \beta t$ en la Figura 5.14(c). Se trata de probar que $F(X, d) = G(X, d)$.

Cambiemos la escala de utilidad del jugador I por medio de una

[11] De hecho esta es una generalización del teorema demostrado por Nash. Se puede generalizar todavía más omitiendo el Axioma 5.2 (ii), siempre que se altere la conclusión para admitir la posibilidad de que $F(X, d) = d$ para cualquier (X, d).

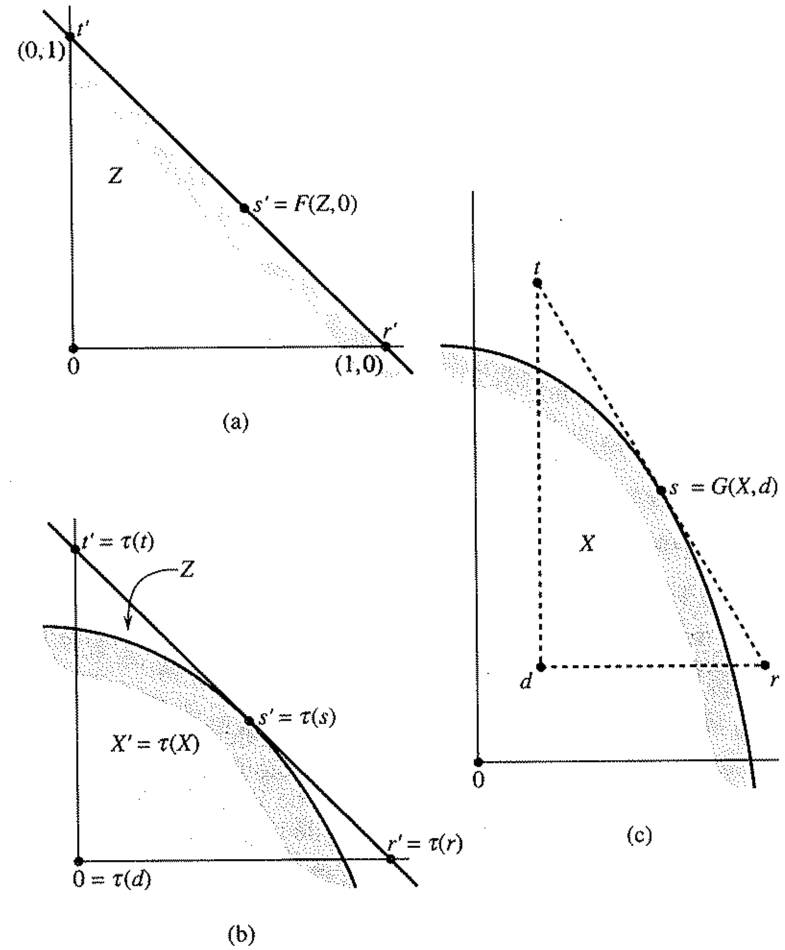


Figura 5.14. Diagramas para el teorema de negociación de Nash.

transformación afín estrictamente creciente $\tau_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\tau_1(d_1) = 0$ y $\tau_1(r_2) = 1$. Análogamente, cambiemos la escala de utilidad de la jugadora II por medio de una transformación afín estrictamente creciente $\tau_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\tau_2(d_2) = 0$ y $\tau_2(t_2) = 1$. Entonces la función afín $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad $\tau(d) = 0$, $\tau(r) = r'$ y $\tau(t) = t'$, como muestra la Figura 5.14(b).

Obsérvese que, puesto que las funciones afines conservan las estructuras convexas, la imagen de la recta que pasa por r, s y t continúa siendo una recta soporte de la imagen del conjunto X. Esto es, la recta $x_1 + x_2 = 1$ que pasa por r', s' y t' es una recta soporte del conjunto convexo $X' = \tau(X)$. En particular, puesto que τ conserva las combinaciones convexas, $s' = \tau(s)$. Así, por el Axioma 5.1,

$$F(Z, 0) = \tau(G(X, d)). \tag{5.2}$$

La frase siguiente es el núcleo de la demostración. Es la simple observación que, puesto que $X' \subseteq Z$, se sigue del Axioma 5.3 que $F(X', 0) = F(Z, 0)$. Lo que queda de demostración es puramente mecánico.

Puesto que $X' = \tau(X)$ y $0 = \tau(d)$, se sigue de (5.2) que

$$F(\tau(X), \tau(d)) = \tau(G(X, d)).$$

Así,

$$G(X, d) = \tau^{-1}(F(\tau(x), \tau(d))), \tag{5.3}$$

donde $\tau^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función inversa de τ[12].

Sólo falta aplicar el Axioma 5.1 al lado derecho de (5.3). Aplicaremos el Axioma 5.1, pero no con τ, sino con τ^{-1}. Así

$$G(X, d) = F(\tau^{-1}(\tau(x)), \tau^{-1}(\tau(d))) = F(X, d).$$

Esto es lo que teníamos que demostrar. □

5.5.5. Simetría

Recordemos que la solución de negociación de Nash regular $N : B \to \mathbb{R}$ es el caso especial de una solución de negociación de Nash generalizada que se da cuando los poderes de negociación α y β son iguales ($\alpha = \beta = 1/2$). Puesto que los poderes de negociación son iguales, la solución de negociación de Nash regular trata a los jugadores simétricamente. Este hecho se puede expresar matemáticamente por medio de la función $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\rho(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Así, ρ simplemente intercambia los pagos de los jugadores. En particular, la solución de negociación de Nash regular satisface el siguiente axioma de simetría.

Axioma 5.4. $F(\rho(X), \rho(d)) = \rho(F(X, d))$.

Este axioma dice que la solución de negociación no se preocupa de a quién llamamos jugador I y a quién jugadora II. Si invertimos las denominaciones, cada uno continuará obteniendo el mismo pago.

---

[12] Una función $f : X \to Y$ tiene una función inversa si la ecuación $y = f(x)$ tiene una solución única $x \in X$ para cada $y \in Y$. La función inversa $f^{-1} : Y \to X$ se define entonces por $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Obsérvese que $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

Si la función afín $\tau_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $\tau_i(u) = a_i u + b_i$, con $a_i > 0$, entonces la ecuación $v = a_i u + b_i$ tiene una solución única $u = (v - b_i)/a_i$ para cada v. Así pues, $\tau_i^{-1}(v) = (v - b_i)/a_i$. La inversa de $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ viene entonces dada por $\tau^{-1}(x) = (\tau_1^{-1}(x_1), \tau_2^{-1}(x_2))$.

Corolario 5.5.1 (Nash). Si $F : B \to \mathbb{R}^2$ satisface los Axiomas 5.1-5.4, entonces F es la solución de negociación de Nash regular N.

Demostración. El problema de negociación $(Z, 0)$ en la demostración del Teorema 5.5.1 es simétrico. Luego el Axioma 5.4 requiere que la solución sea simétrica. Esto obliga a que $\alpha = \beta = 1/2$ □

5.5.6. Productos de Nash

La solución de negociación de Nash generalizada $G(X, d)$ correspondiente a los poderes de negociación α y β se puede caracterizar como aquel punto s en el que se alcanza el

$$\max_{\substack{x \in X \\ x \geqslant d}} (x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta$$

El producto que aparece en esta expresión se llama un *producto de Nash* generalizado.

La Figura 5.15 ilustra esta situación. Es necesario confirmar que, si r y t se encuentran sobre la tangente a $(x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta = c$ en s, como se indica en la figura, entonces $s = \alpha r + \beta t$, de acuerdo con la definición de G.

Como vimos en la Sección 4.5.1, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces

$$f_{x_1}(s)(x_1 - s_1) + f_{x_2}(s)(x_2 - s_1) = 0$$

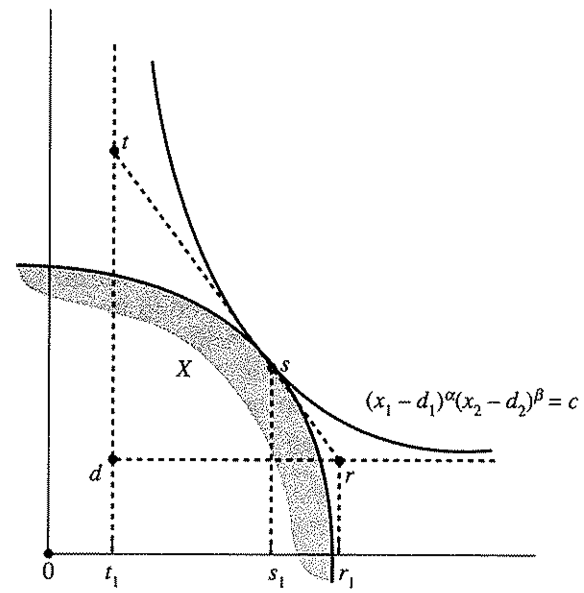


Figura 5.15. Maximizando un producto de Nash.

es una expresión general[13] para la tangente a $f(x_1, x_2) = c$ en el punto s. Por tanto, cuando $f(x_1, x_2) = (x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta$, la tangente es

$$\alpha\left(\frac{x_1 - s_1}{s_1 - d_1}\right) + \beta\left(\frac{x_2 - s_2}{s_2 - d_2}\right) = 0.$$

Esto se puede escribir como

$$\alpha\left(\frac{x_1 - s_1}{s_1 - t_1}\right) + \beta\left(\frac{x_2 - s_2}{s_2 - r_2}\right) = 0,$$

porque $d = (d_1, d_2) = (t_1, r_2)$. Puesto que r y t se encuentran sobre la tangente,

$$\alpha\left(\frac{r_1 - s_1}{s_1 - t_1}\right) - \beta = 0 \quad ; \quad -\alpha + \beta\left(\frac{t_2 - s_2}{s_2 - r_2}\right) = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones para s_1 y s_2, obtenemos que

$$s_1 = \alpha r_1 + \beta t_1 \quad ; \quad s_2 = \alpha r_2 + \beta t_2.$$

Se sigue que $s = \alpha r + \beta t$, que es lo que queríamos mostrar.

La definición dada hasta ahora de una solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación a y b requiere que $a + b = 1$. Esta limitación a veces es inconveniente. Si sólo se requiere que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ y $a + b > 0$, entonces la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación a y b se supone que es la misma que la que tiene poderes $\alpha = a/(a + b)$ y $\beta = b/(a + b)$. Esta definición funciona bien con productos generalizados de Nash porque

$$(x_1 - d_1)^a (x_2 - d_2)^b = \{(x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta\}^{(a+b)}.$$

Así pues, la expresión $(x_1 - d_1)^a (x_2 - d_2)^b$ queda maximizada siempre que $(x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta$ se maximiza. Obsérvese que, al ser $a/b = \alpha/\beta$, la solución de negociación continúa dependiendo únicamente de la *razón* de los poderes de negociación.

Recordemos que la solución de negociación de Nash regular tiene $\alpha = \beta = 1/2$. En este caso lo más sencillo es reemplazar α y β por los valores de a y b, $a = b = 1$. La solución de negociación de Nash regular $N(X, d)$ se puede entonces caracterizar como el punto s en el que se alcanza el

$$\max_{\substack{x \in X \\ x \geqslant d}} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$$

[13] La fórmula se puede expresar más brevemente por $\nabla f(s)^T(x - s) = 0$.

El producto que aparece en esta expresión se llama simplemente un *producto de Nash*.

5.6. La división del dólar

Econ 5.7 ⟶

Si una casa de lujo vale 2 millones de dólares según su dueño y 3 millones según un comprador potencial, entonces es posible llegar a un acuerdo. Si se reúnen y llegan a un acuerdo de venta, el vendedor y el comprador pueden crear un excedente de 1 millón. Como se divida este excedente entre ambos, es una cuestión de negociación. La situación es muy parecida cuando una empresa y un sindicato negocian un convenio. Si firman un convenio, la empresa y los trabajadores cooperarán en la creación de excedente. Lo que debe ser negociado es cómo hay que dividir el excedente.

Un modelo sencillo que recoge lo esencial de estas situaciones de negociación es conocido tradicionalmente como «la división del dólar». La historia que acompaña al modelo trata de un filántropo que ofrece a John y Mary la oportunidad de dividirse un dólar entre ellos, siempre que se pongan de acuerdo en cómo dividirlo. Si pueden ponerse de acuerdo en qué se llevará cada uno, entonces cada uno se lleva la parte acordada. Si no pueden, ninguno de los dos consigue nada. En este cuento, el dólar representa el excedente que negocian dos agentes económicos. La condición del filántropo de que sólo se puede conseguir el dólar si John y Mary llegan a un acuerdo, representa el hecho de que no hay excedente excepto cuando los agentes lo crean conjuntamente.

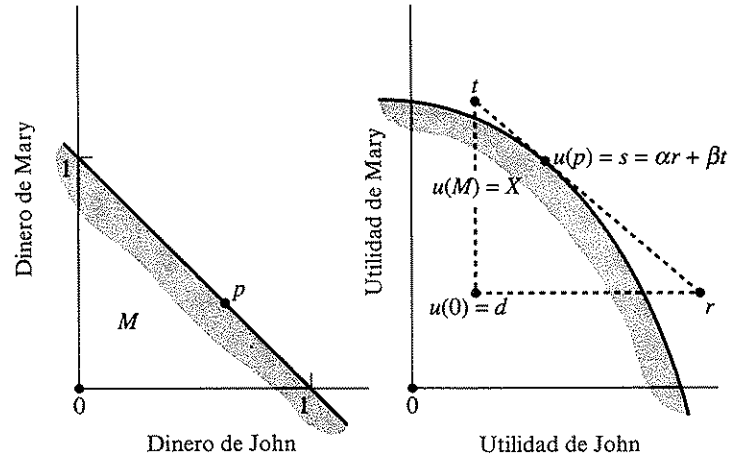
Esta sección examinará cómo las soluciones de negociación de Nash generalizadas se pueden usar para resolver este problema. Nos interesaremos muy particularmente por el análisis de cómo la actitud de un jugador hacia el riesgo influye en la parte de excedente que el jugador consigue.

En términos de dinero, John y Mary pueden ponerse de acuerdo sobre cualquier par $m = (m_1, m_2)$ de cantidades de dólar en el conjunto $M = \{m : m_1 + m_2 \leqslant 1\}$. La Figura 5.16(a) muestra este conjunto[14]. La falta de acuerdo corresponde al vector 0. Para aplicar la teoría de Nash es necesario traducir esta situación en términos de utilidades usando las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de los jugadores.

Supongamos que $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representa la utilidad del dinero del jugador i[15]. Supondremos que a cada jugador sólo le preocupa cuánto dinero puede

[14] Por ejemplo, para alcanzar el punto (0,4; 0,6) el dólar se divide de forma que John consigue 40 centavos y Mary 60. Para alcanzar el punto (2,4; −1,4), acuerdan dividir el dólar 40 : 60 y entonces Mary paga a John dos dólares más de su bolsillo. Para alcanzar el punto (−3, −3), pueden acordar que rechazan el dólar del filántropo y que quemarán cada uno tres dólares de su propio bolsillo.

[15] Daremos por supuesto que v_i es estrictamente creciente, continua y no acotada inferiormente en $\mathbb{R}$. Junto con la hipótesis de que v_i es cóncava, estas hipótesis garantizan que el conjunto posible X de pares de pagos satisface las condiciones dadas en la Sección 5.4.1.



(a) (b)

Figura 5.16. Jugadores aversos al riesgo se dividen un dólar.

conseguir de la negociación. En particular, John no está interesado ni en ayudar a Mary ni en perjudicarla, excepto cuando esto último le proporciona un beneficio económico. Mary siente exactamente lo mismo hacia John. Con estos supuestos, una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern sobre acuerdos para un jugador, $u_i : M \to \mathbf{R}$, viene dada por

$$u_i(m) = v_i(m_i).$$

Esto es, la utilidad para el jugador i del acuerdo m sólo depende de la cantidad m_i que él o ella consiguen por medio del acuerdo.

La Figura 5.16(b) ilustra el problema de negociación (X, d) que corresponde a la división del dólar en el caso en que John y Mary son aversos al riesgo, de manera que u_1 y u_2 son funciones cóncavas. En este caso $u(M)$ es convexo[16] y basta con tomar $X = u(M)$ y $d = u(0)$. La solución de negociación de Nash generalizada $s = G(X, d)$ correspondiente a los poderes de negociación α y β aparece en la Figura 5.16(b). Esto corresponde al par de cantidades de dólar p que satisface $s = u(p)$.

[16] De la misma forma que m es el par (m_1, m_2), $u(m)$ es el par $(u_1(m), u_2(m))$. El conjunto $u(M)$ queda definido por $u(M) = \{u(m) : m \in M\}$. La prueba de que $u(M)$ es convexo iría por el siguiente camino. Supongamos que x e y están en $u(M)$. Esto significa que $x = u(m)$ e $y = u(n)$ para ciertos m y n de M. Para demostrar que $u(M)$ es convexo debemos mostrar que $ax + by$ pertenece a $u(M)$ para cualesquiera a y b tales que $a + b = 1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Puesto que M es convexo, $am + bn$ pertenece a M, luego $u(am + bn)$ pertenece a $u(M)$. Si $u(am + bn) \geqslant z$, se sigue que z pertenece a $u(M)$, porque la libre eliminación es posible en la situación que estamos considerando. La función de utilidad u_i es cóncava. Luego $u_i(am + bn) \geqslant au_i(m) + bu_i(n) (i = 1, 2)$. Por tanto, $u(am + bn) \geqslant au(m) + bu(n) = ax + by$. Se sigue que $z = ax + by$ pertenece a $u(M)$ y que $u(M)$ es convexo.

5.6.1. Jugadores aversos al riesgo

Como ejemplo, consideremos el caso en que $v_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ se define por $v_1(z) = z^\gamma$, y $v_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ se define por $v_2(z) = z^\delta$. (Puesto que estas funciones no están definidas cuando $z < 0$, en este ejemplo tenemos que trabajar con la hipótesis de que los jugadores no tienen dinero en sus bolsillos que pueda ser quemado o dado.) Si $0 < \gamma \leqslant 1$ y $0 < \delta \leqslant 1$, entonces v_1 y v_2 son estrictamente crecientes y cóncavas. Así pues, los jugadores prefieren más dinero que menos y son aversos al riesgo.

Los pares de utilidades Pareto-eficientes en X son de la forma $(z^\gamma, (1 - z)^\delta)$, donde z es la parte del dólar que consigue John y $1 - z$ es la parte de Mary. El par de utilidades de desacuerdo es $d = (0, 0)$. Así, el valor del producto generalizado de Nash, $(x_1 - d_1)^\alpha(x_2 - d_2)^\beta$, cuando $x_1 = z^\gamma$ y $x_2 = (1 - z)^\delta$ es

$$z^{\alpha\gamma}(1 - z)^{\beta\delta}.$$

La solución de negociación de Nash generalizada $G(X, d)$ se da donde este producto alcanza un máximo (sujeto a la restricción $0 \leqslant z \leqslant 1$). La solución[17] a este problema de optimización es

$$z = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\alpha + \delta\beta} \; ; \; 1 - z = \frac{\delta\beta}{\gamma\alpha + \delta\beta}.$$

La solución de negociación de Nash regular es el caso especial en que los poderes de negociación son iguales. Obsérvese que, cuando $\alpha = \beta$, el dólar se divide segun la razón $\gamma : \delta$. La moraleja de esta historia es que no es ventajoso ser averso al riesgo en este tipo de situaciones. Cuanto más averso al riesgo, tanto menos dinero se consigue. Por ejemplo, si $\gamma = 1$, John es neutral al riesgo. Si Mary también fuera neutral al riesgo, con $\delta = 1$, entonces se dividirían el dólar 50 : 50. Pero supongamos que $\delta = 1/3$, de manera que Mary es estrictamente aversa al riesgo. Entonces la división sería 75 : 25.

Es por este tipo de razones que los negociadores de la vida real pretenden disimular en qué medida les es inconveniente que las negociaciones se rompan. Sin embargo, en los modelos sencillos considerados en este capítulo los intentos de engañar no son admisibles porque las preferencias de los jugadores son conocimiento común.

5.6.2. Jugadores amantes del riesgo

Si en el ejemplo anterior $\gamma > 1$ y $\delta > 1$, ambos jugadores son amantes del riesgo. Se podría desarrollar el álgebra de la subsección anterior, pero la

[17] Derivar $z^{\gamma\alpha}(1 - z)^{\delta\beta}$ respecto a z e igualar el resultado a cero.

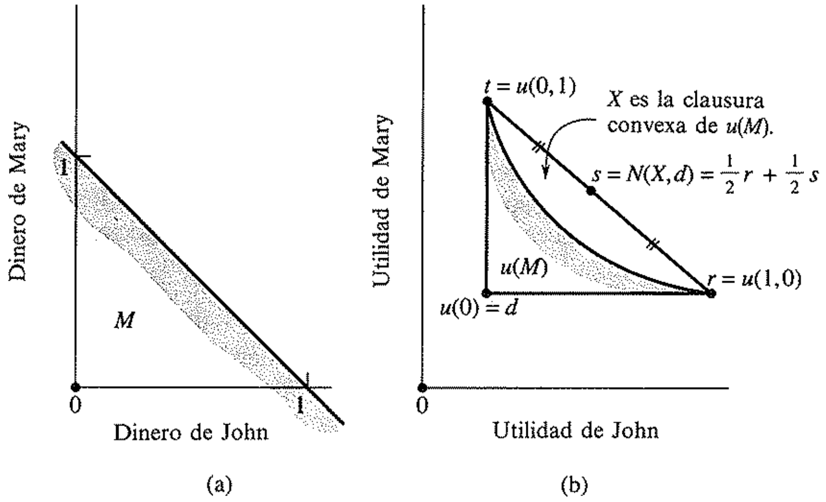


Figura 5.17. Jugadores amantes del riesgo se dividen un dólar.

respuesta sería completamente incorrecta porque la Figura 5.16(b) no se puede aplicar en este caso. Esto es porque $u(M)$ no es convexo. El conjunto X de acuerdos factibles no es $u(M)$, por tanto, sino la clausura convexa de $u(M)$. La Figura 5.17(b) ilustra esta situación. (Como en la subsección anterior, quedan excluidos los razonamientos que requieren que los jugadores echen mano de sus bolsillos.)

La solución de negociación de Nash regular se halla fácilmente. Es el punto s a medio camino entre r y t. Puesto que r corresponde a asignar todo el dólar a John y t corresponde a asignar todo el dólar a Mary, s corresponde a la lotería en que John y Mary acuerdan lanzar una moneda no trucada. Si sale cara, John se lleva el dólar. Si sale cruz, se lo lleva Mary.

No deberíamos sorprendernos de que John y Mary lleguen a un acuerdo por el que ambos se arriesgan a no conseguir nada. Es cierto que la mayoría de la gente no serían unos partidarios entusiastas de un acuerdo así, pero la mayoría de la gente son aversos al riesgo en estas situaciones. Sin embargo, a John y Mary les *gusta* arriesgarse.

5.7. Juegos cooperativos y no cooperativos

Filo 5.8 ⟶

Von Neumann y Morgenstern introdujeron la teoría de juegos en un libro titulado *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Su planteamiento era ligeramente esquizofrénico en la medida en que el tipo de análisis de la primera mitad difería sustancialmente del de la segunda. Esta tendencia esquizoide se ha conservado en la teoría de juegos moderna en la distinción entre teoría de juegos cooperativa y teoría de juegos no cooperativa.

La teoría de juegos no cooperativa, que es la más fundamental de las dos, requiere una descripción completa de las reglas del juego, de manera que las *estrategias* disponibles a los jugadores puedan ser estudiadas en detalle. El objetivo es entonces encontrar un par adecuado de estrategias de *equilibrio*, que serán llamadas la solución del juego. Todos los juegos de los Capítulos 1, 2, 3 y 4 fueron estudiados desde este punto de vista.

La teoría de juegos cooperativa adopta una actitud menos rígida. Se ocupa de situaciones en que los jugadores pueden negociar antes de empezar el juego sobre cómo desarrollarlo. Además se supone que estas negociaciones pueden concluir firmando un acuerdo *vinculante*, que les obliga. En estas condiciones, se supone, las estrategias concretas de que se dispone en el juego no son demasiado importantes. Lo que es importante es la estructura de *preferencias* del juego, ya que es esto lo que determina qué contratos son factibles. Por tanto, el material presentado hasta ahora en este capítulo debe contarse como teoría de juegos cooperativa.

5.7.1. El programa de Nash

Tanto la teoría de juegos cooperativa como la no cooperativa tienen sus ventajas y sus inconvenientes. Una gran ventaja de la teoría cooperativa es que ofrece respuestas simples a preguntas simples. Esto hace que la aplicación sea fácil. El inconveniente correspondiente es que uno nunca puede estar seguro de que está dando la respuesta simple adecuada a la pregunta simple adecuada.

La gran ventaja de la teoría no cooperativa es que no deja nada en el tintero y que, si un análisis conduce a una conclusión no ambigua, uno puede tener la seguridad de que el problema ha sido realmente resuelto. El inconveniente correspondiente es que la conclusión sólo se puede aplicar a un juego específico. Si los detalles de las reglas se cambian, aunque sea ligeramente, la conclusión ya no tiene por qué ser válida.

Nash no consideró a las teorías cooperativa y no cooperativa como rivales, sino que consideró que proporcionaban visiones complementarias. Por ejemplo, tras reconocer que la plausibilidad de sus axiomas para la solución de negociación de Nash es discutible, propuso la construcción de modelos de negociación no cooperativos para poner a prueba sus axiomas. La idea consiste en modelizar las distintas alternativas abiertas a los jugadores cuando negocian como estrategias de un juego de negociación cuyas reglas han sido especificadas explícitamente y en detalle. Si resulta que los resultados de equilibrio de una clase suficientemente grande de tales juegos de negociación satisfacen los axiomas de Nash, entonces la teoría de la negociación de Nash quedaría justificada. En caso contrario, sería mejor abandonarla.

Esta línea de investigación se conoce como el programa de Nash. En principio se puede aplicar siempre que recaen dudas sobre un concepto de la teoría de juegos cooperativa. Sin embargo, en lo que sigue restringiremos nuestra atención a las soluciones de negociación de Nash generalizadas y a una clase particularmente interesante de modelo para la negociación no cooperativa[18].

5.8. Modelos de negociación

Econ 5.9 ⟶

En la Sección 5.6 estudiamos cómo se pueden utilizar las soluciones de negociación de Nash generalizadas para resolver problemas de la clase «división del dólar». Pero, ¿por qué debemos utilizar soluciones de negociación de Nash generalizadas en lugar de una cualquiera de las otras muchas «soluciones de negociación» que los economistas han propuesto? Es cierto que la Sección 5.5.4 da una lista de axiomas, que parece muy razonable, para caracterizar las soluciones de negociación de Nash generalizadas. Sin embargo, otros, además de Nash, han dado otras listas de axiomas que, consideradas en abstracto, también parecen razonables. Por ejemplo, la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky, descrita en el Ejercicio 5.9.19, también se puede caracterizar en términos de un sistema de axiomas que parece razonable a primera vista. En lugar de discutir las supuestas ventajas de tales sistemas de axiomas rivales esta sección trata de enfrentarse directamente con el problema, y lo hace examinando las realidades estratégicas de situaciones en las que se alcanzan acuerdos por medio de un proceso de ofertas y contraofertas que continúa hasta que se cierra el acuerdo.

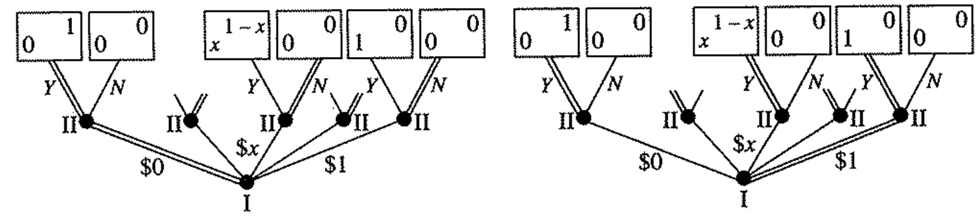
Este es un proyecto ambicioso. Será prudente, por tanto, empezar examinando algunos modelos de negociación primitivos en los que únicamente se permite hacer una o dos ofertas. Estos modelos no son muy interesantes en sí mismos, pero nos darán la oportunidad de revisar las ideas de equilibrio de Nash[19] y de equilibrio subjuego-perfecto introducidas en las Secciones 1.8 y 4.6.3.

5.8.1. *El juego del ultimátum*

El problema de negociación será el de «dividir un dólar», estudiado en la Sección 5.6. Para simplificar las cosas, sea $v_i(x) = x$, con lo que podemos

[18] Algunos autores entienden incorrectamente los motivos de Nash al formular su solución al problema de la negociación e imaginan que sus axiomas pueden ser interpretados razonablemente como criterios para un «mecanismo de atribución justo». Nos llevaría demasiado tiempo explicar por qué los axiomas de Nash no son apropiados para este propósito. Sin embargo, se han introducido otros sistemas de axiomas para caracterizar otras de las llamadas «soluciones de negociación» que sí tienen sentido como esquemas justos de arbitración. Por supuesto sería poco inteligente utilizar el programa de Nash para «poner a prueba» sistemas axiomáticos de este tipo. No existe ninguna razón por la que agentes racionales que explotan todo el poder de negociación que pueden tener lleguen a un resultado «justo».

[19] Es difícil resistir la tentación de confundir las nociones de equilibrio de Nash y de solución de negociación de Nash. Sin embargo, la única cosa que tienen en común es que ambas fueran inventadas por John Nash.



(a) (b)

Figura 5.18. El juego del ultimátum.

identificar dólares y útiles. En la Sección 5.6 no se dijo nada acerca del *procedimiento* por medio del cual John y Mary negocian. El juego del ultimátum proporciona un modelo para el más simple de todos los procedimientos de negociación posibles.

En el juego del ultimátum, el jugador I hace una propuesta a la jugadora II sobre cómo dividirse el dólar. La jugadora II puede entonces aceptarla o rechazarla. Si la acepta, se adopta la propuesta del jugador I. Si la rechaza, el juego termina sin que ninguno de los jugadores consiga nada. Aunque el procedimiento es muy simple, no es totalmente irreal. De hecho es el procedimiento de negociación que se emplea normalmente al comprar algo en una tienda. Las mercancías de la tienda han sido marcadas con un precio y usted lo toma o lo deja.

El árbol del juego se muestra en la Figura 5.18. Los segmentos que salen de la raíz están marcados con las cantidades que el jugador I pide para sí. Tras cada una de estas peticiones, la jugadora II puede escoger Y o N. Escoger Y significa que la acepta. Escoger N significa que la rechaza. Tras cada rechazo, ninguno de los jugadores consigue nada. Se supone que cada jugador prefiere más dinero que menos y que no le interesa nada más.

Los segmentos doblados de la Figura 5.18(a) indican uno de los muchos equilibrios de Nash del juego. El resultado es muy poco intuitivo. El jugador I le ofrece todo a la jugadora II y ésta lo acepta. ¿Cómo se puede obtener este resultado tan extraño en un equilibrio de Nash?

Designemos por s la estrategia pura del jugador I indicada en la Figura 5.18(a). Esta estrategia requiere que el jugador I ofrezca el dólar entero a la jugadora II. Una estrategia pura para la jugadora II es mucho más complicada. En cada uno de las ofertas posibles que el jugador I le pueda hacer, ella debe decir si la aceptaría o no. La estrategia pura t indicada en la Figura 5.18(a) requiere que rechace todas las ofertas excepto cuando le ofrecen el dólar entero.

El par de estrategias puras (s, t) es un equilibrio de Nash. Para comprobarlo es necesario probar que s es una respuesta óptima a t y que t es simultáneamente una respuesta óptima a s. Esto no es difícil de ver, en el caso de la jugadora II. Esta no puede obtener más de un dólar, y esto es lo que obtiene cuando juega t en respuesta a s. La situación del jugador I no es tan atractiva. Este no consigue nada respondiendo a t con s. Pero tampoco conseguiría nada si utilizara cualquier otra estrategia pura, porque cualquier otra propuesta será rechazada si la jugadora II usa t. Por tanto, s es una respuesta óptima a t ya que funciona por lo menos tan bien como cualquier otra respuesta.

Sin embargo, el par (s, t) no es subjuego-perfecto. Requiere que la jugadora II se proponga jugar *irracionalmente* en subjuegos que no se alcanzan cuando se usa (s, t). Un aprendiz de especialista en teoría de juegos tal vez podría escribir un libro recomendando el uso de (s, t), pero al jugador I le resultará increíble que la jugadora II siga este consejo[20]. Por ejemplo, la estrategia pura t requiere que la jugadora II no acepte la oferta de 10 centavos. Es cierto que 10 centavos no es mucho, pero es mejor que nada. La jugadora racional II aceptará, por tanto, 10 centavos si le son ofrecidos. Se puede aducir que ella podría rechazarlos por despecho, o para «dar una lección al jugador I», o porque desea ganarse una reputación de «dura». Pero todos estos argumentos requieren que asignemos motivaciones a la jugadora II que no tienen nada que ver con el dinero. Por supuesto, si tiene la oportunidad, la jugadora II podría *amenazar* con rechazar ofertas miserables, pero un jugador I que sabe que la jugadora II es racional rechazará estas amenazas como retórica ociosa y las ignorará.

La Figura 5.18(b) ilustra el uso del algoritmo de Zermelo para hallar el único equilibrio subjuego-perfecto. Este requiere que la jugadora II se proponga aceptar cualquier oferta, y que la jugadora II exija el dólar entero.

El uso del algoritmo de Zermelo no es tan directo aquí como en aplicaciones previas porque el juego es infinito. El jugador I puede pedir cualquier número real del intervalo $[0, 1]$ como su parte del dólar. Describiremos el procedimiento cuidadosamente. Son necesarios tres pasos:

Paso 1. Doblar todos los segmentos correspondientes a una aceptación de la jugadora II de una parte $x < 1$ para el jugador I. Aceptar esta oferta es óptimo porque $1 - x > 0$.

Paso 2. Doblar el segmento en el que el jugador I ofrece quedarse 1. Ninguna oferta de una parte $x < 1$ puede ser óptima porque la oferta de quedarse una parte y tal que $x < y < 1$ sería aceptada y proporcionaría un pago mejor que la oferta de quedarse x.

Paso 3. Doblar el segmento correspondiente a la aceptación de la jugadora II de la oferta de quedarse 1 del jugador I. Es cierto que el rechazo también es óptimo, pero no corresponde a un equilibrio subjuego-perfecto. Si el jugador se propone rechazar la oferta de quedarse 1 del jugador I, entonces el jugador I debería ofrecer quedarse una parte $x < 1$

[20] En el supuesto de que el jugador I *sepa* que la jugadora II es racional. Pero esto es dado por supuesto.

porque ésta sería aceptada necesariamente. Pero hemos visto que una oferta así no puede ser óptima.

Puesto que nos encontraremos de nuevo con este principio básico en modelos más complicados, vale la pena enunciarlo explícitamente.

> En equilibrio, quien ofrece siempre quiere ofrecer a quien responde una cantidad que le deje indiferente entre aceptar y rechazar. En equilibrio, quien responde siempre quiere aceptar una oferta así o una mejor, y rechazar cualquiera que sea peor.

Aunque haya seguido el razonamiento que ha conducido al principio que acabamos de enunciar, tal vez se sienta usted incómodo con la idea de que la jugadora II debe aceptar necesariamente lo que le es ofrecido en equilibrio, incluso cuando, en particular, lo que se le ofrece la deja indiferente entre aceptar y rechazar. Esta incomodidad suele presentarse en problemas que encierran un numero infinito de posibilidades, porque sólo estamos acostumbrados a pensar en situaciones finitas. La Sección 5.8.2, que considera una versión finita del juego del ultimátum, tal vez servirá para clarificar las cosas.

5.8.2. Una versión finita del juego del ultimátum

Filo 5.8.3 ⟶

El principio que concluía la subsección anterior resultará muy útil. Pero no es posible enunciar un principio tan simple para la versión finita del juego del ultimátum en el que el jugador I sólo puede hacer una demanda (de una parte del dólar) en términos de un numero entero de centavos. Por otra parte, en este juego finito el algoritmo de Zermelo se aplica más fácilmente. Se puede aplicar exactamente como se ha descrito en la Sección 1.9.2.

Al analizar el juego del ultimátum cuando el jugador I sólo puede hacer demandas que son un número entero de centavos, el primer paso es precisamente el mismo que el de la subsección precedente. Doblar todos los segmentos que correspondan a la aceptación de la jugadora II de una demanda para el jugador I que deja algo positivo para la jugadora II. Tras este paso, 100 segmentos quedarán doblados, uno para cada numero entero de centavos entre 0 y 99. La jugadora II es indiferente entre aceptar o rechazar una demanda de 100 centavos porque no consigue nada en ninguno de los dos casos. El segundo paso es, por tanto, duplicar el árbol del juego, doblando el segmento correspondiente a la aceptación de una demanda de 100 centavos en uno de los ejemplares y doblando el segmento correspondiente a un rechazo en el otro ejemplar. La Figura 5.19 muestra los dos casos. El tercer y útimo paso consiste en doblar el segmento correspondiente a una demanda óptima para el jugador I. En la Figura 5.19(a), donde la demanda de 100 centavos del jugador I será aceptada, para el jugador I es óptimo pedir 100 centavos. En la Figura 5.19(b), donde la demanda de 100

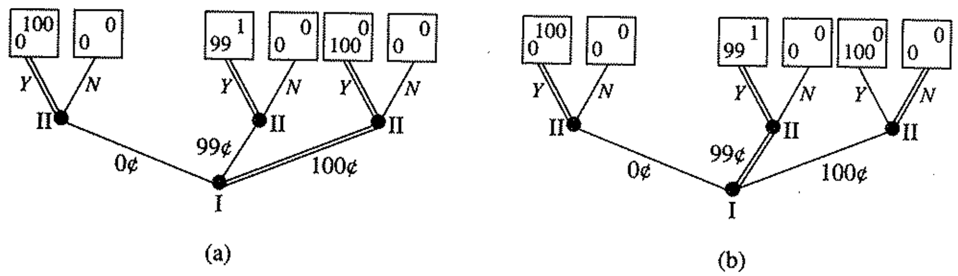


Figura 5.19. Ultimátum en números enteros de centavos.

centavos del jugador I será rechazada, para el jugador I es óptimo pedir 99 centavos. Así pues, en la versión finita del juego del ultimátum se dan *dos* equilibrios subjuego-perfectos[21], como muestra la Figura 5.19.

En lugar de trabajar con números enteros de centavos se podría repetir la discusión anterior usando unidades monetarias menores. Si la menor unidad monetaria permitida fuera el millonésimo de dólar, entonces se darían dos equilibrios subjuego-perfectos: en uno el jugador I pide el dólar entero y la jugadora II lo acepta, y en el otro la jugadora II rechaza una demanda de un dólar entero pero acepta la demanda del jugador I de 0.999999 de dólar.

Esta conclusión puede ayudar a despejar cualquier duda sobre lo razonable del principio enunciado al final de la Sección 5.8.1. Puesto que la jugadora II es indiferente entre aceptar y rechazar cuando se le ofrece nada, uno piensa que debería haber *dos* equilibrios subjuego-perfectos; en uno, ella acepta que no se le ofrezca nada, y en el otro rechaza que no se le ofrezca nada. En el caso finito esto es precisamente lo que encontramos. Sin embargo, cuando la menor unidad monetaria se hace muy pequeña, *ambos* equilibrios convergen hacia el *único* equilibrio subjuego-perfecto del juego infinito que hace de límite.

5.8.3. Un juego de negociación en dos etapas

Ahora usaremos el principio propuesto al final de la Sección 5.8.1 en un modelo en el que la jugadora II puede hacer una contraoferta, si decide rechazar la propuesta inicial del jugador I sobre cómo dividir el dólar. Para hacer el problema interesante, es necesario suponer que los jugadores no sólo prefieren más dinero que menos, sino que también lo prefieren cuanto antes mejor[22].

[21] Si sólo se consideran estrategias puras.

[22] Si no les importara cuándo consiguen el dinero, la propuesta inicial del jugador I sería irrelevante. La jugadora II lo ignoraría y en el juego del ultimátum que resultaría haría la propuesta óptima. Así se llevaría el dólar entero.

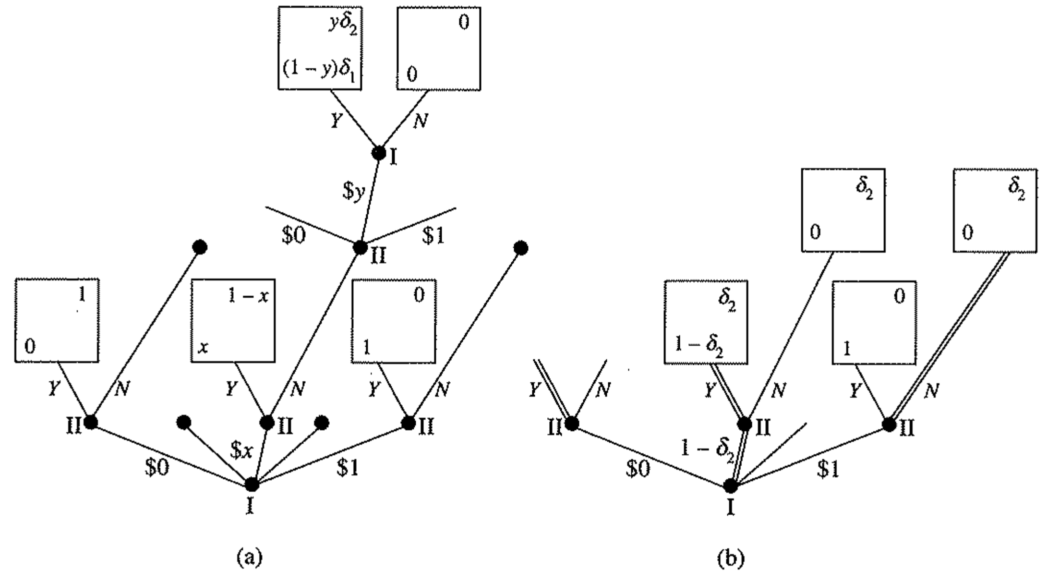


Figura 5.20. Un juego de negociación en dos etapas.

El problema básico continúa siendo el de «dividir el dólar», según lo dicho en la Sección 5.6. Continuaremos haciendo la simplificación $v_i(x) = x$. Sin embargo, ahora es necesario introducir *factores de descuento* δ_1 y δ_2 que satisfacen $0 < \delta_i < 1$. La utilidad del jugador i por conseguir \$$x$ en el instante t se toma igual a $x\delta_i^t$.

Los factores de descuento son una manera simple de modelizar el grado de impaciencia de los jugadores. Un jugador con un factor de descuento próximo a cero es muy impaciente. Un jugador con $\delta_i = 1$ no sería impaciente en absoluto. Para un jugador así, conseguir 50 centavos ahora no es diferente de tener la seguridad de conseguir 50 centavos dentro de 10 años.

La Figura 5.20(a) muestra el árbol del juego para un juego de negociación en dos etapas. El jugador I hace la primera oferta en el instante 0. Si la jugadora II rechaza la propuesta, hará una contrapropuesta en el instante $\tau > 0$. Si ésta es rechazada por el jugador I, entonces ninguno de los jugadores consigue nada. No perdemos generalidad estudiando el caso $\tau = 1$. Analizado este caso, los resultados correspondientes al caso general se obtienen simplemente sustituyendo δ_i en todas partes donde aparece por δ_i^τ.

Los subjuegos con raíces en los nodos donde la jugadora II hace contrapropuestas son meras copias del juego del ultimátum. Si se alcanza uno de estos subjuegos, y se usan estrategias de equilibrio en el subjuego, entonces la jugadora II obtendrá el dólar entero. Esta asignará a este resultado una utilidad de $1\delta_2 = \delta_2$, ya que obtiene el dólar en el instante 1. El jugador I asigna al mismo suceso una utilidad de $0\delta_1 = 0$.

El algoritmo de Zermelo nos dice ahora que reemplacemos cada uno de los subjuegos por un nodo terminal marcado con el par de pagos $(0, \delta_2)$ que resulta de jugar un equilibrio en el subjuego. Esto reduce la situación a la que aparece en la Figura 5.20(b).

En este juego reducido, la propuesta óptima del jugador I es la que deja al jugador indiferente entre aceptar y rechazar. Por tanto, debería pedir $1 - \delta_2$, porque esto deja δ_2 para la jugadora II y esto es lo que ella consigue en el equilibrio al rechazar. En el equilibrio, ella acepta la demanda del jugador I de $1 - \delta_2$ por las razones dadas en la sección anterior.

Obsérvese que si δ_2 es casi cero, o sea que la jugadora II es una persona muy impaciente, entonces el jugador I se lleva casi todo el dólar. Si δ_2 es casi 1, o sea que la jugadora II es muy paciente, entonces la jugadora II se lleva casi todo el dólar.

La longitud del intervalo temporal que transcurre entre una etapa del juego y la siguiente también es significativa. Si es τ en lugar de 1, entonces δ_i debe ser reemplazado en todas partes por δ_i^τ. El jugador I, por tanto, pedirá $1 - \delta_2^\tau$ en el equilibrio, lo cual será aceptado por la jugadora II. Puesto que $\delta_2^\tau \to 1$ cuando $\tau \to 0$, se sigue que la jugadora II se lo lleva casi todo si τ es lo bastante pequeño. Así pues, si la jugadora II pudiera decidir cuánto tiempo debe dejar pasar antes de hacer una contrapropuesta, se decidiría por un tiempo tan corto como fuera posible.

5.8.4. El juego de horizonte infinito

Mates

Los juegos de negociación simples de las subsecciones anteriores fueron estudiados como preparación para el modelo que viene a continuación. Este es quizás el más natural de todos los modelos de negociación posibles. Por tanto, que los resultados que son equilibrios subjuego-perfectos se puedan describir por medio de una solución de negociación de Nash generalizada es una justificación espectacular de los planteamientos de Nash sobre la negociación.

El problema básico de la negociación continúa siendo el de «dividir el dólar». En la Sección 5.6, la utilidad de Von Neumann y Morgenstern del jugador i para \$$x$ se representó por $v_i(x)$. En las Secciones 5.8.1 y 5.8.3 se estudió el caso particular $v_i(x) = x$. Ahora abandonaremos esta simplificación. Así pues, ya no podremos identificar un útil con un dólar entregado en el instante cero. Por el contrario, reintroducimos las hipótesis sobre v_i hechas en la Sección 5.6. En particular, los jugadores serán aversos al riesgo, o sea que v_i es cóncava.

Como en la Sección 5.8.3, la actitud de los jugadores hacia el tiempo también será importante[23]. La utilidad de Von Neumann y Morgenstern del jugador i por conseguir \$$x$ en el instante t se tomará igual a $v_i(x)\delta_i^t$. Esto hace necesario poner $v_i(0) = 0$ para asegurar que un jugador que no

[23] Con un horizonte infinito este punto resulta meridianamente claro. Si no tuviera importancia *cuándo* los jugadores llegan a un acuerdo, no tendría importancia *si* llegan a un acuerdo.

consigue nada es indiferente sobre cuándo le entregarán el cheque por cero dólares. Por comodidad, escogemos una escala para las utilidades en la que $v_i(1) = 1$.

La Figura 5.16(a) muestra los acuerdos factibles para los jugadores en términos monetarios. Pueden ponerse de acuerdo sobre cualquier par $m = (m_1, m_2)$ de pagos en dinero del conjunto M. También debemos tener en cuenta cuándo se alcanza el acuerdo. Por tanto, necesitamos las utilidades de John y de Mary para un acuerdo m alcanzado en el instante t. Estas utilidades vienen dadas por

$$u_i(m, t) = v_i(m_i)\delta_i^t.$$

En el juego de negociación que estudiaremos, John hace una primera oferta en el instante cero. Si Mary la rechaza, ella hace una contraoferta en el instante τ. Si John rechaza esta contraoferta, él hace una contra-contraoferta en el instante 2τ, y continúan de esta forma hasta que una propuesta es aceptada. Sin embargo, nada impide que todos las propuestas sean rechazadas, en cuyo caso el juego continuará indefinidamente. Ambos jugadores otorgan una utilidad cero a esta eventualidad. Como en la Sección 5.8.3, estudiamos el caso $\tau = 1$ para simplificar los cálculos algebraicos.

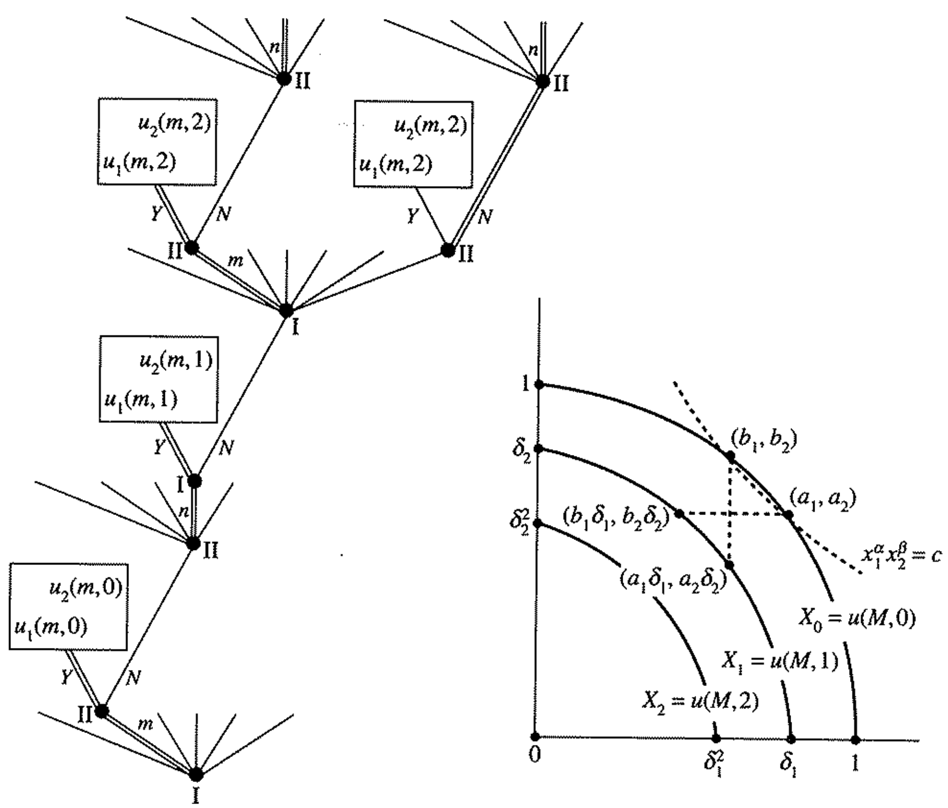
También necesitaremos un juego acompañante H. Este es exactamente el mismo que el juego G, con la salvedad que los papeles de los jugadores están intercambiados. Esto es, Mary es quien hace la primera propuesta.

La Figura 5.21(a) muestra el árbol del juego G. La Figura 5.21(b) muestra el conjunto de los pares de utilidades factibles en el instante 0, $X_0 = u(M, 0)$. El conjunto $X_1 = u(M, 1)$ de los pares de utilidades factibles en el instante 1 es menor. El conjunto $X_2 = u(M, 2)$ es aún menor. Al economista Ariel Rubinstein, que fue el primero en estudiar este modelo, le gusta imaginarse X_t como un pastel que se va encogiendo con el tiempo. Esto proporciona un incentivo a los jugadores para alcanzar un acuerdo temprano. Cada propuesta rechazada significa que queda menos pastel a dividir.

Los segmentos doblados en el árbol de la Figura 5.21(a) muestran el uso de estrategias estacionarias. Se dice que una estrategia es estacionaria cuando ignora la historia de un jugador. Un jugador que usa una estrategia estacionaria hace planes para jugar de la misma forma en el futuro, con independencia de cualquier cosa que haya podido pasar en el pasado. Por ejemplo, siempre que le toca a John hacer una propuesta él propone el acuerdo m independientemente de la historia de ofertas y contraofertas que haya podido tener lugar con anterioridad. Análogamente, Mary siempre propone el acuerdo n.

Estudiaremos el caso especial en que Mary ha decidido aceptar el acuerdo m (u otra cosa mejor para ella) y rechazar cualquier otra cosa peor. Análogamente, John ha decidido aceptar el acuerdo n (u otra cosa mejor para él) y rechazar cualquier otra cosa peor. ¿Constituyen estas estrategias puras un equilibrio subjuego-perfecto? La respuesta es sorprendemente simple.

Definamos los vectores a y b por $a = u(m, 0)$ y $b = u(n, 0)$. Por ejemplo,



(a) (b)

Figura 5.21. El juego de horizonte infinito.

$a_2 = u_2(m, 0)$ es la utilidad que Mary obtiene por aceptar el acuerdo m en el instante 0, y $a_1 = u_1(m, 0)$ es la utilidad que John obtiene si el acuerdo m es aceptado en el instante 0. Según lo dicho en las subsecciones anteriores, disponemos del principio de que una propuesta de equilibrio debería hacer que el jugador que responde sea indiferente entre aceptar y rechazar. Si John propone m en el instante 0 en el juego G, entonces Mary obtendrá la utilidad a_2 por aceptar. Si lo rechaza, ella propondrá n en el instante 1 y John aceptará. Por tanto, obtendrá una utilidad $b_2\delta_2$ por rechazar. Para que Mary sea indiferente entre aceptar y rechazar se requiere

$$a_2 = b_2\delta_2. \tag{5.4}$$

Obsérvese que (5.4) implica que $a_2\delta_2^t = b_2\delta_2^{t+1}$ para cada t. Así pues Mary será indiferente antre aceptar y rechazar m, cuando éste sea propuesto por John.

Una condición similar es necesaria para John. Para formularla fácilmente,

repitamos la discusión anterior para el juego acompañante H en el que Mary hace la primera propuesta en el instante 0. Si Mary propone n en el instante 0 en el juego H, entonces John conseguirá una utilidad b_1 por aceptar. Si lo rechaza, él propondrá m en el instante 1 y Mary aceptará. Por tanto, John obtendrá una utilidad de $a_1\delta_1$ por rechazar. El requisito para ser indiferente entre aceptar y rechazar es que

$$b_1 = a_1\delta_1. \tag{5.5}$$

Obsérvese de nuevo que (5.5) implica que $b_1\delta_1^t = a_1\delta_1^{t+1}$ para cada t. Luego John será indiferente entre aceptar y rechazar n, cuando éste sea propuesto por Mary.

La Figura 5.21(b) ilustra las Ecuaciones (5.4) y (5.5). La Ecuación (5.4) únicamente exige que los puntos (a_1, a_2) y $(b_1\delta_1, b_2\delta_2)$ pertenezcan a la misma recta horizontal. La condición (5.5) exige que los puntos (b_1, b_2) y $(a_1\delta_1, a_2\delta_2)$ pertenezcan a la misma recta vertical[24].

Las Ecuaciones (5.4) y (5.5) caracterizan el acuerdo de equilibrio en el caso en que el intervalo temporal τ entre propuestas sucesivas satisface $\tau = 1$. Sin embargo, para obtener el valor real del acuerdo de equilibrio son precisos más cálculos. Estos cálculos se pueden evitar si dirigimos nuestra atención al caso límite en que $\tau \to 0$. Afortunadamente, este caso límite es el que presenta más interés, porque en el mundo real nada obliga a un negociador a respetar un horario rígido y, en el supuesto en que un jugador ha rechazado una oferta, lo óptimo es hacer una contraoferta tan pronto como sea posible.

Para atacar el caso $\tau \neq 1$, debemos sustituir δ_1 y δ_2 en (5.4) y (5.5) por δ_1^{τ} y δ_2^{τ}. Las cosas serán mucho más fáciles si escribimos simultáneamente $\delta_1 = e^{-\rho_1}$ y $\delta_2 = e^{-\rho_2}$. Entonces obtenemos

$$a_2 = b_2 e^{-\rho_2\tau}, \tag{5.6}$$

$$b_1 = a_1 e^{-\rho_1\tau}. \tag{5.7}$$

En estas fórmulas, ρ_1 y ρ_2, son *tasas* de descuento[25].

[24] Un matemático deseará tener la seguridad de que existen puntos a y b que satisfacen estos requisitos. Obsérvese que $a_1 = v_1(m_1)$, $a_2 = v_2(m_2)$, $b_1 = v_1(n_1)$ y $b_2 = v_2(n_2)$. Puesto que a y b son Pareto-eficientes, $m_1 + m_2 = 1$ y $n_1 + n_2 = 1$. Así, $b_i = f(a_i)$, donde $f : [0, 1] \to [0, 1]$ viene definida por $f(x) = v_2(1 - v_1^{-1}(x))$. Por tanto, la Ecuación (5.4) se puede escribir como $f(a_1) = \delta_2 f(b_1)$. Al combinar esto con (5.5) se obtiene $f(a_1) = \delta_2 f(a_1\delta_1)$. Por tanto, una condición de existencia es que la función $g : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $g(x) = f(x) - \delta_2 f(x\delta_1)$ se anule en algún punto de $[0, 1]$. Obsérvese que $g(0) = 1 - \delta_2 > 0$ y $g(1) = 0 - \delta_2 f(\delta_1) < 0$. Ahora bien, una función continua que es positiva en 0 y negativa en 1 tiene que anularse en algún punto entre 0 y 1.

De hecho, a y b están únicamente determinados por (5.4) y (5.5) cuando v_1 y v_2 son cóncavas, porque entonces la función g es estrictamente decreciente en $[0, 1]$.

[25] Estas corresponden a lo que los economistas llaman «tasas instántaneas de interés».

Teorema 5.8.1. Supongamos que el equilibrio estacionario y subjuego-perfecto determinado por (5.6) y (5.7) conduce al par de pagos $s(\tau)$. Entonces

$$s(\tau) \to s \quad \text{cuando} \quad \tau \to 0,$$

donde s es la solución de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$ para el problema de negociación $(X_0, 0)$.

Demostración. Se sigue de (5.6) y (5.7) que

$$\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{\beta} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\alpha} = e^{-\tau} \tag{5.8}$$

porque $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$. Pero (5.8) implica que

$$a_1^{\alpha}a_2^{\beta} = b_1^{\alpha}b_2^{\beta}.$$

Así, los puntos $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ pertenecen ambos a la misma curva $x_1^{\alpha}x_2^{\beta} = c$, como muestra la Figura 5.21(b) para el caso $\tau = 1$.

Puesto que $e^{-\tau} \to 1$ cuando $\tau \to 0$, la Ecuación (5.8) nos dice que $a_2/b_2 \to 1$ y $b_1/a_1 \to 1$ cuando $\tau \to 0$. De aquí que los puntos a y b convergen hacia el mismo valor s[26]. Esto nos dice algo interesante acerca de la Figura 5.21(b) en el caso en que δ_i es sustituida en todas partes por δ_i^{τ}. Cuando $\tau \to 0$, la figura se reduce a la Figura 5.15 con $X = X_0$ y $d = 0$. Así, $s(\tau) \to s$ cuando $\tau \to 0$. □

5.8.5. Moraleja de esta historia

Se pueden aprender unas cuantas cosas de la discusión precedente.

La primera es que el contenido intuitivo de los axiomas de Nash de la Sección 5.5.4 es válido. Si el intervalo τ entre propuestas sucesivas en el modelo de negociación de Rubinstein es lo bastante pequeño, entonces un equilibrio subjuego perfecto y estacionario se aproxima necesariamente a una solución de negociación de Nash generalizada con los poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$. Como se observó en la Sección 5.7.1, si no fuera posible encontrar un modelo de negociación razonablemente realista con esta propiedad, entonces la estrategia de investigación propia del

[26] No es necesario suponer a priori de que a y b convergen. El razonamiento demuestra que todos los valores límite de a cuando $\tau \to 0$ son iguales a s. Luego a no puede tener límites diferentes y, por tanto, converge. Un razonamiento análogo vale para b.

programa de Nash apoyaría la idea de que hay que abandonar la idea de solución de negociación de Nash[27].

La segunda cosa se refiere a la interpretación de los poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$. Recordemos que ρ_2 es la tasa de descuento del jugador i. Puesto que $\delta_i = e^{-\rho_i}$, una tasa de descuento alta corresponde a un factor de descuento alto δ_i. Esto es, la gente con tasas de descuento altas es más impaciente que la que las tiene bajas. Una persona paciente, por tanto, conseguirá un poder de negociación mayor que una persona impaciente y su parte del dólar será mayor.

La tercera cosa es de hecho una advertencia. El modelo de negociación de Rubinstein fue estudiado como un juego de información perfecta. En particular, se supone que las preferencias de cada jugador son conocimiento común. Esto incluye en qué medida son impacientes y en qué medida son aversos al riesgo. Como hemos visto, tanto la impaciencia como la aversión al riesgo son propiedades no deseables para un buen negociador.

Sin embargo, raras veces será realista suponer que estas características de los jugadores son conocimiento común antes de que empiecen las negociaciones. En la vida real, uno aprende cómo son aquellos con los que negocia a lo largo de la negociación. Esto puede no ser fácil, particularmente si el oponente se preocupa de esconder sus debilidades, y es hábil haciéndolo.

Así pues, no deberíamos esperar que los negociadores (ni siquiera si son racionales) se pongan de acuerdo rápidamente, como ocurre en el modelo de negociación de Rubinstein, excepto si ambos están extraordinariamente bien informados acerca del otro negociador.

5.8.6. Unicidad del equilibrio

Mates 5.9 →

El estudio del modelo de Rubinstein de horizonte infinito de la Sección 5.8.4 es incompleto. Allí se vio que el modelo tiene un resultado que es un equilibrio subjuego-perfecto que se aproxima a la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$. Un análisis completo es mucho más convincente porque muestra que el juego no tiene otros resultados que sean equilibrios subjuego-perfectos. Por tanto, si los jugadores usan estrategias subjuego-perfectas, la solución de negociación de Nash generalizada no tiene competidores.

Para probar el resultado, volveremos a considerar el caso particular en que la utilidad de Von Neumann y Morgenstern de cada jugador por una cantidad de dinero x obtenida en el instante 0 es simplemente $v_i(x) = x$. Así, John asignará una utilidad $x\delta_1^t$ a un acuerdo que asigna x del dólar a él

[27] Entre las «soluciones de negociación» alternativas a la de Nash la que recibe más atención es la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky del Ejercicio 5.9.19. Existen juegos no cooperativos cuyo único equilibrio subjuego-perfecto coincide con la solución de Kalai-Smorodinsky. Sin embargo, estos juegos no cooperativos no son en absoluto modelos de negociación realistas.

mismo y $1 - x$ del dólar a Mary en el instante t, y Mary asignará a este acuerdo $(1 - x)\delta_2^t$. Como en las secciones anteriores, simplificaremos el álgebra tomando $\tau = 1$.

Teorema 5.8.2 (Rubinstein). El juego de negociación de horizonte infinito G tiene un único resultado que sea un equilibrio subjuego-perfecto.

Demostración. En principio, el juego G puede tener muchos resultados que son equilibrios subjuego-perfectos, en cada uno de los cuales John obtiene un pago distinto. Sea A_1 el mayor de los pagos obtenidos por John en equilibrios subjuego-perfectos, y sea a_1 el menor[28].

Recordemos que H es el juego acompañante en que Mary hace la primera propuesta. Sea B_2 el mayor pago a Mary en un equilibrio subjuego-perfecto del juego H, y sea b_2 el menor.

La demostración consiste en mostrar que $A_1 = a_1$ y $B_2 = b_2$. Necesitaremos dos desigualdades.

1. En el juego G, un equilibrio subjuego-perfecto no puede asignar a Mary menos que $b_2\delta_2$, porque ella siempre puede rechazar cualquier cosa que John le propone en el instante 0. El juego H se jugará entonces empezando en el instante 1. Pero el menor resultado en un equilibrio subjuego-perfecto para Mary en H es b_2, que hay que descontar por un factor δ_2 a causa del retraso de longitud 1. Si Mary consigue por lo menos $b_2\delta_2$ en el equilibrio, entonces John no puede conseguir más de $1 - b_2\delta_2$, porque sólo se pueden repartir un dólar. Esto justifica la primera desigualdad:

$$A_1 \leqslant 1 - b_2\delta_2. \tag{5.9}$$

2. Supongamos que $x < 1 - B_2\delta_2$. Ahora mostraremos que x no es un elemento del conjunto S de pagos obtenidos por John en equilibrios subjuego-perfectos.

Sea $x < y < 1 - B_2\delta_2$. Puesto que $1 - y > B_2\delta_2$, una demanda de y en el instante 0 por John sería necesariamente aceptada por Mary en el equilibrio. Esto es así porque, si la rechaza, el juego acompañante H se jugará en el instante 1. En H el mayor resultado para Mary en un equilibrio subjuego-perfecto es B_2, que ha de ser descontado por un factor δ_2 a causa del retraso temporal de longitud 1. Por tanto, ella consigue más al aceptar $1 - y$ que la mayor cantidad $B_2\delta_2$ que podría obtener al rechazar.

Se sigue de aquí que no puede ser óptimo para John usar una estrategia que le conduce a recibir un pago de x, porque puede obtener y en el instante

---

[28] Resulta que el conjunto S de los pagos obtenidos en equilibrios subjuego-perfectos tiene un máximo y un mínimo. Sin embargo, no es necesario suponer esto. La demostración funciona igualmente bien si se supone que A_1 es el supremo de S y que a_1 es el ínfimo.

0 simplemente pidiendo y. De aquí, $x \notin S$. Ya que esto es cierto para todo $x < 1 - B_2\delta_2$, el menor elemento a_1 de S debe satisfacer

$$a_1 \geqslant 1 - B_2\delta_2. \tag{5.10}$$

Podemos obtener dos desigualdades más intercambiando los papeles de G y de H en la discusión precedente. Las desigualdades son:

$$B_2 \leqslant 1 - a_1\delta_1, \tag{5.11}$$

$$b_2 \geqslant 1 - A_1\delta_1. \tag{5.12}$$

Se sigue de (5.12) que $-b_2 \leqslant -(1 - A_1\delta_1)$. Sustituyendo este resultado en (5.9),

$$A_1 \leqslant 1 - b_2\delta_2 \leqslant 1 - d_2(1 - A_1\delta_1) = 1 - d_2 + A_1\delta_1\delta_2.$$

Se sigue que

$$A_1 \leqslant \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}. \tag{5.13}$$

Análogamente, se sigue de (5.11) que $-B_2 \geqslant -(1 - a_1\delta_1)$. Sustituyendo este resultado en (5.10),

$$a_1 \geqslant 1 - B_2\delta_2 \geqslant 1 - \delta_2(1 - a_1\delta_1) = 1 - \delta_2 + a_1\delta_1\delta_2.$$

Se sigue que

$$a_1 \geqslant \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}. \tag{5.14}$$

Pero a_1 es el mínimo del conjunto S y A_1 es el máximo del conjunto S. De aquí que $a_1 \leqslant A_1$. Así, (5.13) y (5.14) y las correspondientes desigualdades para B_2 y b_2 implican que

$$a_1 = A_1 = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2} \quad ; \quad b_2 = B_2 = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2}.$$

Esto completa la demostración del teorema. □

¿Qué par de estrategias de equilibrio subjuego-perfecto proporciona el único pago de equilibrio, a_1? Resulta que las estrategias puras necesarias son las discutidas en la Sección 5.8.4. En particular, John propone el acuerdo $a = (a_1, a_2) = (a_1, 1 - a_1)$ en el instante 0 y Mary lo acepta[29].

¿Concuerda esta conclusión con el resultado de la Sección 5.8.4, según el cual el acuerdo alcanzado, a, se aproxima a la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$ cuando el intervalo τ entre propuestas sucesivas es lo bastante pequeño? Para investigar este extremo es necesario sustituir δ_i por δ_i^τ en todas partes y entonces considerar el valor límite de a_1 cuando $\tau \to 0$. Por la regla de l'Hôpital[30],

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1-\delta_2^\tau}{1-\delta_1^\tau\delta_2^\tau}\right) = \lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1-e^{-\tau\rho_2}}{1-e^{-\tau(\rho_1+\rho_2)}}\right)$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\left(\frac{\tau\rho_2}{\tau(\rho_1+\rho_2)}\right) = \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}.$$

Así, el acuerdo $a = (a_1, a_2)$ divide el dolar entre John y Mary según la proporción $\rho_1 : \rho_2$. Esto es exactamente lo predicho por la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$.

5.9. Ejercicios

Revisión 1. Explicar por qué el vector $w = (3 - 2\alpha, 2, 1 + 2\alpha)$ determina un punto de la recta que pasa por los puntos $x = (1, 2, 3)$ e $y = (3, 2, 1)$. ¿Para qué valor de α el vector w se encuentra equidistante de x e y? ¿Para qué valor de α el vector w se encuentra en el centro de gravedad de una masa de 1/3 en x y una masa de 2/3 en y?

[29] Si perteneciera al equilibrio que Mary rechazara la primera propuesta de John, entonces el juego H se jugaría en el instante 1. El pago del único equilibrio subjuego-perfecto para John en H es $b_1 = 1 - b_2$, que debe ser descontado por δ_1 a causa del retraso de longitud 1. Pero es fácil comprobar que $b_1\delta_1 < a_1$. De aquí que un rechazo de Mary en el instante 0 impediría que John alcanzara su pago del único equilibrio.

[30] Si f y g son continuas en a, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

siempre que $g(a) \neq 0$. ¿Qué ocurre si $g(a) = 0$? El límite también puede ser finito, si $f(a) = 0$. La regla de l'Hôpital dice

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que f y g son derivables en un entorno de a y existe el límite por la derecha.

Revisión 2. Dibujar un diagrama que muestre los vectores (1, 1), (4, 2), (2, 4) y (3, 3) en $\mathbb{R}^2$. Indicar la clausura convexa H del conjunto formado por estos cuatro vectores. ¿Por qué (3, 3) es una combinación convexa de (4, 2) y (2, 4)? Indicar en el diagrama los vectores 2/3(1, 1) + 1/3(4, 2) y 1/3(1, 1) + 1/3(4, 2) + 1/3(3,3).

Revisión 3. Dibujar esquemáticamente los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles son convexos? ¿Quiénes son sus clausuras convexas?

a) $A = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$
b) $B = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$
c) $C = \{x : x_1 = 4\}$
d) $D = \{x : x_1 \leqslant 4\}$
e) $E = \{x : x_1 = 4 \text{ ó } x_2 = 4\}$.

Revisión 4. Trazar las rectas soporte del conjunto convexo H del Ejercicio 5.9.2 en los puntos (1, 1), (2, 4), (3, 3) y (2, 4/3). Donde sea posible trazar más de una recta soporte, trazar varias.

Revisión 5. Comprobar que la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 1 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + 2 \end{aligned}$$

es afín. Indicar los puntos $f(1, 1)$, $f(2, 4)$ y $f(4, 2)$ en un diagrama. Indicar también las imágenes $f(H)$ y $f(l)$ para el conjunto H y para una de las rectas soporte l dibujadas en el Ejercicio 5.9.4.

6. Hallar la región de pagos cooperativos X para el juego bimatricial de la Figura 5.22 en el caso en que los jugadores pueden hacer contratos vinculantes para usar una lotería, pero no pueden eliminar libremente útiles ni transferirlos.

7. Hallar la región de pagos cooperativos Y para el juego bimatricial de la Figura 5.22 en el caso en que se permite la eliminación libre, pero no se pueden transferir útiles.

8. Hallar la región de pagos cooperativos Z para el juego bimatricial de la Figura 5.22 en el caso en que se permite la eliminación libre y se pueden transferir útiles de un jugador a otro.

	t_1	t_2	t_3
s_1	−1 / −1	3 / 1	0 / 3
s_2	0 / 1	1 / 0	3 / 0

Figura 5.22. El juego bimatricial de los Ejercicios 5.9.6, 5.9.7 y 5.9.8.

9. ¿Cuáles de los siguientes valores de y satisfacen que $y > x$ y son, por tanto, mejoras de Pareto de $x = (2, 3)$?
a) $y = (4, 4)$ *b*) $y = (1, 2)$ *c*) $y = (2, 4)$
d) $y = (3, 3)$ *e*) $y = (2, 3)$ *f*) $y = (3, 2)$.
¿Para cuáles de estos valores de y es cierto que $y \geqslant x$? ¿Para qué valores de y es cierto que $y \gg x$?
10. Explicar por qué (dD, dD) es un par de estrategias puras Pareto-eficientes para el juego del Ejercicio 4.8.27. ¿Es éste un equilibrio de Nash del juego?
11. Hallar los puntos Pareto-eficientes de los conjuntos Y y Z de los Ejercicios 5.9.7 y 5.9.8. ¿Cuáles son los conjuntos de negociación cuando el punto de desacuerdo es $d = (0, 1)$? ¿Cuáles son los conjuntos de negociación cuando el punto de desacuerdo es $e = (1, 0)$?
12. Hallar el valor de la solución de negociación de Nash regular para cada uno de los problemas (Y, d), (Z, d), (Y, e) y (Z, e), donde Y, Z, d, y e están definidos como en el ejercicio anterior.
13. Hallar los valores de la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ para cada uno de los problemas del ejercicio anterior.
14. Repetir el ejercicio anterior con $\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$.

Econ

15. Una empresa fabrica ruedas dentadas que vende al precio de 8 dólares por unidad. Para fabricar ruedas dentadas son necesarios varios inputs, todos gratis excepto el valor del trabajo. La función de producción de la empresa $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ viene dada por $s = f(l) = \sqrt{l}$, donde s es el número de ruedas producidas diariamente cuando se usan l horas de trabajo. Si el salario por hora es w, explicar por qué el beneficio diario de la empresa es $\pi = 8\sqrt{l} - wl$. Si el trabajador considera que cada hora de ocio vale 1 dólar, explicar por qué sus ingresos diarios son $I = wl + (24 - l)$. Tanto el trabajador como la empresa son neutrales al riesgo.
a) Hallar el valor de l que maximiza el excedente $s = \pi + I$ disponible para la empresa y el trabajador conjuntamente.
b) Supongamos que el trabajador y la empresa negocian sobre el salario y el número de horas laborables. ¿Cuál es su punto de desacuerdo? ¿Cómo se dividirá el excedente si se usa la solución de negociación de Nash regular? ¿Sobre qué salario se llegará a un acuerdo? ¿Cuántas horas tendrá la jornada laboral?
c) Para cada w, determinar la duración l de la jornada laboral que maximiza el beneficio de la empresa.
d) Supongamos ahora que el trabajador y la empresa sólo negocian sobre el salario w. Despues de llegar a un acuerdo sobre el salario, la empresa determina de forma unilateral el número de horas de trabajo que desea comprar. Determinar en función de w el valor del producto de Nash regular que resulta entonces. ¿Sobre qué salario se llegará a un acuerdo? ¿Cuál será la duración de la jornada laboral?
e) ¿Por qué dice la empresa que hay sobreocupación (demasiadas horas trabajadas) en el caso (b)? ¿Por qué puede responder el trabajador diciendo que el caso (d) es socialmente ineficiente?

Filo

16. Dado un problema de negociación (X, d) en el que X satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Sección 5.5.1, explicar por qué *cualquier* par de pagos en el conjunto de negociación es la solución de negociación de Nash generalizada para algunos poderes de negociación α y β. ¿Deberíamos deducir que el Teorema 5.5.1 carece de contenido?

Mates

17. Dado un problema de negociación (X, d) en el que X satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Sección 5.5.1, sea m_1 el mayor valor de x_1 tal que $(x_1, d_2) \in X$. Sea m_2 el mayor valor de x_2 tal que $(d_1, x_2) \in X$. Hallar m_1 y m_2 para cada uno de los problemas del Ejercicio 5.9.12. Explicar por qué la solución de negociación de Nash regular siempre asigna al jugador i una utilidad que es por lo menos $1/2(m_i - d_i)$.

Mates

18. Hallar dos problemas de negociación (X, d) e (Y, d) tales que $Y \subseteq X$ pero en los que la solución de negociación de Nash regular asigna más a la jugadora II en (Y, d) que en (X, d). A veces se dice que la solución de negociación de Nash regular sería un buen candidato para ser adoptada por un árbitro que buscara un esquema para decidir disputas de forma justa. ¿La propiedad de la solución de negociación de Nash regular estudiada en este ejercicio, sería apreciada por un árbitro así?

Econ

19. La solución de negociación de Kalai-Smorodinsky, $K: B \to \mathbb{R}^2$, se define tomando $K(X, d)$ igual al único punto Pareto-eficiente de X que se encuentra sobre la recta que une los puntos d y m, donde m queda definido como en el Ejercicio 5.9.17. Hallar $K(X, d)$ para cada uno de los problemas de negociación del Ejercicio 5.9.12.

Econ

20. La solución de negociación de Kalai-Smorodinsky, $K: B \to \mathbb{R}^2$, definida en el ejercicio anterior sólo deja de satisfacer uno de los cuatro axiomas de la Sección 5.5.4. ¿Qué axioma deja de satisfacer? Dar ejemplos de problemas de negociación concretos en los cuales el axioma no se cumple cuando se aplica a $K: B \to \mathbb{R}^2$.
21. John y Mary se dividirán un dólar si pueden ponerse de acuerdo en cómo debe ser dividido. ¿Cómo se dividirán el dólar si usan la solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación $\alpha = 2/5$ y $\beta = 3/5$, cuando la utilidad de Von Neumann y Morgenstern para John por \$$x$ es $v_1(x) = x^\gamma$ y para Mary es $v_2(x) = x^\delta$, donde $\gamma = 1/4$ y $\delta = 3/4$? ¿Quién incrementaría su parte del dólar si γ y δ pasaran a ser ambos 1/2?
22. Repetir el ejercicio anterior para el caso en que $\gamma = 3$ y $\delta = 2$.

23. Hallar un equilibrio de Nash para el juego del ultimátum de la Sección 5.8.1 que termina con el dólar dividido 50 : 50.

Filo 24. Supongamos $\tau = 1$ y $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}9$ en el juego de negociación en dos etapas de la Sección 5.8.3. Hallar todos los equilibrios subjuego-perfectos cuando los jugadores sólo pueden hacer propuestas en números enteros de centavos.

25. Supongamos que el juego de negociación en dos etapas de la Sección 5.8.3 se extiende a tres etapas, con la jugadora II haciendo la primera propuesta. Existe un único equilibrio subjuego-perfecto. ¿Cuánto asigna éste a la jugadora II?

Econ 26. En el juego de negociación de horizonte infinito de Rubinstein de la Sección 5.8.4, supongamos que los jugadores quedan limitados a proponer o bien que John se queda con el dólar entero, o bien que Mary se queda con el dólar entero.
   a) Mostrar que existe un equilibrio subjuego-perfecto en el que John empieza proponiendo que él se queda con el dólar entero y Mary acepta.
   b) Mostrar que existe un equilibrio subjuego-perfecto en el que John empieza proponiendo que Mary se quede con el dólar entero y Mary acepta.
   c) Mostrar que existen otros equilibrios subjuego-perfectos en los que no se llega a un acuerdo de forma inmediata[31].

Fun 27. Supongamos que John y Mary juegan el siguiente juego de negociación sobre la división de un dólar donado por un filántropo. Este especifica que sólo se permiten los repartos 10 : 90, 20 : 80, 50 : 50 y 60 : 40, y también que John y Mary deben vetar alternativamente los repartos que consideren inaceptables. ¿Qué reparto resultará si se usan estrategias subjuego-perfectas y John es el primero que puede vetar? ¿Qué reparto resultará si empieza Mary?

[31] La Sección 5.8.2 estudia una versión finita del juego del ultimátum en la que el dólar sólo se puede dividir en números enteros de centavos. Entonces identificamos *dos* equilibrios subjuego-perfectos. Usando las técnicas requeridas para el Ejercicio 5.9.26, se puede demostrar que también existen equilibrios múltiples en el modelo de horizonte infinito de Rubinstein cuando las propuestas sólo pueden hacerse en números enteros. De hecho, si los factores de descuento de los jugadores son lo bastante próximos a 1, *cualquier* acuerdo es un resultado que es un equilibrio subjuego-perfecto en el modelo de Rubinstein. Esto debe ser comparado con el resultado de la Sección 5.8.6, según el cual la versión continua del modelo de negociación de Rubinstein tiene un único equilibrio subjuego-perfecto. ¿Deberíamos concluir, como tal vez lo hacen algunos, que este último resultado sólo es una curiosidad matemática? En mi opinión sería una conclusión ingenua argumentar que, puesto que algunos aspectos del mundo real son discretos, un modelo discreto *necesariamente* modeliza mejor la forma en que los jugadores perciben el mundo. En el caso presente, no se puede evadir la pregunta de qué determina el valor de la menor unidad de moneda. Esta unidad cambia con el transcurso del tiempo, pero siempre es tan pequeña que una unidad más o menos resulta siempre indiferente incluso a los ciudadanos más pobres. Por tanto, la escala monetaria puede ser percibida apropiadamente como un continuo. Si una unidad de más o de menos *importara*, entonces la gente encontraría la manera de subdividir las unidades. Por ejemplo, John podría proponer a Mary que ella se quedara con 47 centavos si una moneda sale cara y con 48 centavos si sale cruz.

C A P I T U L O

6

Mixturas

6.1. Introducción

Este capítulo se ocupa de estrategias mixtas. Un jugador usa una estrategia mixta cuando elige aleatoriamente una estrategia pura. Por ejemplo, un jugador que dispone de dos estrategias puras podría decidir usar una estrategia pura con probabilidad 1/3 y la otra con probabilidad 2/3.

Tal vez puede parecer extraño que un jugador racional se decida de esta manera a dejar las cosas al azar. Pero considérese el caso de los faroles del póquer. Es evidente que jugar racionalmente tiene que incluir el echarse algun farol. Supongamos, por ejemplo, que Mary nunca farolea. Cuando apuesta fuerte, todo el mundo sabe que debe tener una buena mano. Luego sus oponentes se apresurarán a retirarse, salvo en aquellas pocas ocasiones en que alguien piense que tiene una mano mejor. Por tanto, Mary raramente ganará mucho cuando tenga buenas manos, pero ocasionalmente perderá. Para tener la oportunidad de ganar una cantidad considerable cuando tiene una buena mano, a veces Mary debe apostar fuerte cuando tiene una mano floja. Esto es, a veces debe echarse un farol. Por supuesto, no le servirá de nada farolear, si los demás jugadores pueden anticipar cuándo lo hará. Mary necesita que sus faroles sean *impredecibles.* Esto se puede asegurar delegando la elección de cuándo hay que echarse un farol a un mecanismo cuidadosamente elegido y que funcione al azar. Ni siquiera Mary podrá entonces predecir cuándo se echará un farol. Esta estratagema ciertamente hará que sus oponentes sólo puedan intentar adivinar.

Quien ha jugado al póquer puede quedar convencido por este razonamiento en favor del uso racional de estrategias mixtas. Ahora queda la cuestión de *qué* estrategia mixta hay que escoger. ¿Con qué frecuencia debería farolear un jugador racional, y con qué manos? Esta cuestión la dejaremos para un capítulo posterior. En el presente capítulo sólo consideraremos el uso de estrategias mixtas en juegos que son mucho más simples que el póquer.

6.2. Minimax y maximín

El teorema del minimax de Von Neumann es tal vez el resultado más famoso de la teoría de juegos. Esta sección contiene material necesario para estudiar el caso en que los jugadores se limitan a utilizar estrategias puras.

6.2.1. El cálculo de valores minimax y maximín

Sea S el conjunto de filas de la matriz M de la Figura 6.1, y sea T el conjunto de columnas. La casilla en la fila s y columna t será designada por $\pi(s, t)$. Entonces

$$\max_{s \in S} \pi(s, t) \quad \text{y} \quad \min_{t \in T} \pi(s, t)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & 1 & 6 & 0 \\ \hline s_2 & 2 & 0 & 3 \\ \hline s_3 & \boxed{3} & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$\overline{m} = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s, t)$

(a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ \hline s_2 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ \hline s_3 & 3 & \boxed{2} & 4 \\ \hline \end{array}$$

el máx de los min

$\underline{m} = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s, t)$

(b)

Figura 6.1. Valores minimax y maximin de la matriz M.

son, respectivamente, la mayor casilla de la columna t y la menor de la fila s. Las casillas mayores de cada columna aparecen dentro de un círculo en la Figura 6.1(a). Las menores casillas en cada fila aparecen encerradas en un cuadrado en la Figura 6.1(b). Obsérvese que

$$\max_{s \in S} \pi(s, t_1) = 3 \qquad \min_{t \in T} \pi(s_1, t) = 0,$$
$$\max_{s \in S} \pi(s, t_2) = 6 \qquad \min_{t \in T} \pi(s_2, t) = 0,$$
$$\max_{s \in S} \pi(s, t_3) = 4 \qquad \min_{t \in T} \pi(s_3, t) = 2.$$

Se sigue que

$$\overline{m} = \min_{t \in T} \{\max_{s \in S} \pi(s, t)\} = \min \{3, 6, 4\} = 3,$$
$$\underline{m} = \max_{s \in S} \{\min_{t \in T} \pi(s, t)\} = \max \{0, 0, 2\} = 2.$$

La cantidad $\overline{m}$ es el valor minimax de la matriz M. La cantidad $\underline{m}$ es el valor maximín de la matriz M.

Teorema 6.2.1. $\underline{m} \leqslant \overline{m}$.

Mates 6.2.2 ⟶

Demostración. Para todo $t \in T$, $\min_{t \in T} \pi(s, t) \leqslant \pi(s, t)$. Luego

$$\max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s, t) \leqslant \max_{s \in S} \pi(s, t).$$

Aplíquese ahora esta desigualdad al valor particular de $t \in T$ que minimiza el lado derecho. □

El ejemplo que precede al Teorema 6.2.1 muestra que puede darse el caso en que $\underline{m}$ es estrictamente menor que $\overline{m}$, o sea, que $\underline{m} < \overline{m}$. ¿Cuándo se

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & 0 & 1 & 7 \\ \hline s_2 & 4 & \boxed{2} & 3 \\ \hline s_3 & 9 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$\overline{m} = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s, t)$

(a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & \boxed{0} & 1 & 7 \\ \hline s_2 & 4 & \boxed{2} & 3 \\ \hline s_3 & 9 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \hline \end{array}$$

$\underline{m} = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s, t)$

(b)

Figura 6.2. Valores minimax y maximín de la matriz N.

cumple que $\underline{m} = \overline{m}$? Esto ocurre algunas veces, como en el caso de la matriz N ilustrado en la Figura 6.2. Para decir algo más general es necesario volver a la idea del punto de silla introducido en la Sección 1.7.2.

6.2.2. *Puntos de silla*

Sea $\pi(s, t)$ la casilla en la fila s y la columna t de una matriz N. El par (σ, τ) es un *punto de silla* de la matriz N cuando $\pi(\sigma, \tau)$ es la mayor casilla de su columna y la menor casilla de su fila. La matriz N de la Figura 6.3(a) es la misma que la de la Figura 6.2. La mayor casilla de cada columna ha sido rodeada por un círculo, y la casilla menor de cada fila ha sido encerrada en un cuadrado. La casilla de la fila s_2 y la columna t_2 aparece dentro de un cuadrado y un círculo. Se sigue que (s_2, t_2) es un punto de silla de la matriz.

Las alturas de los prismas de la Figura 6.4(a) representan las casillas de la matriz N de la Figura 6.3(a). El prisma de la fila s_2 y columna t_1 es 4 porque $\pi(s_2, t_1) = 4$. Observando la figura atentamente, se entenderá por qué se llama un punto de silla al par (s_2, t_2). Sin embargo, la silla dibujada sería muy incómoda para sentarse.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & \boxed{0} & 1 & 7 \\ \hline s_2 & 4 & \boxed{2} & 3 \\ \hline s_3 & 9 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \hline \end{array}$$

Punto de silla

(a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ \hline s_2 & 2 & \boxed{0} & 3 \\ \hline s_3 & 3 & \boxed{2} & 4 \\ \hline \end{array}$$

No tiene punto de silla

(b)

Figura 6.3. Puntos de silla.

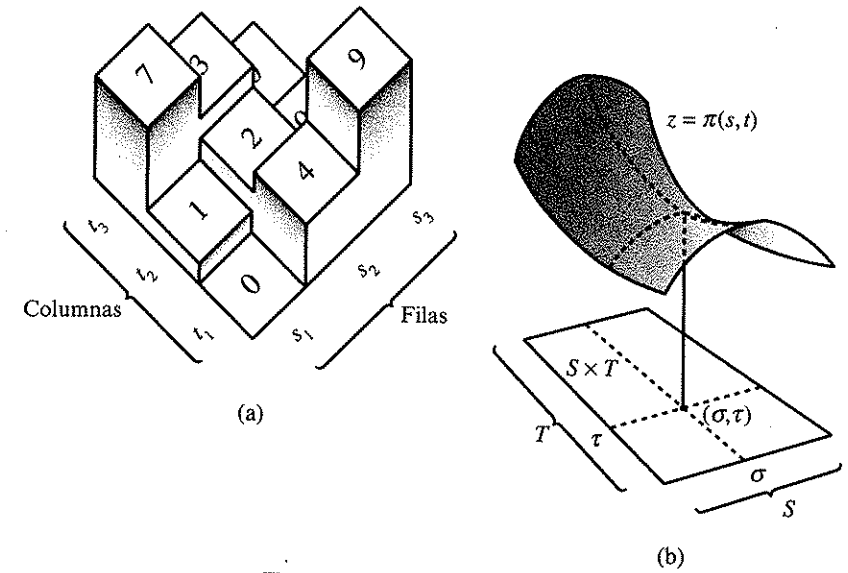


Figura 6.4. Puntos de silla.

La Figura 6.4(b) se parece más a una silla. Muestra un punto de silla (σ, τ) de una función continua $\pi : S \times T \to \mathbb{R}$ en el caso en que S y T son intervalos cerrados de números reales. Los números reales del conjunto S deben ser imaginados como marcando las filas de una «matriz». Las columnas vienen marcadas por los números reales del conjunto T. La casilla en la fila s y la columna t de la «matriz» es $\pi(s, t)$. El requisito para que (σ, τ) sea un punto de silla es que el pago $\pi(\sigma, \tau)$ sea el mayor de su columna y el menor de su fila. En términos matemáticos,

$$\pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau) \geqslant \pi(s, \tau) \tag{6.1}$$

para todo s de S y todo t de T.

La matriz M de la Figura 6.3(b) ha sido reproducida de la Figura 6.1. Recordemos que los valores maximín y minimax de M *no* son iguales. El mayor pago en cada columna de M ha sido rodeado por un círculo, y el menor pago de cada fila por un cuadrado. Ningún pago es rodeado por ambas figuras, o sea que la matriz M no tiene puntos de silla.

Mates 6.3 ⟶

Por otra parte, hemos visto que que los valores maximín y minimax de la matriz N de la Figura 6.3(a) son iguales y que la matriz sí tiene un punto de silla $(\sigma, \tau) = (s_2, t_2)$. Al examinar la Figura 6.2 se observa que $\sigma = s_2$ es la fila que hace alcanzar su valor mayor a $\min_{t \in T} \pi(s, t)$, y que $\tau = t_2$ es la columna que hace alcanzar su valor menor a $\max_{s \in S} \pi(s, t)$. Formalmente

$$\min_{t \in T} \pi(\sigma, t) = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s, t) = \underline{m} \tag{6.2}$$

$$\max_{s \in S} \pi(s, \tau) = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s, t) = \overline{m} \tag{6.3}$$

El siguiente teorema confirma que esta relación entre valores maximín y minimax y puntos de silla se cumple en general.

Teorema 6.2.2. Una condición necesaria y suficiente para que (σ, τ) sea un punto de silla es que σ y τ queden definidos por (6.2) y (6.3) y que $\underline{m} = \overline{m}$. Cuando (σ, τ) es un punto de silla, $\underline{m} = \pi(\sigma, \tau) = \overline{m}$.

Demostración. 1. Supongamos en primer lugar que (σ, τ) es un punto de silla. Así, $\pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau) \geqslant \pi(s, \tau)$ para todo s de S y todo t de T. Esto implica que

$$\min_{t \in T} \pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau) \geqslant \max_{s \in S} \pi(s, \tau)$$

y de aquí

$$\underline{m} = \max\nolimits_{\sigma \in S} \min\nolimits_{t \in T} \pi(\sigma, t) \geqslant \min\nolimits_{t \in T} \pi(\sigma, t) \geqslant$$

$$\geqslant \max\nolimits_{s \in S} \pi(s, \tau) \geqslant \min\nolimits_{\tau \in T} \max\nolimits_{s \in S} \pi(s, \tau) = \overline{m}.$$

Pero el Teorema 6.2.1 afirma que $\underline{m} \leqslant \overline{m}$. Así pues, todos los signos $\geqslant$ en la expresión anterior deben ser sustituidos por signos $=$.

2. Supongamos ahora que $\underline{m} = \overline{m}$. Debemos demostrar que existe un punto de silla (σ, τ). Escojamos σ y τ que satisfagan (6.2) y (6.3). Entonces, dados cualesquiera s de S y t de T,

$$\pi(\sigma, t) \geqslant \min_{t \in T} \pi(\sigma, t) = \underline{m} = \overline{m} = \max_{s \in S} \pi(s, \tau) \geqslant \pi(s, \tau).$$

Tomando $s = \sigma$ y $t = \tau$ en esta desigualdad demostramos que $\underline{m} = \pi(\sigma, \tau) = \overline{m}$. Luego se satisface el requisito de punto de silla para (σ, τ). □

6.2.3. *Supremos e ínfimos*

La discusión de las secciones anteriores es de carácter técnico. Hubiera sido mucho más técnica si no nos hubiéramos limitado al caso en que los conjuntos S y T son finitos. En el caso finito, los máximos y mínimos que hemos considerado siempre existen. En ocasiones, sin embargo, es necesario considerar conjuntos infinitos de estrategias puras. En estos casos no está asegurada la existencia de máximos y mínimos. La noción de máximo debe ser reemplazada entonces por la de supremo (abreviadamente, sup) y la noción de ínfimo (inf)[1]. Al mismo tiempo hay que exigir condiciones adi-

[1] El supremo de un conjunto es su menor cota superior. Por ejemplo, el intervalo abierto (0, 1) no tiene un elemento máximo, pero todos sus elementos son menores que 2. Así, 2 es una

cionales a la función de pagos $\pi : S \times T \to \mathbb{R}$ para poder obtener resultados. En lo que sigue, no tendremos en cuenta la posibilidad de que surjan dificultades de este tipo, exceptuando que a veces escribiremos «sup» e «inf» en lugar de «máx » y «mín».

6.3. Seguridad ante todo

Los niveles de seguridad y las estrategias de seguridad fueron consideradas por primera vez en la Sección 1.9.1. Ahora necesitamos examinar esta idea más de cerca.

6.3.1. *Niveles de seguridad*

El *nivel de seguridad* de un jugador en un juego es el mayor pago esperado que el jugador o la jugadora puede *asegurarse* con independencia de lo que hagan los demás jugadores. Para calcular su nivel de seguridad un jugador tiene que realizar un análisis poniéndose en el peor de los casos. Por ejemplo, supongamos que John y Mary son los protagonistas de un juego de dos jugadores. Para calcular su nivel de seguridad, John debe preguntarse qué haría en la hipótesis paranoica de que Mary va a predecir su estrategia y actuará para *minimizar* el pago de John. La estrategia que John escogería en esta hipótesis paranoica se llama una *estrategia de seguridad*. Así, si John

	t_1	t_2	t_3
s_1	$\boxed{0}$, 1	1, 2	7, 3
s_2	4, 6	$\boxed{2}$, 0	3, 2
s_3	9, 0	$\boxed{0}$, 3	$\boxed{0}$, 4

(a)

	t_1	t_2	t_3
s_1	1, 0	6, 4	0, 9
s_2	2, 1	0, 2	3, 0
s_3	3, 7	2, 3	4, 0

(b)

Figura 6.5. Dos juegos bimatriciales.

cota superior de (0, 1). La menor cota superior es 1. Se sigue que 1 es el supremo de (0, 1). No es el máximo del conjunto porque no es un elemento del conjunto. Por definición, el máximo de un conjunto es su mayor elemento. Al no pertenecer al conjunto, 1 no puede ser candidato a máximo. Obsérvese que (0, 1) no tiene mínimo, pero que su ínfimo es 0.

usa una de sus estrategias de seguridad, se asegura un pago por lo menos igual a su nivel de seguridad.

Supongamos que John es el jugador I y Mary la jugadora II en el juego bimatricial de la Figura 6.5(a). La matriz de pagos de John en este juego es la matriz de la Figura 6.2. Al ponerse en el peor de los casos, John puede razonar de la manera siguiente. Si él empieza por escoger la fila s_1, entonces Mary puede olvidarse de su propio bienestar para poder minimizar el de John. En este caso, ella escogería a continuación la columna t_1. Entonces John conseguirá un pago 0. Si John empieza con la fila s_2, Mary le seguirá con la columna t_2 y el pago de John será 2. Si él empieza con la fila s_3, Mary le seguirá con la columna t_2 o la t_3, de manera que John conseguirá un pago 0. Poniéndose en el peor de los casos conduce a que el conjunto de pagos de John sea $\{0, 2, 0\}$, que son los pagos encerrados en cuadrados en el diagrama de la Figura 6.5(a). El mejor pago de este conjunto es el pago 2, rodeado por un círculo. Así, John puede asegurarse un pago de por lo menos 2 por medio de la estrategia pura s_2. Volviendo a la matriz de la Figura 6.2(b), podemos observar que $2 = \underline{m}$.

Este argumento puede ser utilizado en general para mostrar que el jugador I siempre dispone de un estrategia pura que le asegura un pago por lo menos tan bueno como el valor maximín $\underline{m}$ de su matriz de pagos. ¿Significa esto que $\underline{m}$ es el nivel de seguridad del jugador I?

Teorema 6.3.1. Si la matriz de pagos del jugador I tiene un punto de silla (σ, τ), entonces su nivel de seguridad es $\underline{m} = \pi_1(\sigma, \tau) = \overline{m}$, y σ es una de las estrategias de seguridad.

Demostración. Recordemos de (6.1) que la condición para un punto de silla es que $\pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau) \geqslant \pi(s, \tau)$ para cada s en S y cada t en T. La desigualdad $\pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau)$ nos dice que el jugador I debe conseguir por lo menos $\underline{m} = \pi(\sigma, \tau)$ al jugar σ cualquiera que sea la estrategia $t \in T$ que use la jugadora II. La desigualdad $\pi(\sigma, \tau) \geqslant \pi(s, \tau)$ nos dice que el jugador I no se puede asegurar más de $\underline{m} = \pi(\sigma, \tau)$ usando otra estrategia pura s, porque la jugadora II siempre puede responder jugando τ. □

Puesto que la matriz de pagos de John, N, en el juego de la Figura 6.5(a) tiene un punto de silla, el teorema confirma que el nivel de seguridad de John es 2 y que s_2 es una estrategia de seguridad.

Consideremos ahora el nivel de seguridad de John en el juego bimatricial de la Figura 6.5(b). Ahora la matriz de pagos de John es la matriz M de la Figura 6.1. Su valor maximín es $\underline{m} = 2$. Pero, toda vez que que la matriz M no tiene un punto de silla, el Teorema 6.3.1 *no* nos dice que 2 es el nivel de seguridad de John. De hecho, el nivel de seguridad de John es 2 2/3. Para entender por qué, es necesario considerar el uso de estrategias mixtas en el juego. Retomaremos la cuestión en la Sección 6.4.

6.3.2. *Más sobre el duelo*

Mates 6.4 ⟶

El juego del duelo ha sido analizado en dos ocasiones, la primera en el Capítulo 2, usando el algoritmo de Zermelo, y la segunda en el Capítulo 4, usando el método de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. Ahora usaremos el juego para mostrar cómo se pueden calcular las estrategias de seguridad en juegos complejos.

Como en la Sección 4.1.2, nos limitaremos a considerar una forma simplificada estratégica en la que un jugador queda limitado a aquellas estrategias puras en las que su dedo inquieto sólo se mantiene alejado del gatillo hasta el momento en que los duelistas están separados por una distancia d. Designaremos una estrategia pura así por d. En la Sección 4.1.2, sólo se admitían un número finito de valores de d, pero ahora cada jugador podrá escoger cualquier d del intervalo cerrado $[0, D]$[2]. Esto nos deja con una «matriz» infinita a considerar en lugar de la matriz 6×5 de la Sección 4.1.2. Sin embargo, daremos por supuesto que la nueva «matriz» también tiene un punto de silla[3], de manera que el nivel de seguridad del jugador I es igual al valor maximín $\underline{m}$ de la «matriz».

Recordemos que la probabilidad de que el jugador que dispara primero dé en el contrario cuando se encuentran separados por una distancia d es $p_i(d)$. Supongamos que el jugador I decide esperar a disparar hasta encontrarse a una distancia d, y que el jugador II decide esperar hasta encontrarse a una distancia e. En este caso, la casilla $\pi(d, e)$ en la fila d y columna e de la «matriz» de pagos del jugador I es la probabilidad de sobrevivir al usar estas estrategias. Así,

$$\pi(d, e) = \begin{cases} p_1(d), & \text{si } d > e, \\ 1 - p_2(e), & \text{si } d < e. \end{cases}$$

El nivel de seguridad del jugador I viene dado por

$$\underline{m} = \max_d \inf_e \pi(d, e),$$

donde hemos escrito «inf» por las razones apuntadas en la Sección 6.2.3.

Según los diagramas de la Figura 6.6(a)

$$m(d) = \inf_e \pi(d, e) = \begin{cases} 1 - p_2(d), & \text{si } p_1(d) \geqslant 1 - p_2(d), \\ p_1(d), & \text{si } p_1(d) \leqslant 1 - p_2(d). \end{cases}$$

[2] Hemos de añadir algo a la historia de la Sección 2.4.1, porque ésta no explica qué ocurriría si ambos jugadores decidieran disparar exactamente desde la misma distancia. Supondremos que en este caso el resultado es que el azar escoge uno de los jugadores para tocarlo antes que al otro. En la lotería obtenida, el jugador I sobrevive con probabilidad $q = 1/2(p_1(d) + 1 - p_2(d))$.

[3] Si no está dispuesto a creerse esto, calcule el valor maximín $\overline{m}$ por el mismo método que hemos utilizado en el texto, y compruebe entonces que $\overline{m} = \underline{m}$, como dice el Teorema 6.2.2.

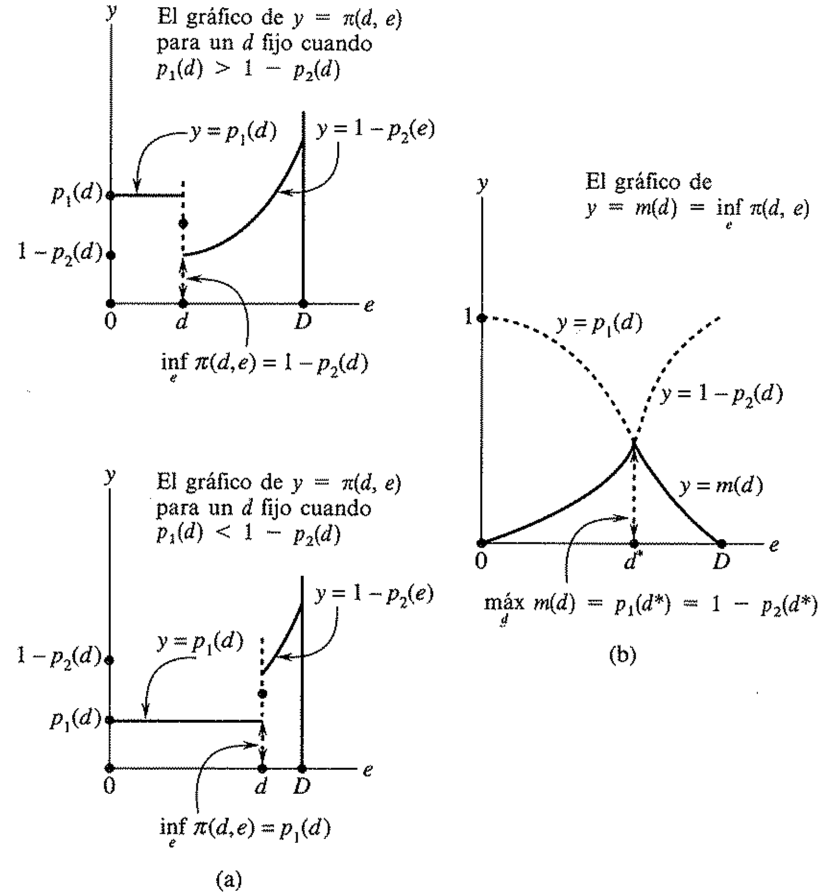


Figura 6.6. Consideraciones tipo maximín para el juego del duelo.

La cantidad $m(d)$ ha sido representada en la Figura 6.6(b). Su valor máximo se da cuando $p_1(d) = 1 - p_2(d)$. Si recordamos que d^* ha sido definida en la Sección 2.4 por $p_1(d^*) + p_2(d^*) = 1$, se sigue que

$$\underline{m} = m(d^*) = \inf_e \pi(d^*, e) = \max_d \inf_e \pi(d, e).$$

Luego el jugador I se asegura su nivel de seguridad $\underline{m} = p_1(d^*) = 1 - p_2(d^*)$, o algo mejor, disparando desde la distancia d^*. No es por casualidad que la estrategia de seguridad del jugador I coincide con la estrategia de equilibrio calculada en la Sección 2.4.1. Como veremos, siempre es cierto que que una estrategia de equilibrio de Nash es una estrategia de seguridad en un juego estrictamente competitivo. Sin embargo, este no es un resultado a sobrevalorar. La mayoría de los juegos interesantes no son estrictamente competitivos y sus resultados de equilibrio de Nash proporcionan a sus jugadores algo más que sus niveles de seguridad.

6.4. Estrategias mixtas

Una estrategia mixta para el jugador I en un juego bimatricial $m \times n$ es un vector columna p, $m \times 1$, de coordenadas no negativas que suman 1. La coordenada p_j ha de ser interpretada como la probabilidad con la que el jugador I utilizará la estrategia pura s_j. Análogamente, una estrategia mixta para la jugadora II es un vector columna q, $n \times 1$. La coordenada q_k es la probabilidad con la que la jugadora II utilizará la estrategia pura t_k. El conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador I se designará por P y el conjunto de todas las estrategias mixtas de la jugadora II por Q.

Consideremos el juego bimatricial 3×3 de la Figura 6.5(b). Como ejemplo de una estrategia mixta de John en este juego, consideremos el vector columna 3×1 $p = (1/4, 1/4, 1/2)^{\mathrm{T}}$. Para poner en práctica esta estrategia mixta, John podría sacar una carta de una baraja bien barajada y usar su primera estrategia pura si saca un corazón, su segunda estrategia pura si saca un diamante y su tercera estrategia pura en los demás casos. Un ejemplo de estrategia mixta de Mary es el vector columna 3×1 $q = (1/2, 1/2, 0)^{\mathrm{T}}$. Mary puede poner en práctica esta estrategia mixta lanzando una moneda justa y usando su primera estrategia pura si sale cara y su segunda estrategia pura si sale cruz. Obsérvese que la estrategia mixta q otorga probabilidad 0 a la tercera estrategia pura.

6.4.1. Dominación y estrategias mixtas

Filo 6.4.2 ⟶

¿Por qué motivos se puede interesar un jugador racional por una estrategia mixta? Una razón es que una estrategia pura que no es dominada por ninguna otra estrategia pura puede estar dominada por una estrategia mixta. Consideremos, por ejemplo, el juego bimatricial de la Figura 6.5(b). La estrategia pura de John s_2 está fuertemente dominada por su estrategia pura s_3. Después de eliminar s_2, se obtiene el juego bimatricial de la Figura 6.7(a). Ninguna de las estrategias puras de Mary domina a las otras estrategias de este juego. Sin embargo, la estrategia pura de Mary t_2 está fuertemente dominada por su estrategia *mixta* $q = (1/2, 0, 1/2)^{\mathrm{T}}$, que asocia probabilidad 1/2 a t_1 y probabilidad 1/2 a t_3. Para ver esto necesitamos algunos cálculos.

	t_1	t_2	t_3
s_1	0 1	4 6	9 0
s_3	7 3	3 2	0 4

(a)

	t_1	t_3
s_1	0 1	9 0
s_3	7 3	0 4

(b)

Figura 6.7. Dominación de una estrategia mixta.

Si Mary usa q y John usa s_1, cada uno de los resultados (s_1, t_1) y (s_1, t_3) se dará con probabilidad 1/2. Luego el pago esperado de Mary será $0 \times 1/2 + 9 \times 1/2 = 4\,1/2$. Puesto que $4\,1/2 > 4$, Mary saca más con q que con t_2, cuando John usa s_1. Mary también saca más con q que con t_2 cuando John usa su otra estaregia pura s_3, porque $7 \times 1/2 + 0 \times 1/2 = 3\,1/2 > 3$. Luego, para Mary, q es mejor que t_2 haga lo que haga John. Esto significa que q domina fuertemente a t_2.

El juego que se obtiene al eliminar la columna t_2 aparece en la Figura 6.7(b). En este juego reducido, s_3 domina fuertemente a s_1. Tras eliminar la fila s_1, t_1 domina fuertemente a t_3. Por tanto, el método de eliminación sucesiva de estrategias dominadas conduce al único par de estrategias puras (s_3, t_1).

6.4.2. Pagos asegurados con estrategias mixtas

La Sección 6.3.1 terminaba con la observación de que el nivel de seguridad de John en el juego bimatricial de la Figura 6.5(b) es 2 2/3. Una estrategia de seguridad para John en este juego es $p = (1/6, 0\ 5/6)^{\mathrm{T}}$. Así, para asegurarse un pago esperado de 2 2/3, John debe usar una *estrategia mixta.* Necesitamos hacer algunos cálculos para ver por qué esto es así.

La estrategia pura de John s_2 está fuertemente dominada por su estrategia pura s_3. Por tanto, no usará la estrategia pura s_2 en ninguno de los casos que se le pueden presentar. El primer paso es, por tanto, eliminar la fila s_2, obteniendo el juego bimatricial de la Figura 6.7(a). La matriz de pagos de John en este juego reducido se muestra en la Figura 6.8(a).

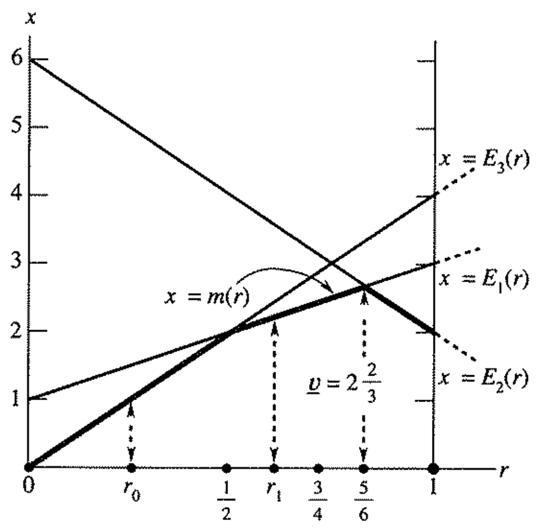
Supongamos que John usa la fila s_1 con probabilidad $1 - r$ y la fila s_3 con probabilidad r. Esto es, John usa la estrategia mixta $p = (1 - r, 0, r)^{\mathrm{T}}$ en el juego original. Es fácil calcular el pago esperado $x = E_k(r)$ que John conseguirá si Mary usa la columna t_k. Si Mary usa la columna t_1, entonces John conseguirá un pago de 1 con probabilidad $1 - r$ y un pago de 3 con probabilidad r. Su pago esperado es, por tanto, $1(1 - r) + 3r = 1 + 2r$. Otros cálculos parecidos para las columnas t_2 y t_3 muestran que

$$E_1(r) = 1(1 - r) + 3r = 1 + 2r;$$
$$E_2(r) = 6(1 - r) + 2r = 6 - 4r;$$
$$E_3(r) = 0(1 - r) + 4r = 4r.$$

Las tres rectas $x = E_1(r)$, $x = E_2(r)$ y $x = E_3(r)$ han sido dibujadas en la Figura 6.8(b). (Estos gráficos no necesitan ser dibujados con gran precisión, pero sí hay que dibujarlos con el cuidado suficiente para que valga la pena estudiarlos.)

	t_1	t_2	t_3
s_1	1	6	0
s_3	3	2	4

(a)



(b)

Figura 6.8. El cálculo de una estrategia de seguridad mixta para el jugador I.

Recordemos que para determinar su nivel de seguridad, John ha de ponerse en el peor de los casos posibles. Por tanto, John supondrá que Mary adivinará la estrategia mixta[4] que él va a elegir y actuará para minimizar sus pagos.

Cuando John ya ha elegido r, su hipótesis paranoica es que Mary elegirá su estrategia de forma que John consiga el menor de $E_1(r)$, $E_2(r)$ o $E_3(r)$[5]. Por tanto, John calcula que su pago esperado es

$$m(r) = \text{mín}\ \{E_1(r), E_2(r), E_3(r)\}.$$

La gráfica de $x = m(r)$ aparece como una recta en negrita en la Figura 6.8(b). Por ejemplo, cuando $r = r_0$, $m(r) = E_3(r)$. Cuando $r = r_1$, $m(r) = E_1(r)$.

Así pues, al considerar el peor de los casos John concluye que, para cualquier valor de r elegido, el pago consiguiente será $m(r)$. El valor de r que

[4] Un caso todavía peor sería aquel en que Mary podría predecir de qué lado va a caer una moneda, o qué carta se va a escoger a ciegas de una baraja. Sin embargo, un análisis en el que se atribuyeran estos poderes sobrehumanos a Mary no sería muy interesante.

[5] Los lectores atentos estarán interesados en saber por qué Mary no usa sus estrategias mixtas. La razón es que, para cada r, el valor que minimiza el pago de John se obtiene utilizando una estrategia *pura*. Por ejemplo, supongamos que John escoge $r = r_0$ en la Figura 6.8(b). Entonces Mary puede asegurar que John puede conseguir cualquier pago x en el intervalo $[E_3(r_0), E_2(r_0)]$ por medio de una estrategia mixta adecuada. Pero la estrategia que minimiza el pago de John es la estrategia pura t_3.

le asegura un pago mayor se halla, por tanto, maximizando $m(r)$. Esto es, John puede asegurarse un pago esperado de por lo menos

$$\underline{v} = \max_r m(r) = \max_r \min_k E_k(r),$$

si escoge r con cuidado.

La Figura 6.8(b) muestra que el valor de r que satisface $0 \leqslant r \leqslant 1$ y con el cual $m(r)$ es mayor corresponde al punto donde se cortan las rectas $x = E_1(r)$ y $x = E_2(r)$. Puesto que la solución de la ecuación

$$1 + 2r = 6 - 4r$$

es $r = 5/6$, John se puede asegurar un pago esperado de

$$\underline{v} = m(5/6) = E_1(5/6) = 1 + 2 \times 5/6 = 2\ 2/3,$$

o mayor, usando la estrategia mixta $p = (1/6, 0, 5/6)^{T}$. De hecho, $\underline{v}$ es el mayor pago que se puede asegurar por medio de una estrategia mixta. Al final de esta sección veremos que esto asegura que $\underline{v}$ es el nivel de seguridad de John[6].

6.4.3. ¿Son paradójicas las estrategias mixtas de seguridad?

Mates 6.4.4 ⟶

La conclusión de que John se asegura $\underline{v} = 2\ 2/3$ o algo mejor por medio de la estrategia mixta $p = (1/6, 0, 5/6)^{T}$ sorprende a algunos por paradójica. ¿Cómo puede quedar algo asegurado si lo que uno consigue depende de un dado o de sacar un carta al azar? Puede ser útil recordar qué es lo que está en juego, al trabajar con utilidades de Von Neumann y Morgenstern.

Supongamos que para John la utilidad de Von Neumann y Morgenstern de una cantidad de dinero $x \geqslant 0$ viene dada por $4\sqrt{x}$, como en la Sección 3.4.3. Ahora ofrezcámosle la elección entre 4 dólares seguros y la lotería **L** en la que obtienen 0 dólares con probabilidad 1/4 y 16 dólares con probabilidad 3/4. John elegirá la lotería **L** porque esto le asegura una utilidad de Von Neumann y Morgenstern de $3/4 \times 4\sqrt{16} = 12$, mientras que la utilidad de Von Neumann y Morgenstern de 4 dólares es sólo de $4\sqrt{4} = 8$. Se puede argüir que, al elegir **L**, John puede terminar con las manos vacías, si no tiene suerte, mientras que la oferta de 4 dólares es segura. Si quiere estar seguro, el razonamiento continúa, debería tomar los 4 dólares. Este razonamiento olvida que las utilidades de Von Neumann

[6] Algunos autores estarían dispuestos a deducir de aquí, sin más, que $\underline{v}$ es el nivel de seguridad de John. Sin embargo, parece más satisfactorio demostrar que Mary dispone de una estrategia que sólo proporciona a John $\underline{v}$ o menos.

y Morgenstern ya incluyen la actitud de John hacia la asunción de riesgos en situaciones en las que las probabilidades están bien definidas. La utilidad de Von Neumann y Morgenstern de **L** supera a la de conseguir 4 dólares con seguridad porque, tras evaluar los riesgos, John nos dice que él prefiere **L**.

Sin embargo, cuando John se enfrenta a Mary en un juego, su incertidumbre acerca de lo que Mary hará *no* viene dada en términos de probabilidades bien definidas[7]. Si John pudiera asignar probabilidades a cada una de las estrategias puras de Mary de forma fiable, no tendría sentido hablar de ponerse en el peor de los casos. Sólo habría un caso a considerar. John simplemente escogería la estrategia que maximizara su utilidad esperada.

La moraleja de esta historia es que no es una buena idea buscarle tres pies al gato de Von Neumann y Morgenstern. La interpretación ingenua de un pago es la correcta cuando hay que calcular niveles de seguridad.

6.4.4. Funciones de pagos para estrategias mixtas

Mates

Las Secciones 6.4.1 y 6.4.2 muestran claramente que jugadores racionales considerarán a veces aconsejable el uso de estrategias mixtas. Esta subsección presenta parte del aparato técnico necesario.

Al considerar estrategias puras, las funciones de pagos $\pi_1 : S \times T \to \mathbb{R}$ y $\pi_2 : S \times T \to \mathbb{R}$ resultaron útiles. Recordemos que $\pi_i(s, t)$ es el pago que recibe el jugador i cuando el jugador I usa la estrategia pura s y la jugadora II usa la estrategia pura t. Cuando hay que considerar estrategias mixtas, hay que introducir funciones de pagos más complicadas $\Pi_1 : P \times Q \to \mathbb{R}$ y $\Pi_2 : P \times Q \to \mathbb{R}$. La notación $\Pi_i(p, q)$ representa la utilidad esperada del jugador i cuando el jugador I usa la estrategia mixta p y la jugadora II usa la estrategia mixta q.

Supongamos que John usa la estrategia mixta $p = (1/4, 1/4, 1/2)^T$ y Mary usa la estrategia mixta $q = (1/2, 1/2, 0)^T$ en el juego bimatricial de la Figura 6.5(b). ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea que la estrategia pura s_2 de John y la estrategia pura t_1 de Mary acabarán por ser usadas? Para contestar esta pregunta necesitamos una hipótesis estándar sobre el análisis no cooperativo de un juego, a saber, que los mecanismos aleatorios usados por los jugadores para poner en práctica sus estrategias mixtas son *independientes*[8]. Supondremos siempre que este es el caso, excepto que se diga lo contrario.

[7] Si John sabe que Mary es aconsejada sobre cómo jugar por un libro de teoría de juegos, él podrá predecir con anticipación qué estrategia mixta ella usará acudiendo a la página apropiada del libro. De esta forma él podrá asignar probabilidades a las estrategias puras de Mary. Este es uno de los argumentos usados para justificar que nos podemos limitar a considerar equilibrios de Nash en juegos en los cuales es conocimiento común que ambos jugadores son racionales. Sin embargo, cuando John se encuentra en la onda paranoica necesaria para calcular niveles de seguridad, no se sentirá capacitado para predecir la estrategia que ella usará hasta *después* de hacer él su elección de estrategia, puesto que él procede como si la elección de ella dependiera de la de él.

La probabilidad del suceso de que ambos, s_2 y t_1, se usan se obtiene, por tanto, multiplicando sus respectivas probabilidades (Sección 2.1.2). Ya que John usa s_2 con probabilidad 1/4 y Mary usa t_1 con probabilidad 1/2, la probabilidad de usar ambos es $p_2q_1 = 1/4 \times 1/2 = 1/8$. Luego John conseguirá el pago $\pi_1(s_2, t_1) = 2$ con probabilidad $p_2q_1 = 1/8$.

La probabilidad de cada uno de los pagos de John se puede calcular de la misma forma. Así se puede calcular directamente la utilidad esperada de John, $\Pi_1(p, q)$. La fórmula que se obtiene con estos cálculos se puede expresar de forma muy elegante por medio de la matriz de pagos de John, A. La fórmula, juntamente con la fórmula correspondiente para Mary (siendo B su matriz de pagos), viene dada por

$$\Pi_1(p, q) = p^T A q; \tag{6.4}$$

$$\Pi_2(p, q) = p^T B q. \tag{6.5}$$

En el caso del juego bimatricial de la Figura 6.5(b), el pago esperado de John cuando usa la estrategia mixta $p = (1/4, 1/4, 1/2)^T$ y Mary usa la estrategia mixta $q = (1/2, 1/2, 0)^T$ viene dada por

$$\Pi_1(p, q) = p^T A q = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/2] \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\ 3/8.$$

Obsérvese que cuando se desarrolla esta expresión, $\Pi_1(s_2, t_1) = 2$ queda multiplicado por $p_2q_1 = 1/8$. El pago esperado por Mary cuando John usa la estrategia mixta p y ella usa la estrategia mixta q viene dado por

$$\Pi_2(p, q) = p^T B q = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/2] \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\ 3/8.$$

[8] En un análisis cooperativo, por otra parte, no tendremos problemas en aceptar que los jugadores usen mecanismos aleatorios *correlacionados*. Por ejemplo, en la Sección 5.3.1, el par de pagos (2, 0) se consigue lanzando una moneda al aire. Si sale cara, el jugador I usa la estrategia pura s_2 y la jugadora II usa la estrategia pura t_3. Si sale cruz el jugador I usa la estrategia pura s_1 y la jugadora II usa la estrategia pura t_1. Este acuerdo se puede considerar que compromete al jugador I a usar la estrategia mixta $p = (1/2, 1/2)^T$ y a la jugadora II a usar la estrategia mixta $q = (1/2, 1/2, 0)^T$. Pero puesto que ambos jugadores usan la *misma* moneda, sus estrategias mixtas decididamente no serán independientes.

6.4.5. Minimax y maximín con estrategias mixtas

Mates

Este tema es fácil porque sólo necesitamos transcribir algunos de los resultados de la Sección 6.2.

Sea A una matriz $m \times n$ y definamos una función de pagos $\Pi : P \times Q \to \mathbb{R}$ por

$$\Pi(p, q) = p^{\mathrm{T}}Aq.$$

Así, $\Pi(p, q)$ es lo que consigue un jugador con matriz de pagos A si el jugador I usa la estrategia mixta p y la jugadora II usa la estrategia mixta q.

Sea $\bar{v}$ el valor minimax de la función de pagos Π. Sea $\underline{v}$ su valor maximín. Entonces

$$\underline{v} = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \Pi(p, q) = \min_{q \in Q} \Pi(\tilde{p}, q) \tag{6.6}$$

$$\bar{v} = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} \Pi(p, q) = \max_{p \in P} \Pi(p, \tilde{q}) \tag{6.7}$$

donde $\tilde{p}$ es la estrategia mixta p de P para la cual $\min_{q \in Q} \Pi(p, q)$ es mayor, y $\tilde{q}$ es la estrategia mixta q de Q para la cual $\max_{p \in P} \Pi(p, q)$ es menor.

Un punto de silla para la función de pagos Π es un par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de estrategias mixtas tales que

$$\Pi(\tilde{p}, q) \geqslant \Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \Pi(p, \tilde{q})$$

para todos los p de P y todos los q de Q.

Si uno piensa en $\Pi(p, q)$ como la casilla en la fila p y columna q de una «matriz» generalizada, entonces los siguientes teoremas no necesitan demostración, pues se obtienen simplemente copiando las de los Teoremas 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3.

Teorema 6.4.1. $\underline{v} \leqslant \bar{v}$.

Teorema 6.4.2. Una condición necesaria y suficiente para que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ sea un punto de silla es que $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ vengan dados por (6.6) y (6.7) y que $\underline{v} = \bar{v}$. Cuando $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un punto de silla, $\underline{v} = \Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) = \bar{v}$.

Teorema 6.4.3. Si la función de pagos Π del jugador I tiene un punto de silla $(\tilde{p}, \tilde{q})$, entonces su nivel de seguridad es $\underline{v} = \Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) = \bar{v}$, y $\tilde{p}$ es una de sus estrategias de seguridad.

Estos resultados conceden importancia al hecho de saber en qué circunstancias es cierto que $\underline{v} = \bar{v}$. El teorema del minimax de Von Neumann dice que si el número de estratregias puras es finito, la respuesta es *siempre*. Así pues, en juegos finitos, $\underline{v}$ siempre es el nivel de seguridad del jugador I.

6.4.6. El teorema del minimax

Mates
6.5 ⟶

La siguiente «demostración» del teorema del minimax de Von Neumann está inspirada en un razonamiento inductivo de Guillermo Owen. Su demostración presenta la ventaja de no depender de ningún teorema profundo. Sin embargo requiere manipulaciones preparatorias de álgebra matricial que algunos estudiantes encontrarían problemática. En la «demostración» que ahora ofreceremos el álgebra todavía puede ser problemática para algunos estudiantes, pero ha sido reducida a unas pocas manipulaciones con máximos y mínimos. Sin embargo, para poder simplificar el álgebra así tenemos que recurrir a un razonamiento por inducción más complicado. Que este razonamiento sea intuitivamente atractivo es una excusa para pasar rápidamente por encima de sus detalles.

Teorema 6.4.4 (Von Neumann). $\underline{v} = \bar{v}$.

Demostración. Por el Teorema 6.4.1 sabemos que $\underline{v} \leqslant \bar{v}$. La demostración del teorema del minimax de Von Neumann consiste en mostrar que, si $\underline{v} < \bar{v}$, entonces los conjuntos de estrategias P y Q pueden ser sustituidos por subconjuntos convexos y no vacíos P' y Q', uno de los cuales es un subconjunto estrictamente menor, sin disminuir la medida de la diferencia $\bar{v} - \underline{v}$. Es decir, $\bar{v}' - \underline{v}' \geqslant \bar{v} - \underline{v}$. Entonces se puede hacer lo mismo con P' y Q', y así sucesivamente.

El menor conjunto no vacío contiene un solo punto. Luego si el teorema del minimax es falso para una «matriz» con filas P y columnas Q, también debe ser falso para una «matriz» que solamente tiene una fila y una columna[9]. Pero los valores de maximín y minimax de una matriz 1×1 son obviamente iguales. Luego la hipótesis $\underline{v} < \bar{v}$ conduce a una contradicción. Se sigue que $\underline{v} = \bar{v}$, como dice el teorema.

Si $\underline{v} < \bar{v}$, entonces o bien[10] $\underline{v} < \Pi(\tilde{p}, \tilde{q})$ o bien $\Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) < \bar{v}$. Supondremos que se cumple la primera desigualdad. Si se cumple la segunda, un razonamiento paralelo muestra que P se hace más pequeño, como se ve a continuación.

Sea Q' el conjunto convexo formado por todos los q de Q para los cuales

$$\Pi(\tilde{p}, q) \leqslant \underline{v} + \varepsilon. \tag{6.8}$$

donde $0 < \varepsilon < \Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) - \underline{v}$. Q' es estrictamente menor que Q porque no contiene q. Sea $P' = P$.

[9] Suponiendo que el proceso de inducción llega hasta el menor conjunto no vacío posible. Para conseguirlo, la inducción ha de ser transfinita. Para justificar el salto transfinito es suficiente con que los espacios de estrategias sean compactos y las funciones de pagos continuas. Estas condiciones se sumplen automáticamente si los conjuntos originales de estrategias puras son finitos. Sin embargo, *cognoscenti* observarán que la demostración funciona bajo hipótesis mucho más débiles.

[10] Si $\underline{v} \geqslant \Pi(\tilde{p}, \tilde{q})$ y $\Pi(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \bar{v}$, entonces $\underline{v} \geqslant \bar{v}$.

Definiendo $\tilde{p}'$ y $\tilde{q}'$ de manera obvia, consideremos las combinaciones convexas $\hat{p} = \alpha\tilde{p} + \beta\tilde{p}'$ y $\hat{q} = \alpha\tilde{q} + \beta\tilde{q}'$. Obsérvese que[11]

$$\begin{aligned}
\bar{v} = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} \Pi(p, q) &\leqslant \max_{p \in P} \Pi(p, \hat{q}) \\
&= \max_{p \in P} \{\alpha\Pi(p, \tilde{q}) + \beta\Pi(p, \tilde{q}')\} \\
&\leqslant \alpha \max_{p \in P} \Pi(p, \tilde{q}') + \beta \max_{p \in P'} \Pi(p, \tilde{q}') \\
&= \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}'. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Una desigualdad para $\underline{v}$ requiere más esfuerzo. Para empezar, obsérvese que[12]

$$\begin{aligned}
\min_{q \in Q'} \Pi(\hat{q}, q) &\geqslant \alpha \min_{q \in Q'} \Pi(\tilde{p}, q) + \beta \min_{q \in Q'} \Pi(\tilde{p}', q) \\
&\geqslant \alpha \min_{q \in Q} \Pi(\tilde{p}, q) + \beta \min_{q \in Q'} \Pi(\tilde{p}', q) \\
&= \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}'. \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

También[13],

$$\begin{aligned}
\inf_{q \notin Q'} \Pi(\hat{p}, q) &\geqslant \alpha \inf_{q \notin Q'} \Pi(\tilde{p}, q) + \beta \inf_{q \notin Q'} \Pi(\tilde{p}', q) \\
&\geqslant \alpha(\underline{v} + \varepsilon) + \beta c. \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

Queremos que (6.10) sea menor que (6.11). Para conseguirlo, hemos de elegir cuidadosamente $\alpha = 1 - \beta$ y β. Tomando β muy pequeño, podemos conseguir que (6.10) se aproxime tanto como queramos a $\underline{v}$. Análogamente, (6.11) se puede aproximar a $\underline{v} + \varepsilon$ tanto como queramos. Así, si β es lo bastante pequeño, (6.10) es menor que (6.11). Sin embargo, es importante que β no sea realmente cero.

Ahora podemos conseguir una desigualdad para $\underline{v}$:

$$\begin{aligned}
\underline{v} = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \Pi(p, q) &\geqslant \min_{q \in Q} \Pi(\hat{p}, q) \\
&= \min \{\min_{q \in Q'} \Pi(\hat{p}, q), \inf_{q \notin Q'} \Pi(\hat{p}, q)\} \\
&\geqslant \min \{\alpha\underline{v} + \beta\underline{v}', \alpha(\underline{v} + \varepsilon) + \beta c\} \\
&= \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}. \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

[11] En el argumento siguiente es necesario recordar que $\Pi(p, q) = p^{\mathsf{T}}Aq$, y observar que $p^{\mathsf{T}}A(\alpha\tilde{q} + \beta\tilde{q}') = \alpha p^{\mathsf{T}}A\tilde{q} + \beta p^{\mathsf{T}}A\tilde{q}'$. Para la validez del siguiente paso, considérese el ejemplo $3 = \text{máx}\,\{-1 + 2, 2 + 0, 0 + 3\} \leqslant \text{máx}\,\{-1, 2, 0\} + \text{máx}\,\{2, 0, 3\} = 2 + 3$. El tercer paso simplemente usa las definiciones de $\tilde{q}$ y $\tilde{q}'$.

[12] En el segundo paso hay que tener presente que el mínimo de un conjunto menor ha de ser mayor. Por ejemplo, $2 = \text{mín}\,\{2, 3\} \geqslant \text{mín}\,\{1, 2, 3\} = 1$.

[13] En el segundo paso hay que recordar que si $\Pi(\tilde{p}, q) \leqslant \underline{v} + \epsilon$, entonces q pertenece a Q', según (6.8). La constante c es simplemente una abreviación para $\inf_{q \notin Q'}\Pi(\tilde{p}', q)$.

Multipliquemos la desigualdad (6.12) por -1 y añadámosle la desigualdad (6.9). Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{v} - \underline{v} &\leqslant \alpha(\bar{v} - \underline{v}) + \beta(\bar{v}' - \underline{v}') \\
\beta(\bar{v} - \underline{v}) &\leqslant \beta(\bar{v}' - \underline{v}').
\end{aligned}$$

Luego $\bar{v} - \underline{v} \leqslant \bar{v}' - \underline{v}'$, que es lo que intentábamos demostrar. □

6.5. Juegos de suma cero

Sería irracional que John actuara habitualmente bajo la hipótesis paranoica utilizada cuando se calcula el nivel de seguridad. ¿Por qué tiene que suponer que Mary quiere hacerle daño? Si Mary es racional, buscará maximizar su beneficio en lugar de minimizar el de John. Hay juegos, sin embargo, en los que ser paranoico es completamente racional. Estos se dan cuando los intereses de Mary son diametralmente opuestos a los de John. En este caso, maximizar el pago de Mary equivale a minimizar el de John. En el Capítulo 2 estos juegos fueron llamados estrictamente competitivos. Aquí les llamaremos de suma cero.

6.5.1. *Preferencias diametralmente opuestas*

Un juego de *suma cero* es un juego en el que los pagos siempre suman cero. En el caso de dos jugadores, la condición es

$$u_1(\omega) + u_2(\omega) = 0,$$

para todo ω del conjunto Ω de resultados finales. Como anteriormente, $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ representan las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de los jugadores.

Un juego G de dos jugadores y de suma cero es necesariamente estrictamente competitivo. Esto no es enteramente obvio cuando el juego contiene sucesos al azar. En este caso, ambos jugadores deben tener preferencias diametralmente opuestas no sólo sobre los resultados finales, sino también sobre las loterías. Sin embargo, si $u_1 + u_2 = 0$, entonces $\mathcal{E}u_1 + \mathcal{E}u_2 = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \preceq_1 \mathbf{M} &\Leftrightarrow \mathcal{E}u_1(\mathbf{L}) \leqslant \mathcal{E}u_1(\mathbf{M}) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{E}u_1(\mathbf{L}) \geqslant -\mathcal{E}u_1(\mathbf{M}) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{E}u_2(\mathbf{L}) \geqslant \mathcal{E}u_2(\mathbf{M}) \Leftrightarrow \mathbf{L} \succeq_2 \mathbf{M}
\end{aligned}$$

En ocasiones, al modelizar algunos problemas como juegos de suma cero, se olvidan las actitudes de los jugadores hacia el riesgo. Por ejemplo, con frecuencia se da por supuesto que juegos como el póquer y el backgammon son de suma cero porque todo el dinero que gana un jugador lo pierden otros necesariamente[14]. Pero de aquí no se sigue que el póquer de dos jugadores, o el backgammon, sean necesariamente estrictamente competitivos. Con seguridad no lo serán, si ambos jugadores son aversos al riesgo. (En un juego de suma cero $u_1 = -u_2$ y, por tanto, la función de utilidad de un jugador es cóncava si y sólo si la del otro es convexa.)[15]

Al analizar el póquer o el backgammon como juegos de suma cero, se supone implícitamente que los jugadores son *neutrales al riesgo*, de manera que la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de los jugadores, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede elegir para que cumpla

$$u(x) = x.$$

El estudio de la paradoja de San Petersburgo nos hace ver que la neutralidad respecto al riesgo no es probablemente una buena hipótesis acerca de las preferencias de la gente en general. Pero suponer neutralidad al riesgo puede ser una aproximación no demasiado mala cuando, como ocurre en partidas de póquer familiares, la cantidad de dinero que puede cambiar de mano se mueve dentro de límites estrechos.

6.5.2. Juegos de suma constante

Un juego de *suma constante* es un juego en el que los pagos de los jugadores siempre suman una constante determinada c. Por ejemplo, en el duelo, si el jugador I usa la estrategia pura d y el jugador II usa la estrategia pura e, entonces la probabilidad de que el jugador I sobreviva se representó por $\pi(d, e)$ en la Sección 6.3.2. Con estas utilidades de Von Neumann y Morgenstern, el duelo es un juego de suma uno, porque los pagos siempre suman uno. Cualquier juego de suma constante se puede transformar en un juego estratégicamente equivalente de suma cero con el simple expediente de sustraer la constante c de todos los pagos de uno de los jugadores. Por ejemplo, en el duelo se puede sustituir en todas partes el pago del jugador II, $1 - \pi(d, e)$, por $-\pi(d, e)$. Esto da al juego el formato de suma cero sin alterar para nada las opciones estratégicas del jugador II.

[14] Excepto cuando el póquer es jugado en un casino. Habitualmente la banca se queda un 10 % de las apuestas.

[15] Esta es una de las razones por las que en el Capítulo 2 nos limitamos a considerar juegos en los que los únicos resultados eran $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$. Sólo cuando nos limitamos a considerar loterías con sólo dos premios posibles se puede deducir que jugadores que tienen preferencias opuestas sobre los premios tienen necesariamente preferencias opuestas sobre loterías.

	t_1	t_2	t_3
s_1	1, −1	6, −6	0, 0
s_2	2, −2	0, 0	3, −3
s_3	3, −3	2, −2	4, −4

(a)

	t_1	t_2	t_3
s_1	1	6	0
s_2	2	0	3
s_3	3	2	4

(b)

Figura 6.9. Una forma estratégica de suma cero.

6.5.3. Juegos matriciales

El juego bimatricial de la Figura 6.9(a) es la forma estratégica de un juego de suma cero porque los pagos en cada recuadro suman cero. La matriz de pagos A del jugador I y la matriz de pagos B de la jugadora II satisfacen por tanto $A + B = 0$, o sea $B = -A$. Por tanto, es redundante escribir los pagos de la jugadora II. La forma estratégica de un juego de suma cero se representa habitualmente por la sola matriz de pagos del jugador I, como en la Figura 6.9(b). Debemos recordar que una matriz así sólo registra los pagos del jugador I. Es fácil olvidar que la jugadora II quiere *minimizar* estos pagos.

6.5.4. Valores de juegos de suma cero con dos jugadores

En la Sección 1.7.1 el valor v de un juego estrictamente competitivo fue definido como un resultado con la propiedad de que el jugador I tiene una estrategia σ que fuerza un resultado que es para él por lo menos tan bueno como v, mientras que la jugadora II tiene una estrategia τ que fuerza un resultado que es para ella por lo menos tan bueno como v. Lo único nuevo que ahora añadiremos a esta idea es que vamos a redefinir el valor v de un juego de suma cero con dos jugadores como un *pago* del jugador I, en lugar de como un resultado.

No debería ser difícil ver que para que un pago v sea el valor de un juego de suma cero con dos jugadores, v debe ser el nivel de seguridad del jugador I, $\underline{v}$, y σ debe ser una de sus estrategias de seguridad. Ya que la jugadora II obtiene $-v$ cuando el jugador I obtiene v, debe ser cierto al mismo tiempo que $-v$ es el nivel de seguridad de la jugadora II y que τ debe ser una de sus estrategias de seguridad.

Hasta ahora nos hemos concentrado en el cálculo de los niveles de seguridad del jugador I. Este es el valor maximín $\underline{v}$ de $\Pi_1(p, q)$. Ahora es necesario considerar el nivel de seguridad de la jugadora II. Por supuesto, este es el valor maximín de $\Pi_2(p, q)$. En general, no existe ningún motivo para que el nivel de seguridad de la jugadora II guarde relación alguna con el del jugador I. Sin embargo, en juegos de suma cero con dos jugadores las cosas son más simples porque, en tales juegos, el nivel de seguridad de la jugadora II es simplemente $-\bar{v}$.

Para verlo, basta con observar que los pagos en un juego matricial de suma cero son *pérdidas* para la jugadora II, porque son *ganancias* para el jugador I. Al ponerse en el peor de los casos, la jugadora II actuará, por tanto, en el supuesto de que el jugador I preverá su elección de estrategia y actuará para *maximizar* sus pérdidas. Por tanto, ella escogerá una estrategia que *minimiza* sus pérdidas máximas. Esto resulta en una pérdida de a lo sumo $\bar{v}$. Esto es lo mismo que una ganancia de por lo menos $-\bar{v}$[16].

La condición para que un juego de suma cero con dos jugadores tenga un valor v es, por tanto, que $\underline{v} = v = \bar{v}$. Pero esto es precisamente lo que afirma el teorema del minimax de Von Neumann. La conclusión merece ser enunciada en forma de teorema:

Teorema 6.5.1. Cualquier juego finito de suma cero con dos jugadores tiene un valor $v = \underline{v} = \bar{v}$. Para asegurarse de que obtiene un pago esperado de por lo menos v, el jugador I puede usar cualquiera de sus estrategias de seguridad $\tilde{p}$. Para asegurarse de que obtiene por lo menos $-v$, la jugadora II puede usar cualquiera de sus estrategias de seguridad $\tilde{q}$.

6.5.5. Un ejemplo

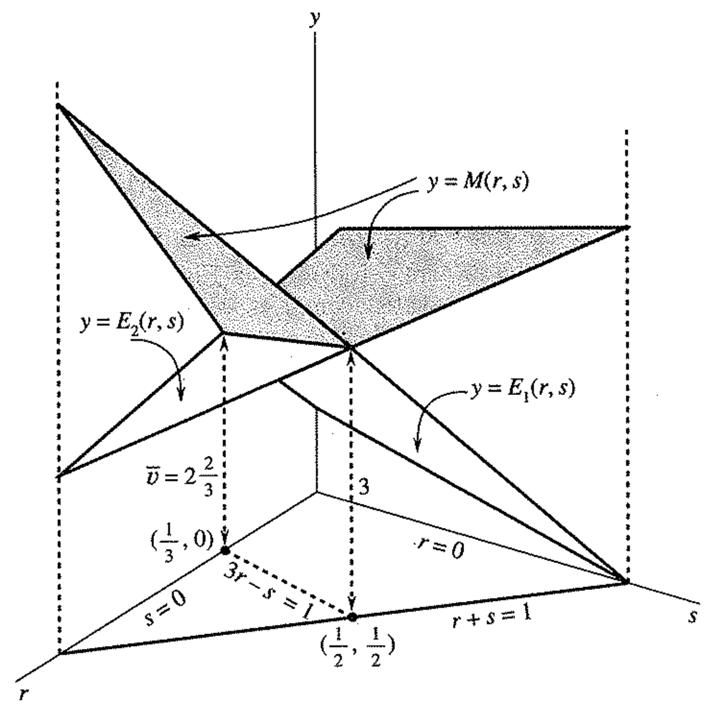
Consideremos el juego de suma cero con dos jugadores de la Figura 6.9. La estrategia pura de John, s_2, está fuertemente dominada por su estrategia pura s_3. Tras eliminar la fila s_2, a John le queda la matriz de pagos de la Figura 6.10(a). Esta matriz de pagos reducida es idéntica a la dada en la Figura 6.8(a). Luego los cálculos de la Sección 6.4.2 que nos daban el nivel de seguridad de John y su estrategia de seguridad para esta matriz de pagos son válidos aquí. Así podemos obtener cómodamente la conclusión de que el valor de nuestro juego de suma cero es $v = \underline{v} = 2\,2/3$, y de que John se asegura este valor o uno mayor usando la estrategia mixta $\tilde{p} = (1/6, 0, 5/6)^{\top}$ en el juego original de la matriz 3×3.

[16] Un cálculo más formal del nivel de seguridad de la jugadora II es el siguiente:

$$\max_{q \in Q} \min_{p \in P} \{-\Pi(p, q)\} = \max_{q \in Q} \{-\max_{p \in P} \Pi(p, q)\} = -\{\min_{q \in Q} \max_{p \in P} \Pi(p, q)\} = -\bar{v}.$$

	t_1	t_2	t_3
s_1	1	6	0
s_3	3	2	4

(a)



(b)

Figura 6.10. El cálculo de una estrategia mixta de seguridad para la jugadora II.

Mates 6.5.6 ⟶

El teorema del minimax de Von Neumann nos asegura que el nivel de seguridad de Mary en el juego es $-\bar{v} = -2\,2/3$, pero no da ninguna pista sobre cómo Mary puede asegurarse esta cantidad. Ahora calcularemos una estrategia de seguridad para Mary usando el mismo método que en la Sección 6.4.2. En este caso no es un método ideal porque requiere dibujar un diagrama tridimensional para la Figura 6.10(b). Más adelante describiremos un método más satisfactorio[17].

Supongamos que Mary usa la columna t_1 con probabilidad $1 - r - s$, la columna t_2 con probabilidad r, y la columna t_3 con probabilidad s. Esto es, usa la estrategia mixta $q = (1 - r - s, r, s)^{\top}$. Ahora es fácil calcular la pérdida esperada $y = E_k(r, s)$ que Mary sufrirá si John usa la fila s_k. Si John usa s_1, Mary perderá 1 con probabilidad $1 - r - s$, 6 con probabilidad r, y

[17] También es importante observar que estos procedimientos sólo son adecuados en el caso de juegos de suma cero con dos jugadores, porque sólo entonces queda garantizado que la estrategia de seguridad de la jugadora II se puede calcular por medio de la matriz de pagos del jugador I. En juegos más generales se usa simplemente el método de la Sección 6.4.2, pero sustituyendo la matriz de pagos de la jugadora II por la del jugador I.

0 con probabilidad s. Su pérdida esperada es, por tanto, $1(1 - r - s) + 6r + 0s = 1 + 5r - s$. Un cálculo análogo para la otra fila s_2 de John muestra que

$$E_1(r, s) = 1(1 - r - s) + 6r + 0s = 1 + 5r - s;$$
$$E_2(r, s) = 3(1 - r - s) + 2r + 4s = 3 - r + s.$$

Los dos planos $y = E_1(r, s)$ e $y = E_2(r, s)$ han sido dibujados en la Figura 6.10(b). En la Figura 6.8(b) sólo consideramos aquellos valores de r que satisfacen $0 \leqslant r \leqslant 1$. Ahora debemos limitarnos a considerar aquellos valores de r y s que satisfacen $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ y $r + s \leqslant 1$. Los pares (r, s) que satisfacen estas condiciones están contenidos en el triángulo limitado por las rectas $r = 0$, $s = 0$ y $r + s = 1$.

Recordemos que Mary tiene que ponerse en el peor de los casos para determinar su nivel de seguridad. Por tanto, supone que John va a predecir su elección de una estrategia mixta y actuará entonces para maximizar sus pérdidas.

Cuando Mary ya ha elegido r y s, su hipótesis paranoica es que John escogerá la estrategia que proporciona el mayor de entre $E_1(r, s)$ y $E_2(r, s)$. Mary, por tanto, prevé que sufrirá una pérdida esperada de

$$M(r, s) = \text{máx}\,\{E_1(r, s), E_2(r, s)\}.$$

La superficie $y = M(r, s)$ ha sido sombreada en la Figura 6.10(b).

Poniéndose en el peor de los casos, Mary descubre que cualesquiera que sean los valores de r y s que ella escoja, su pérdida consiguiente será $M(r, s)$. Los valores de r y s que le aseguran un pérdida menor los encontrará, por tanto, minimizando $M(r, s)$. Esto es, Mary puede asegurarse una pérdida esperada de a lo sumo

$$\bar{v} = \min_{r,s} M(r, s) = \min_{r,s} \max_{k} E_k(r, s)$$

escogiendo cuidadosamente r y s.

La Figura 6.10(b) revela que el par (r, s) para el que $M(r, s)$ es menor se da donde se cortan los planos $y = E_1(r, s)$ e $y = E_2(r, s)$. Por tanto, estamos interesados en los pares que satisfacen la ecuación

$$E_1(r, s) = 1 + 5r - s = 3 - r + s = E_2(r, s).$$

Los pares (r, s) que satisfacen esta ecuación pertenecen a la recta $3r - s = 1$. ¿Cuál de estos pares hace menor $M(r, s)$? Los dos candidatos son los puntos en los que esta recta corta a $s = 0$ y $r + s = 1$. El primero de estos puntos es $(r, s) = (1/3, 0)$ y el segundo es $(r, s) = (1/2, 1/2)$. Pero $M(1/3, 0) = E_1(1/3, 0) = 1 + 5 \times 1/3 = 2\ 2/3$, y $M(1/2, 1/2) = E_1(1/2, 1/2) = 1 + 5 \times 1/2 - 1/2 = 3$.

Puesto que $2\ 2/3 < 3$, el par (r, s) que minimiza $M(r, s)$ es $(1/3, 0)$ y el valor mínimo es $\bar{v} = 2\ 2/3$.

Resumiendo: Mary puede asegurarse una pérdida esperada no mayor que $\bar{v} = 2\ 2/3$ usando la estrategia mixta $\tilde{q} = (1 - r - s, r, s)^{\mathrm{T}} = (2/3, 1/3, 0)^{\mathrm{T}}$. John puede asegurarse una ganancia esperada no menor que $\underline{v} = 2\ 2/3$ usando la estrategia mixta $\tilde{p} = (5/6, 0, 1/6)^{\mathrm{T}}$. El valor del juego de suma cero con dos jugadores es $v = 2\ 2/3$.

6.5.6. Puntos de silla y equilibrios de Nash

Mates

Las matrices de pagos de algunos juegos de suma cero con dos jugadores tienen un punto de silla (σ, τ). Por ejemplo, el Corolario 1.7.3 dice que esto es cierto si la matriz deriva de un juego finito, estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar[18].

Recordemos de (6.1) que si $\pi(s, t)$ es la casilla de la fila s y columna t de una matriz de pagos A, entonces la condición para que (σ, τ) sea un punto de silla de A es que

$$\pi(\sigma, t) \geqslant \pi(\sigma, \tau) \geqslant \pi(s, \tau),$$

para todo s en S y todo t en T. Cuando existe un punto de silla (σ, τ) para la matriz de pagos de un juego de suma cero con dos jugadores, se sigue del Teorema 6.2.2 que el valor del juego es necesariamente $v = \pi(\sigma, \tau)$. El jugador I se asegura v o algo mejor jugando σ, mientras que la jugadora II se asegura $-v$ o algo mejor jugando τ. Por ejemplo, el juego de suma cero con dos jugadores con la matriz de la Figura 6.2 tiene valor 2, porque (s_2, t_2) es un punto de silla de la matriz y $\pi(s_2, t_2) = 2$.

Es sabido que una matriz no siempre tiene un punto de silla. Pero el teorema del minimax nos dice que $\underline{v} = \bar{v}$ y, por tanto, se sigue del Teorema 6.4.2 que cualquier par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de estrategias de seguridad para ambos jugadores es un punto de silla para la función de pagos de la estrategia mixta Π. Es decir,

$$\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant \tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q} \geqslant p^{\mathrm{T}}A\tilde{q}, \tag{6.13}$$

para todo p en P y todo q en Q. El valor del juego es $v = \tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q}$.

Los equilibrios de Nash fueron introducidos en la Sección 1.8.1. Como se ha dicho en la Sección 4.1.3, la condición para que un par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de estrategias sea un equilibrio de Nash en un juego de dos jugadores es

$$\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \Pi_1(p, \tilde{q}), \tag{6.14}$$
$$\Pi_2(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \Pi_2(\tilde{p}, q), \tag{6.15}$$

para todos los p en P y todos los q en Q. La primera desigualdad expresa el

[18] La restricción a juegos sin jugadas de azar es innecesaria. Al enunciar el corolario, las jugadas al azar todavían no habían sido introducidas.

hecho que $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a $\tilde{q}$, y la segunda desigualdad expresa que $\tilde{q}$ es una respuesta óptima a $\tilde{p}$.

En un juego de suma cero con dos jugadores, $\Pi_1(p, q) = p^{\mathsf{T}}Aq$ y $\Pi_2(p, q) = -p^{\mathsf{T}}Aq$. Luego la desigualdad (6.15) se puede reescribir como $-\tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{q} \geqslant -\tilde{p}^{\mathsf{T}}Aq$, que es lo mismo que $\tilde{p}^{\mathsf{T}}Aq \geqslant \tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{q}$. La desigualdad (6.14) se puede reescribir como $\tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{q} \geqslant p^{\mathsf{T}}A\tilde{q}$. El resultado de combinar las desigualdes reescritas es la condición (6.13) para un punto de silla.

Las conclusiones se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 6.5.2. Si A es la matriz de pagos del jugador I en un juego de suma cero con dos jugadores, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\tilde{p}$ es una estrategia de seguridad para el jugador I, $\tilde{q}$ es una estrategia de seguridad para la jugadora II, y el valor del juego es $v = \tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{q}$.
2. El par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un punto de silla.
3. El par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un equilibrio de Nash.

6.5.7. *Cuándo hay que jugar maximín*

Algunos autores defienden el uso de estrategias de maximín como regla general para tomar decisiones en situaciones de riesgo. Sin embargo, salvo que su relación con el mundo esté en un momento tan bajo que su moral se encuentra en la alcantarilla, estará de acuerdo en dejar de lado este consejo. Habitualmente es irracional ser tan cauteloso. Con seguridad es falso que si ambos jugadores usan estrategias de seguridad en un juego bimatricial general, entonces cada uno dará una respuesta óptima a la elección de estrategia del otro.

Consideremos, por ejemplo, el juego bimatricial de la Figura 6.5(b). El nivel de seguridad del jugador I en este juego, 2 2/3, fue calculado en la Sección 6.4.2. Su estrategia de seguridad es $\tilde{p} = (1/6, 0, 5/6)^{\mathsf{T}}$. El nivel de seguridad de la jugadora II es 2 y su estrategia de seguridad es $\tilde{q} = (0, 1, 0)^{\mathsf{T}}$. (Esta se encuentra en situación idéntica a la del jugador I en el juego bimatricial de la Figura 6.5(a). Su nivel y estrategia de seguridad son por tanto las mismas que las calculadas para el jugador I en la Sección 6.3.1.) Sin embargo, $\tilde{p}$ con seguridad *no* es una respuesta óptima a $\tilde{q}$. La mejor respuesta que el jugador I puede dar a $\tilde{q}$ es usar su primera estrategia pura sin más.

Filo 6.6 ⟶

El ejemplo anterior muestra que un par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de estrategias maximín en un juego bimatricial general no es necesariamente un equilibrio de Nash. El Teorema 6.5.2 es por tanto un teorema sólo acerca de juegos de *suma cero* con dos jugadores. Sin embargo, incluso para un juego de suma cero con dos jugadores sería un mal consejo que usted usara una estrategia maximín cuando usted tiene razones para pensar que su oponente jugará mal. Su estrategia de seguridad ciertamente le asegurará su nivel de seguridad con independencia de como juegue su oponente. Pero usted debería aspirar a algo más que a su nivel de seguridad al enfrentarse a un mal jugador. Usted debería poner a prueba el juego de su oponente buscando sus debilidades sistemáticas, y desviarse de su estrategia de seguridad para poder explotarlas. Al hacer esto se arriesgará, pero es *irracional* no estar dispuesto a asumir un riesgo calculado, cuando sus posibilidades son mayores que las del oponente y todo esta expresado propiamente en términos de utilidades de Von Neumann y Morgenstern.

El juego de estrategias de seguridad en un juego de suma cero con dos jugadores sólo se ha defendido para el caso en que es conocimiento común que ambos jugadores son racionales en un sentido apropiado. No existe ninguna razón por la cual usted debe jugar una estrategia de seguridad en un juego que no es de suma cero. Tampoco existe ninguna razón para jugar una estrategia de seguridad en un juego de suma cero si usted sabe que su oponente es irracional.

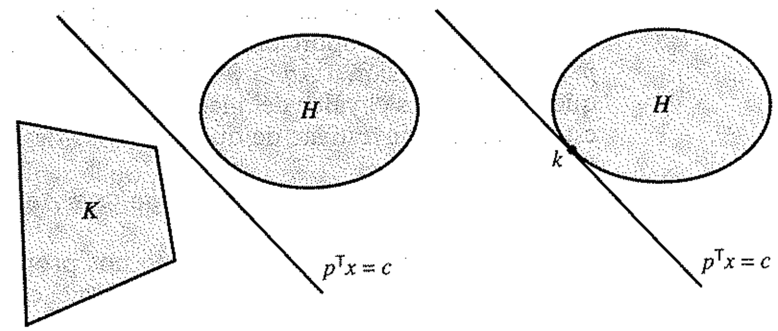
6.6. Hiperplanos separadores

Mates

El teorema del hiperplano separador tiene importantes aplicaciones. Se usa a menudo, por ejemplo, para probar la existencia de precios de equilibrio en modelos económicos. Afortunadamente, a pesar del nombre tan formidable, el teorema es fácil de entender. Se refiere a las condiciones en las que dos conjuntos convexos se pueden separar por medio de un hiperplano.

La Figura 6.11 muestra dos conjuntos convexos H y K de $\mathbb{R}^2$ separados por el hiperplano $p^{\mathsf{T}}x = c$. Recordemos de la Sección 4.5 que un hiperplano de $\mathbb{R}^2$ es simplemente una recta. El vector p es ortogonal a ella. (La Figura 6.11(b) muestra un caso degenerado en el que el conjunto K consiste de un solitario punto frontera k de H. La recta separadora es entonces una recta soporte; ver Sección 5.2.3.)

En la Sección 5.2.3 hicimos observar que una recta divide $\mathbb{R}^2$ en dos



(a) (b)

Figura 6.11. Hiperplanos separadores.

semiespacios. Análogamente, un hiperplano $p^{\mathrm{T}}x = c$ divide $\mathbb{R}^n$ en dos semiespacios. El semiespacio por «encima» del hiperplano es el conjunto de todos los x tales que $p^{\mathrm{T}}x \geqslant c$. Este es el espacio hacia el cual apunta el vector p. El semiespacio por «debajo» del hiperplano es el conjunto de todos los x tales que $p^{\mathrm{T}}x \leqslant c$.

Decir que H y K estan separados por un hiperplano significa que uno de los conjuntos se encuentra encima del hiperplano y el otro debajo. La condición de que H se encuentre encima del hiperplano se puede expresar algebraicamente por la condición de que

$$p^{\mathrm{T}}h \geqslant c$$

para todo h en H. La condición de que K se encuentre por debajo se traduce en la condición

$$p^{\mathrm{T}}k \leqslant c$$

para todo k en K.

Existen diversas versiones del teorema del hiperplano separador. Damos a continuación la versión más simple y útil. Obsérvese que permite que H y K tengan puntos frontera en común.

Teorema 6.6.1 (Teorema del hiperplano separador). Sean H y K conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que K tiene puntos interiores, pero que ninguno de ellos pertenece a H. Entonces existe un hiperplano $p^{\mathrm{T}}x = c$ que separa H y K.

6.6.1. Separación y puntos de silla

El teorema del minimax de Von Neumann se puede contemplar como un caso particular del teorema del hiperplano separador. De hecho, muchas veces es deducido del teorema del hiperplano separador. Es útil entender la conexión porque proporciona una interpretación geométrica de los vectores $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ de la expresión $\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant \tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q} \geqslant p^{\mathrm{T}}A\tilde{q}$ de un punto de silla. Recordemos que $v = \tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq$ es el valor del juego de suma cero de matriz A. El objetivo de esta sección es investigar de qué forma las desigualdades

$$\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant v \geqslant p^{\mathrm{T}}A\tilde{q} \qquad (6.16)$$

se manifiestan geométricamente. Esto nos proporcionará un método relativamente poco dificultoso (porque minimiza el cálculo algebraico) para hallar $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y v[19].

[19] Si la explicación siguiente causa perplejidad, inténtese leer antes la Sección 6.6.2. Esta describe la mecánica de cómo usar la geometría para resolver juegos de suma cero sencillos.

La situación se ilustrará usando la matriz

Mates 6.6.2 ⟶

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (6.17)$$

de la Figura 6.8.(a). Sabemos por la Sección 6.4.2 que $\tilde{p} = (1/6, 5/6)^{\mathrm{T}}$ y $v = 2\ 2/3$. Por la Sección 6.5.5 también sabemos que $\tilde{q} = (2/3, 1/3, 0)^{\mathrm{T}}$.

Suponemos que el conjunto H es la clausura convexa (Sección 5.2.4) de las columnas de la matriz A. Un punto de H es por tanto una combinación convexa (Sección 4.2.3) de las columnas de A. Esto es, para algún q en Q,

$$\begin{aligned} h &= q_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + q_2\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} + q_3\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1q_1 + 6q_2 + 0q_3\\ 3q_1 + 2q_2 + 4q_3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix} = Aq. \end{aligned}$$

Este razonamiento prueba que la clausura convexa de las columnas de la matriz A es el conjunto

$$H = \{Aq : q \in Q\}$$

que muestra la Figura 6.12(a).

El conjunto K aparece en la Figura 6.12(b). Está definido por

$$K = \{k : k_1 \leqslant v \text{ y } k_2 \leqslant v\},$$

donde $v = \tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q}$. Es útil observar[20] que k pertenece a K si y sólo si

$$p^{\mathrm{T}}k \leqslant v, \qquad (6.18)$$

para todo p en P.

El hiperplano $\tilde{p}^{\mathrm{T}}x = v$ separa H y K. Es inmediato que K se encuentra por debajo del hiperplano, porque podemos tomar $p = \tilde{p}$ en (6.18). Para ver

[20] Si $k_1 \leqslant v$ y $k_2 \leqslant v$, entonces

$$p^{\mathrm{T}}k = p_1k_1 + p_2k_2 \leqslant (p_1 + p_2)v = v$$

para todo p en P, porque $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ y $p_1 + p_2 = 1$. Igualmente, si $p^{\mathrm{T}}k \leqslant v$ para todo p en P, entonces $k_1 \leqslant v$ y $k_2 \leqslant v$. Para verlo, considérense los valores particulares $p = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ y $p = (1, 0)^{\mathrm{T}}$.

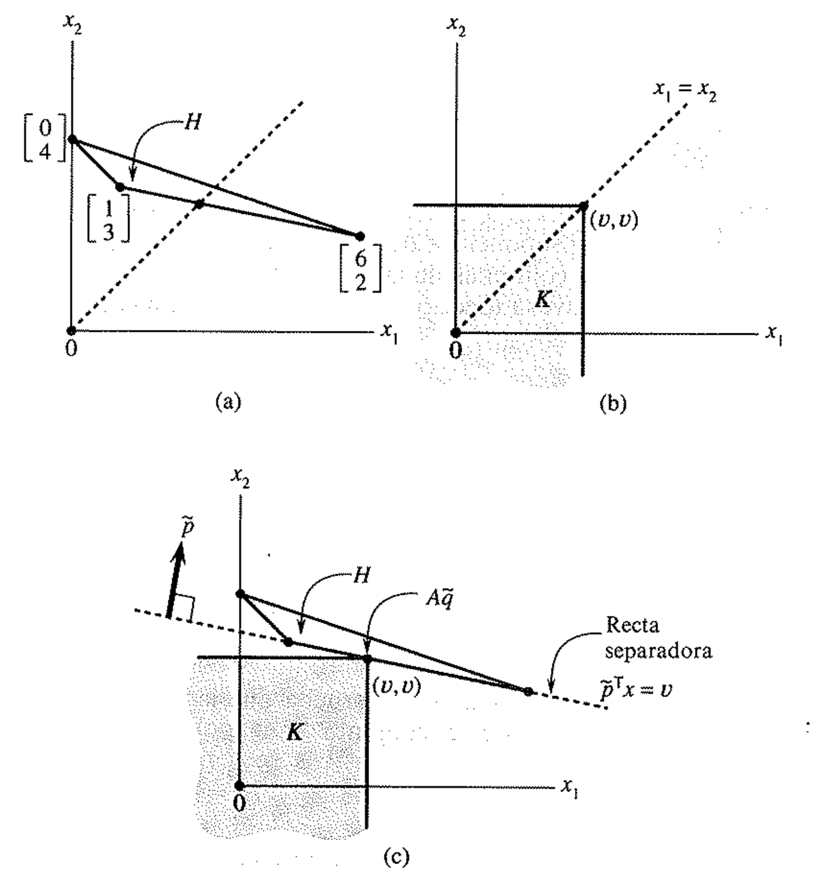


Figura 6.12. Representación geométrica de estrategias de seguridad.

que H se encuentra por encima, necesitamos la mitad izquierda de (6.16). Esta dice que $\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant v$, para todo q en Q. Al escribir $h = Aq$ se sigue que

$$\tilde{p}^{\mathrm{T}}h \geqslant v$$

para todo h en H.

La mitad derecha de (6.16) todavía no ha sido utilizada. Dice que $p^{\mathrm{T}}A\tilde{q} \leqslant v$ para todo p en P. Luego $A\tilde{q}$, que ya sabemos que pertenece a H, también debe pertenecer a K por (6.18). Esto es, el conjunto $H \cap K$ de todos los puntos comunes a H y K contiene $A\tilde{q}$. Aunque H y K están separados por el hiperplano $\tilde{p}^{\mathrm{T}}x = v$, también tienen el punto $A\tilde{q}$ en común, como muestra la Figura 6.12(c).

Resumen. Lo que hemos dicho se puede resumir brevemente. Las desigualdades (6.16) caracterizan $(\tilde{p}, \tilde{q})$ como un punto de silla en estrategias mixtas

con $v = \tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q}$. Existe una caracterización geométrica alternativa. Construidos los conjuntos H y K, $\tilde{p}$ aparece como un vector ortogonal al hiperplano $\tilde{p}^{\mathrm{T}}x = v$ que separa los conjuntos convexos H y K. El vector $\tilde{q}$ puede ser hallado usando que el punto $A\tilde{q}$ pertenece al conjunto $H \cap K$.

6.6.2. La separación en la resolución de juegos

La subsección anterior explica cómo interpretar geométricamente el teorema del minimax. En la presente usaremos la geometría para resolver algunos juegos de suma cero con dos jugadores. El método funciona para cualquier matriz de pagos con sólo dos filas.

Ejemplo 1. Consideremos el juego de suma cero con dos jugadores cuya matriz de pagos es (6.17). Este es un antiguo conocido a quien vimos por última vez en la subsección anterior.

Paso 1. Señalar la situación de las columnas $(1, 3)^{\mathrm{T}}$, $(6, 2)^{\mathrm{T}}$ y $(0, 4)^{\mathrm{T}}$ de la matriz A en papel cuadriculado. Después, dibujar su clausura convexa H como en la Figura 6.12(a).

Paso 2. Dibujar la recta $x_1 = x_2$. El punto $(v, v)^{\mathrm{T}}$ pertenece a esta recta. El conjunto K es como aparece en la Figura 6.12(b). Al número v se le asigna el *menor* valor tal que H y K tienen por lo menos un punto en común[21], como muestra la Figura 6.12(c). (La Figura 6.13(a) muestra un caso donde v ha sido escogido demasiado pequeño, de manera que H y K no tienen puntos en común. La Figura 6.13(b) muestra un caso donde v ha sido escogido demasiado grande. Podría haber sido escogido un poco más pequeño y los conjuntos H y K todavía tendrían puntos en común.)

Paso 3. Dibujar la recta separadora $\tilde{p}^{\mathrm{T}}x = v$, como en la Figura 6.12(c).

Paso 4. Hallar $\tilde{p}$. Este es un vector ortogonal a la recta separadora. Con frecuencia se puede hallar sin necesidad de calcular, pero aquí es necesario escribir la ecuación de la recta separadora. Ya que esta recta pasa por $(1, 3)^{\mathrm{T}}$ y $(6, 2)^{\mathrm{T}}$, tiene por ecuación

$$\frac{x_2 - 3}{x_1 - 1} = \frac{2 - 3}{6 - 1} = \frac{-1}{5}.$$

Esta se puede reescribir como $x_1 + 5x_2 = 16$. Sabemos por la Sección 4.5 que los coeficientes 1 y 5 de esta ecuación son las coordenadas de un vector normal. Luego $(1, 5)^{\mathrm{T}}$ es un vector nomal a la recta separadora.

[21] Los conjuntos H y K deben tener un punto en común porque $A\tilde{q}$ pertenece a ambos. Debe contener cuantos menos puntos comunes mejor, porque el teorema del hiperplano separador requiere que H no contenga puntos interiores de K.

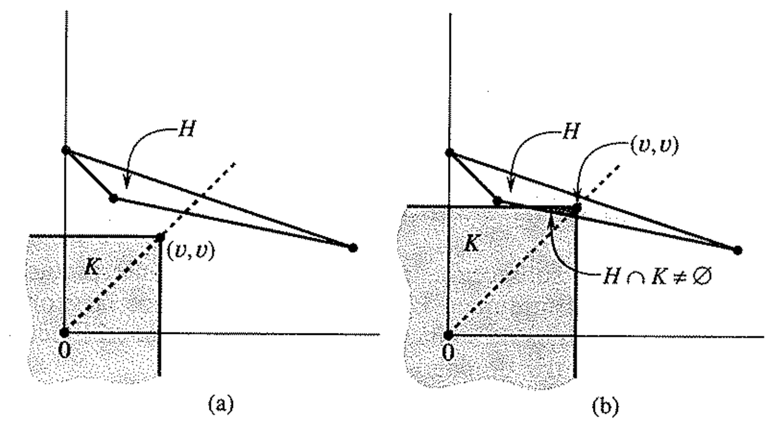


Figura 6.13. La elección del número v.

Pero necesitamos encontrar un vector ortogonal que satisfaga $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ y que así pertenezca al conjunto P. El vector ortogonal $(1, 5)^T$ es reemplazado[22], por tanto, por $\tilde{p} = (1/6, 5/6)^T$.

Paso 5. Hallar el valor del juego, v. Aquí $(v, v)^T$ es el punto donde se encuentran las rectas $x_1 = x_2$ y $x_1 + 5x_2 = 16$. Por tanto, $v + 5v = 16$, y $v = 16/6 = 2\ 2/3$.

Paso 6. Hallar $\tilde{q}$ usando que $A\tilde{q}$ pertenece al conjunto $H \cap K$. Primero debemos identificar $H \cap K$. En el ejemplo presente, $H \cap K$ consiste de un único punto $(v, v) = (2\ 2/3, 2\ 2/3)$. Así pues

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 2/3 \\ 2\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Esto se podría convertir en un sistema de tres ecuaciones lineales añadiendo la condición de que $\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 = 1$. Sin embargo suele haber métodos más fáciles.

Recordemos que H es es la clausura convexa de las columnas de A. Así $A\tilde{q}$ es una combinación convexa de las columnas de A. De hecho, $A\tilde{q}$ se encuentra en el centro de gravedad de los pesos $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ y $\tilde{q}_3$ colocados en los puntos $(1, 3)^T$, $(6, 2)^T$ y $(0, 4)^T$ (Sección 5.2.3). En la Figura 6.12(c), $(v, v)^T = A\tilde{q}$ parece que se encuentra a un tercio del camino sobre el segmento que une el punto $(1, 3)^T$ con el punto $(6, 2)^T$. Si es así, entonces

[22] Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda(1, 5)^T$ apunta en la misma (u opuesta) dirección que $(1, 5)^T$ y, por tanto, también es normal a la recta separadora. Tomamos $\lambda = 1/6$ para obtener un vector cuyas coordenadas sumen 1.

los pesos apropiados deben ser $\tilde{q}_1 = 2/3$, $\tilde{q}_2 = 1/3$ y $\tilde{q}_3 = 0$. Para comprobarlo, observemos que

$$2/3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1/3\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 2/3 \\ 2\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Así con un mínimo de cálculo hemos establecido que la jugadora II tiene una única estrategia de seguridad $\tilde{q} = (2/3, 1/3, 0)^T$.

En resumen: $v = 2\ 2/3$, $\tilde{p} = (1/6, 5/6)^T$ y $\tilde{q} = (2/3, 1/3, 0)^T$. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en las Secciones 6.4.2 y 6.5.5.

Ejemplo 2. Consideremos el juego de suma cero con dos jugadores con la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta proporciona la configuración de la Figura 6.14(a). La recta de separación tiene por ecuación $x_1 = 3$, luego $\tilde{p} = (1, 0)^T$. El valor del juego es $v = 3$. El conjunto $H \cap K$ está formado por todos los puntos del segmento ℓ que une $(3, 0)^T$ y $(3, 2)^T$. Si $A\tilde{q}$ pertenece a ℓ, entonces $\tilde{q}$ es una estrategia de seguridad para la jugadora II. Si colocamos pesos $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, y $\tilde{q}_3$ en $(4, 5)^T$, $(3, 2)^T$ y $(3, 0)^T$, ¿cuándo se encontrará sobre ℓ su centro de gravedad? La única restricción necesaria es que $\tilde{q}_1 = 0$. Luego cualquier $\tilde{q}$ en Q con $\tilde{q}_1 = 0$ es una estrategia de seguridad para la jugadora II.

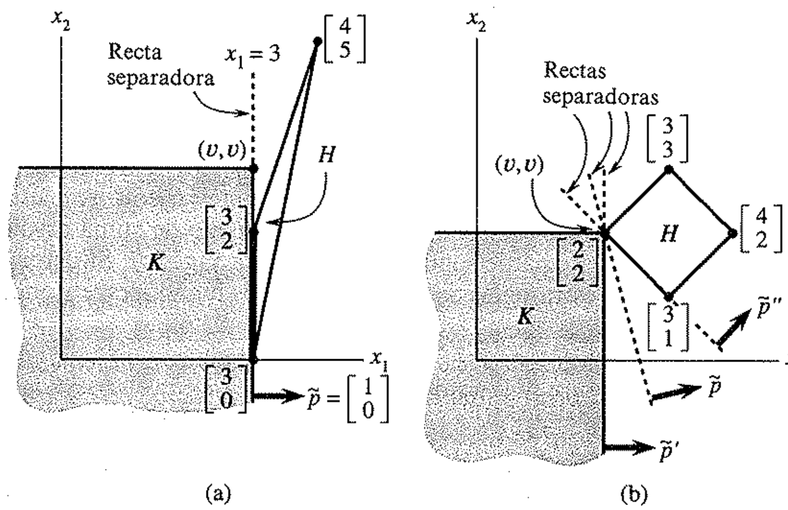


Figura 6.14. Dos ejemplos más.

Obsérvese que la primera columna de la jugadora II está fuertemente dominada por su tercera columna. Para empezar la hubiéramos podido eliminar, por tanto. Su segunda columna está *débilmente* dominada por su tercera columna. Si ésta también hubiera sido eliminada, todas sus estrategias de seguridad excepto una (la que tiene $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 0$) se hubieran perdido.

Ejemplo 3. Consideremos el juego de suma cero con dos jugadores con la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta proporciona la configuración de la Figura 6.14(b). Hay muchas rectas separadoras, tres de las cuales han sido dibujadas: los dos casos extremos con $\tilde{p}' = (1/2, 1/2)^T$ y $\tilde{p}'' = (0, 1)^T$, y un caso intermedio $\tilde{p} = (1 - r, r)^T$. Cualquier $\tilde{p}$ tal que $1/2 \leqslant r \leqslant 1$ es, por tanto, una estrategia de seguridad para el jugador I. El valor del juego es $v = 2$. El conjunto $H \cap K$ está formado por el único punto $(2, 2)^T$. Para que $A\tilde{q}$ sea igual a $(2, 2)^T$ todo el peso debe ser asignado a la única columna $(2, 2)^T$. Luego la jugadora II tiene una única estrategia de seguridad $\tilde{q} = (1, 0, 0, 0)^T$.

6.6.3. Estrategias de seguridad y dominación

El método para resolver juegos de suma cero con dos jugadores que acabamos de dar funciona cualesquiera que sean las dimensiones de la matriz de pagos. Sin embargo, como instrumento práctico sólo funciona cuando la matriz tiene sólo dos filas o dos columnas[23]. En juegos más extensos, es habitualmente necesario ensayar otros trucos. Si no se encuentran, los juegos de suma cero con dos jugadores siempre se pueden resolver utilizando técnicas de programación lineal. Estas técnicas, sin embargo, no pertenecen al ámbito de este libro.

¿De qué trucos disponemos para enfrentarnos a grandes juegos? Los trucos cuya lista se da a continuación sólo son útiles cuando lo único que interesa es hallar el valor de un juego de suma cero con dos jugadores y una estrategia de seguridad para cada jugador. Si usted quiere determinar todas las estrategias de seguridad de los jugadores, entonces hay que trabajar más.

[23] En este último caso, intercambiar los papeles de los jugadores I y II. Entonces las filas y columnas de la matriz de pagos tienen que intercambiarse. Esto da la matriz traspuesta A^T. Los signos de todos los pagos en esta matriz deben ser cambiados, de manera que se conviertan en los pagos del nuevo jugador I (que es la antigua jugadora II). Por tanto, el nuevo juego tiene por matriz de pagos $-A^T$. Tras analizar el nuevo juego, se habrán determinado las estrategias de seguridad $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ y un valor v. Entonces el antiguo juego tiene valor $-v$. Una estrategia de seguridad para el *antiguo* jugador I es $\tilde{q}$. Una estrategia de seguridad para la *antigua* jugadora II es $\tilde{p}$.

- El primer truco no es muy inteligente. Observe si la matriz de pagos tiene un punto de silla. Si lo tiene, ya hemos terminado. No hay necesidad de armar un lío con estrategias mixtas.
- El segundo truco consiste en buscar simetrías. El ejemplo que ahora consideraremos en la Sección 6.7 muestra cómo éstas se pueden utilizar a veces para simplificar el problema.
- El tercer truco es incluso más basto. Consiste en eliminar las estrategias dominadas, como se ha descrito en la Sección 4.6.1. Lo que dijimos allí acerca de las estrategias de equilibrio de Nash se puede utilizar directamente para las estrategias de seguridad de juegos de suma cero con dos jugadores, porque el Teorema 6.5.2 nos dice que estrategias de seguridad y estrategias de equilibrio de Nash son la misma cosa en juegos de suma cero con dos jugadores. Sin embargo, lo que diremos ahora se puede utilizar en cualquier juego, tanto si es de suma cero como si no.

Recordemos que siempre se pueden eliminar estrategias fuertemente dominadas sin temor a perder nada importante. Las estrategias de equilibrio de Nash nunca asignan probabilidad positiva a una estrategia fuertemente dominada. Tampoco lo hacen las estrategias de seguridad. Las cosas son un poco complicadas con las estrategias débilmente dominadas. Algunas veces las estrategias de equilibrio de Nash asignan probabilidad positiva a una estrategia débilmente dominada, y lo mismo hacen las estrategias de seguridad. Si usted está buscando todas las estrategias de equilibrio de Nash o todas las estrategias de seguridad, al eliminar una estrategia débilmente dominada se arriesga usted a perder algo que le interesa. Sin embargo, si usted está buscando sólo algunas estrategias de equilibrio de Nash, o algunas estrategias de seguridad, entonces la eliminación de estrategias débilmente dominadas es inofensiva. Siempre hay alguna estrategia de equilibrio de Nash que asigna una probabilidad cero a una estrategia débilmente dominada dada. Esto también es cierto para estrategias de seguridad.

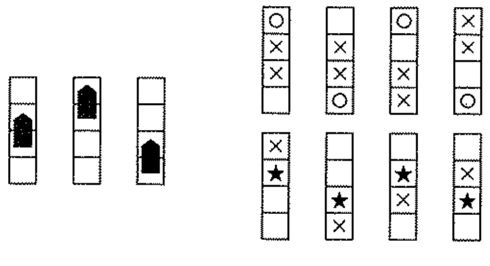
6.7. El juego de los barcos

Fun 6.8 ⟶

Este es un juego infantil muy popular. Cada jugador dispone de una cuadrícula en la que secretamente señala unos barcos de guerra. Los jugadores se alternan anunciando casillas de la cuadrícula del otro jugador que quieren bombardear. El objetivo es ser el primero en eliminar la flota enemiga.

Aquí consideraremos una versión simplificada y asimétrica del juego. John tendrá un único barco, que está colocado en una cuadrícula 4×1 que representa un puerto. El barco ocupa dos casillas adyacentes. Los diagramas de la Figura 6.15(a) muestran las tres situaciones posibles para el barco en el puerto. Estas son las tres estrategias puras de John.

Mary, que no sabe dónde John ha colocado el barco, pretende destruirlo



(a) (b)

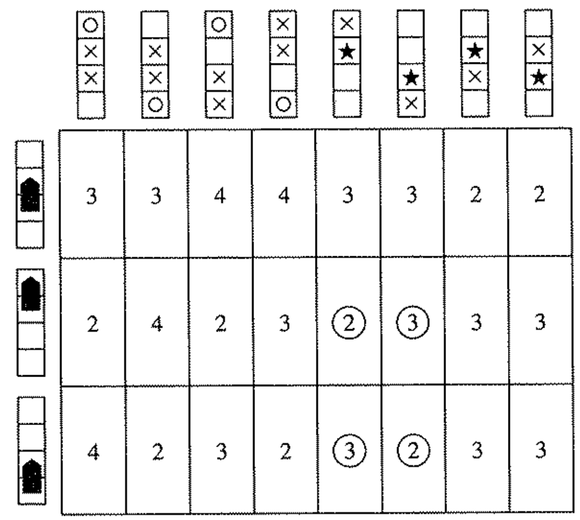
Figura 6.15. Estrategias puras para John y Mary en el juego de los barcos.

bombardeándolo. Las *dos* casillas ocupadas por el barco han de ser tocadas para destruirlo. Una a una, en el orden que ella elige, Mary bombardea las casillas que forman el puerto. Cada vez que Mary anuncia la casilla que desea bombardear, John responde diciendo (sinceramente) si el barco ha sido o no tocado. El objetivo de John es colocar el barco para maximizar el número de disparos requeridos para hundirlo. El objetivo de Mary es minimizar el número de disparos.

Los diagramas de la Figura 6.15(b) representan las estrategias puras de Mary. Los símbolos ∘ y ∗ indican dónde colocará la primera bomba. El símbolo ∘ indica que si la primera bomba falla, entonces el segundo y tercer disparos deben apuntar a las casillas marcadas con ×. El símbolo ∗ se usa para indicar que si el primer disparo acierta, entonces el segundo debe dirigirse a la casilla marcada con ×. ¿Qué debería hacer Mary en los otros casos? Por ejemplo, cuando se usa el símbolo ∘, si el primer disparo hubiera acertado, ¿a dónde debería dirigirse el segundo disparo? Estas preguntas se responden considerando únicamente estrategias que no exigen que Mary actúe estúpidamente. Por ejemplo, si se usa el símbolo ∗ y el primer disparo hubiera fallado, entonces Mary sabría cuál es exactamente la ubicación del barco y sería estúpido por su parte que no le diera con el segundo y tercer disparos.

La Figura 6.16 muestra la matriz de pagos de John para este juego de suma cero con dos jugadores. Por ejemplo, la casilla 2 en la fila 2 y columna 3 se calcula observando que si John usa la fila 2 y Mary la columna 3, entonces el primer disparo de Mary será un blanco. Entonces queda localizado exactamente el barco y Mary usará el segundo disparo para hundirlo. Luego sólo se precisan dos disparos para terminar el juego.

La matriz de pagos 3 × 8 de la Figura 6.16 no toma en consideración unas cuantas estrategias puras estúpidas de que Mary dispone. Aún así es demasiado complicada para poder utilizar el método de la sección anterior. Hagamos otra simplificación. Si dos estrategias puras son idénticas excepto por el hecho de que norte y sur se intercambian, entonces asumiremos que ambas se usan con la misma probabilidad. Por ejemplo, supondremos que John usa las filas 2 y 3 con la misma probabilidad. Análogamente, supon-

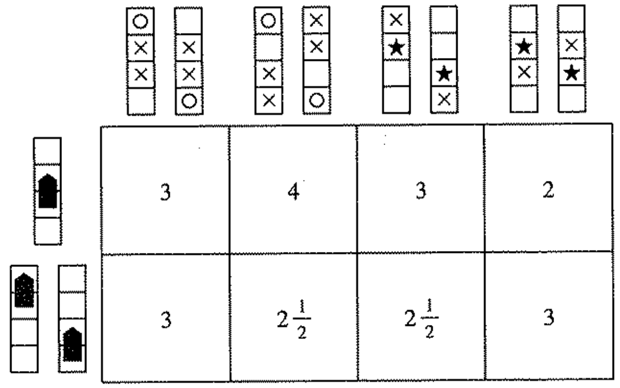


3	3	4	4	3	3	2	2
2	4	2	3	2	3	3	3
4	2	3	2	3	2	3	3

Figura 6.16. La matriz de pagos de John en el juego de los barcos.

dremos que Mary usa las columnas 7 y 8 con la misma probabilidad. Esto reduce la matriz de pagos de John a la matriz 2 × 4 de la Figura 6.17, que es mucho más manejable.

Para ilustrar con un ejemplo el cálculo de las componentes de esta matriz, consideremos la casilla 2 1/2 en la fila 2 y la columna 3. Esta se obtiene cuando John usa la fila 2 y la fila 3 de la Figura 6.16, cada una con probabilidad 1/2, y Mary usa independientemente la columna 5 y la columna 6, cada una con probabilidad 1/2. Los pagos incluidos en un círculo en la Figura 6.16 se obtienen con probabilidad 1/2 × 1/2 = 1/4. El pago esperado de John es, por tanto, 2 1/2 = 1/4 (2 + 3 + 2 + 3).



3	4	3	2
3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3

Figura 6.17. Una versión simplificada de la matriz de pagos de John para el juego de los barcos.

3	4	3	2
3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3

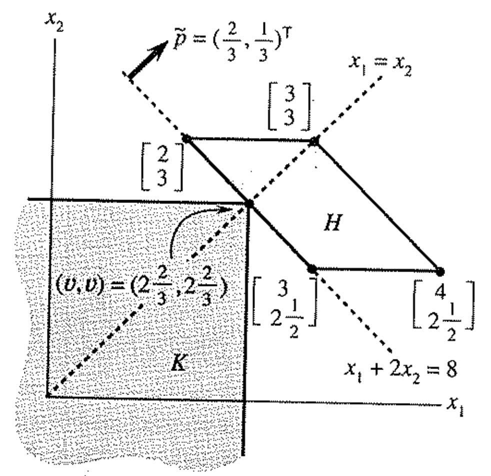


Figura 6.18. La separación de conjuntos convexos en el juego de los barcos.

La Figura 6.18 muestra como se aplica el método de la sección anterior a la versión simplificada 2×4 de la matriz de pagos[24]. La recta de separación es $x_1 + 2x_2 = 8$. Un vector ortogonal apropiado es $\tilde{p} = 1/3, 2/3)^T$. El conjunto $H \cap K$ está formado por un único punto $(2\ 2/3, 2\ 2/3)^T$, que se encuentra resolviendo simultáneamente las ecuaciones $x_1 + 2x_2 = 8$ y $x_1 = x_2$. El valor del juego es $v = 2\ 2/3$. El punto $(2\ 2/3, 2\ 2/3)$ se encuentra a una tercera parte del segmento que une $(3, 2\ 1/2)^T$ y $(2, 3)^T$. Luego $\tilde{q}$ debe asignar un peso de 2/3 a la columna 3 de la matriz de pagos de la Figura 6.17 y 1/3 a la columna 4. Las columnas 1 y 2 tienen peso cero. Así pues, $\tilde{q} = (0, 0, 2/3, 1/3)^T$.

Entonces, ¿cómo hay que jugar a los barcos? Refiriéndonos a la matriz de pagos original 3×8 de la Figura 6.16, John debería[25] usar la estrategia mixta $(1/3, 1/3, 1/3)^T$ (porque ésta asigna la misma probabilidad a las filas 2 y 3 que suman $\tilde{p} = 2/3$). Mary debería usar la estrategia mixta $(0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/6, 1/6)^T$. Si se usan estas estrategias mixtas, entonces el número medio de disparos necesario para para hundir el barco es 2 2/3.

Tal vez no es muy difícil anticipar que John debería usar cada una de las tres posibles situaciones del barco con igual probabilidad. Sin embargo, la estrategia de fuego de Mary tal vez no sea tan obvia.

---

[24] Se puede observar que la columna 4 domina débilmente a la columna 1, y que la columna 3 domina débilmente a la columna 2. La eliminación de la primera y segunda columnas simplificaría ligeramente las cosas.

[25] Sería necesario comprobar que el par de estrategias mixtas propuestas por John y Mary constituyen efectivamente un punto de silla para el juego de la Figura 6.16. No hemos ofrecido ninguna *prueba* de que las estrategias simétricas se deben usar con probabilidades iguales en este juego.

	Actúa	*Espera*
Actúa	1	-1
Espera	-1	v_{n-1}

Figura 6.19. El juego de la inspección.

6.8. El juego de la inspección

Econ 6.9 ⟶

Este ejemplo usa estrategias mixtas en juegos de suma cero con dos jugadores en combinación con el algoritmo de Zermelo.

Un Departamento de Protección Ambiental sabe que una empresa sin escrúpulos ha decidido verter productos polucionantes en un río un día de cada n. El Departamento sabrá inmediatamente que el río ha sido contaminado por las quejas telefónicas de los habitantes afectados. Sin embargo, para obtener una condena judicial, el Departamento necesita pillar a la empresa «con las manos en la masa». Esto significa que debe intentar prever el día en que la empresa hará el vertido para tener un inspector en el lugar. Desgraciadamente, los recursos del Departamento son tan escasos que sólo puede mandar un inspector al lugar de los hechos un día de cada n, y la empresa lo sabe.

La situación se puede modelizar como un juego de dos jugadores en el que el jugador I es el Departamento y la jugadora II la empresa. Supondremos que el Departamento gana si decide inspeccionar la empresa el mismo día en que ésta hace el vertido. En caso contrario, la empresa gana. Ambos jugadores asignan un pago de $+1$ a ganar y de -1 a perder. El juego es pues de suma cero. Designaremos su valor por v_n.

Los jugadores deciden si actúan o no día a día. El primero de los n días, por tanto, juegan el juego matricial de la Figura 6.19. Si ambos actúan, el Departamento inspeccionará a la empresa el día en que ésta hace el vertido. El Departamento gana y por ello la casilla superior izquierda es $+1$. Si un jugador espera mientras el otro actúa, el Departamento pierde. Por ello las casillas superior derecha e inferior izquierda son -1. ¿Qué ocurre con la casilla inferior izquierda? Si ambos jugadores deciden esperar en el primer día, entonces nada ocurrirá hasta el segundo. Al empezar el segundo, las cosas estarán igual como al empezar el primer día, exceptuando que sólo quedan $n - 1$ días. El valor del juego de la inspección jugado sobre un período de $n - 1$ días es v_{n-1}, por ello este es el pago apropiado cuando ambos jugadores deciden esperar el primer día[26].

---

[26] A veces se menciona esta técnica con una referencia a la teoría de «juegos estocásticos». Esto puede confundir al no iniciado. «Estocástico» significa «al azar», pero la técnica es viable tanto si envuelve procesos al azar como si no.

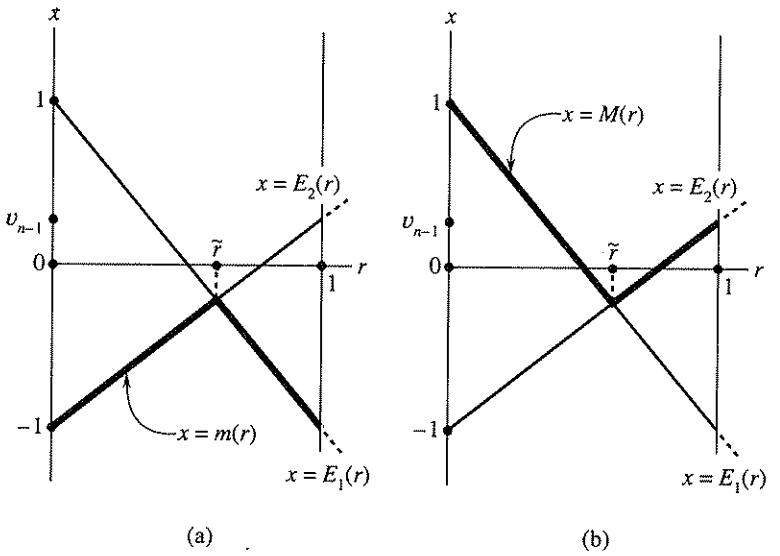


Figura 6.20. Estrategias de seguridad en el juego de la inspección.

Por supuesto, si $n = 1$, no habrá segundo día, pero entonces la empresa no tiene elección sobre cuándo polucionar y es seguro que la pillan *in fraganti*. Luego $v_1 = 1$.

En lugar de dar otro ejemplo del método del hiperplano separador para resolver juegos de suma cero, aprovecharemos la oportunidad para revisar el método usado en las Secciones 6.4.2 y 6.5.5 para hallar estrategias de seguridad.

Si el Departamento (jugador I) usa la estrategia mixta $p = (1 - r, r)^{\mathrm{T}}$, entonces su pago esperado es $E_1(r) = (1 - r) - r = 1 - 2r$ cuando la empresa actúa, y $E_2(r) = -(1 - r) + rv_{n-1} = -1 + r(1 + v_{n-1})$ cuando la empresa espera. Para hallar una estrategia de seguridad, en primer lugar la empresa necesita hacer una gráfica de $m(r) = \min\{E_1(r), E_2(r)\}$. Esta gráfica es la línea en negrita de la Figura 6.20(a). El siguiente paso es encontrar el valor de r para el cual $m(r)$ es mayor. El diagrama muestra claramente que esto ocurre donde se cortan las rectas $x = E_1(r)$ y $x = E_2(r)$. La solución a la ecuación $1 - 2r = -1 + r(1 + v_{n-1})$ es $\tilde{r} = 2/(3 + v_{n-1})$ y, por tanto, ésta es la probabilidad con la que la empresa debería esperar en el primer día. El nivel de seguridad del Departamento, y por tanto el valor v_n del juego de la inspección, es

$$v_n = m(\tilde{r}) = 1 - 2\tilde{r} = \frac{v_{n-1} - 1}{v_{n-1} + 3}. \tag{6.19}$$

La empresa (jugadora II) puede calcular una estrategia de seguridad de forma similar[27]. Como en la Sección 6.5.5 es necesario recordar que los pagos en la matriz son pérdidas para el jugador II y, por tanto, los papeles de «máx » y «mín» han de ser intercambiados en la discusión.

Si la empresa (jugadora II) usa la estrategia mixta $q = (1 - r, t)^{\mathrm{T}}$, entonces su pago esperado es $E_1(r) = (1 - r) - r = 1 - 2r$ cuando el Departamento actúa, y $E_2(r) = -(1 - r) + v_{n-1}r = -1 + r(1 + v_{n-1})$ cuando el Departamento espera. Para hallar una estrategia de seguridad, la empresa necesita hacer un gráfico de $M(r) = \text{máx}\{E_1(r), E_2(r)\}$. Este gráfico aparece en negrita en la Figura 6.20(b). El siguiente paso es encontrar el valor de r para el que $M(r)$ es menor. El diagrama muestra claramente que esto ocurre donde se cortan las rectas $x = E_1(r)$ y $x = E_2(r)$. La solución al problema de la empresa, por tanto, es la misma que la del problema del Departamento: la empresa debería esperar en el primer día con probabilidad $\tilde{r} = 2/(3 + v_{n-1})$.

Haciendo la sustitución $v_k = w_k^{-1} - 1$ y simplificando, la Ecuación (6.19) se reduce a

$$w_n - w_{n-1} = 1/2 \quad (n > 1)$$

El hecho que puedan ser reducidas a esta forma permite entender por qué las ecuaciones del tipo de la (6.19) son llamadas *ecuaciones en diferencias*. No siempre es fácil resolver estas ecuaciones, pero aquí las cosas funcionan muy bien:

$$\begin{aligned} w_n - w_1 &= (w_n - w_{n-1}) + (w_{n-1} - w_{n-2}) + \cdots + (w_2 - w_1) \\ &= 1/2 + 1/2 + \cdots + 1/2 \\ &= 1/2(n - 1). \end{aligned}$$

Pero $w_1 = 1/2$, porque $v_1 = 1$. Luego $w_n = n/2$. Luego el valor v_n del juego de la inspección viene dado por

$$v_n = w_n^{-1} - 1 = -1 + \frac{2}{n}.$$

Supongamos que la empresa tiene que hacer un vertido un día de una semana determinada, pero pasan el domingo y el lunes sin que el río haya sido contaminado ni la empresa inspeccionada. ¿Con qué probabilidad debería ser inspeccionada la empresa el martes? El martes por la mañana los jugadores se enfrentan con el juego de la inspección con $n = 5$, porque sólo quedan cinco días en esta semana. Luego el Departamento debería inspeccionar con probabilidad $1 - \tilde{r}$, con $\tilde{r} = 2/(v_4 + 3) = 4/5$. Luego si nada

[27] Podemos evitar los cálculos observando que la matriz de pagos es simétrica. Se sigue que la estrategia de seguridad de la jugadora II será la misma que la del jugador I. Sin embargo es más fácil efectuar los cálculos que explicar por qué esto es cierto. La razón no es del todo evidente.

ocurre el domingo o el lunes, el Departamento debería inspeccionar el martes con probabilidad 1/5. Análogamente, la empresa debería hacer el vertido con probabilidad 1/5. En general, si no ha ocurrido nada hasta un día dado y quedan k días, cada jugador debería actuar con probabilidad $1/k$.

Un método rápido. El método aquí usado para resolver el juego de la inspección se puede usar en una amplia gama de casos. Sin embargo, para este juego existe un planteamiento alternativo, corto y poco sofisticado, que se aprovecha de que la forma estratégica del juego es particularmente simple.

Como en otros juegos con tiempos, como el duelo o la ruleta rusa, las únicas estrategias puras que hay que considerar son aquellas que dicen cuándo un jugador se propone actuar. Cada jugador dispone de n estrategias así, una por cada uno de los n días. El jugador I tiene por tanto una matriz de pagos $n \times n$. Los valores de las casillas son $+1$ en la diagonal principal[28], y -1 en las demás. Esto refleja que el Departamento gana si los dos jugadores deciden actuar el mismo día, y pierde en los demás casos.

Las casillas en cada columna de la matriz suman $-(n - 2)$. De aquí que si el jugador I usa cada una de sus estrategias puras con la misma probabilidad, se asegura un pago esperado de $-(n - 2)/n$, haga lo que haga el jugador II. Las casillas de cada fila también suman $-(n - 2)$. Jugar cada estrategia pura con la misma probabilidad también asegura al jugador II un pago esperado de $(n - 2)/n$, haga lo que haga el jugador I. Se sigue que es una estrategia de seguridad para cada jugador usar cada una de sus estrategias puras con la misma probabilidad[29]. El valor del juego es el nivel de seguridad del jugador I, es decir,

$$v_n = -(n - 2)/n = -1 + \frac{2}{n}$$

que es exactamente lo que habíamos encontrado anteriormente.

6.9. El juego de las amenazas de Nash

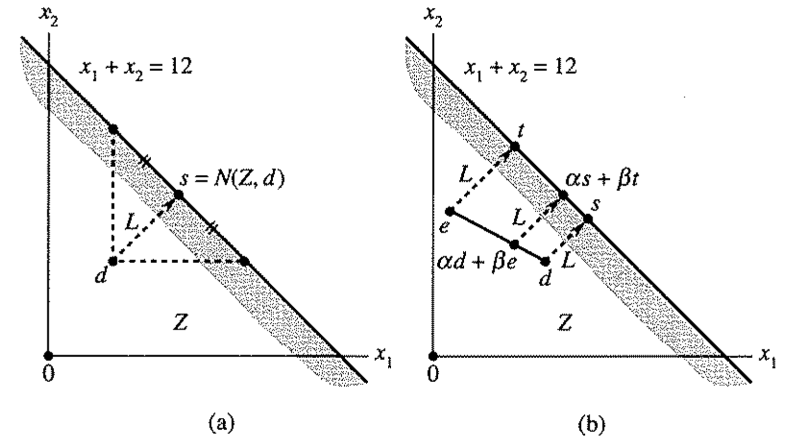
Econ 6.10 ⟶

La solución de negociación de Nash se discutió en el Capítulo 5. Si (X, d) es un problema de negociación en el que X es el conjunto de pares de pagos factibles, y d es el punto de desacuerdo, recordemos que la solución de negociación de Nash regular determina un par de pagos $s = N(X, d)$ de X como candidato a ser el resultado de un acuerdo racional entre los dos jugadores.

---

[28] Que va de la esquina noroeste a la esquina sudeste.

[29] Esto no es inconsistente con lo dicho anteriormente. Por ejemplo, supongamos que $n = 3$. Supongamos que el jugador I decide actuar el primer día con probabilidad 1/3. Supongamos que decide actuar el segundo día con probabilidad 1/2, *si* no ha actuado el primer día. Supongamos que ha decidido actuar el tercer día con probabilidad 1, *si* no ha actuado en los días precedentes. Por tanto, antes de que empiece todo, la probabilidad de que actúe el segundo día es $2/3 \times 1/2 = 1/3$. La probabilidad de que actúe el tercer día es $2/3 \times 1/2 \times 1 = 1/3$.



(a) (b)

Figura 6.21. Soluciones de negociación de Nash.

En esta sección la región de pagos X será el conjunto Z de la Figura 6.21(a). La cota superior de este conjunto tiene por ecuación $x_1 + x_2 = 12$. Si tanto John como Mary son neutrales al riesgo con respecto al dinero, se puede pensar en su problema de negociación en términos de dividir 12 dólares que han sido gentilmente donados por un filántropo que pasaba por allí. La Figura 6.21(a) muestra que la solución de negociación de Nash regular $s = N(Z, d)$ se encuentra donde la recta de pendiente 1 y que pasa por d corta la frontera de Z. La Figura 6.21(b) muestra que si s es la solución cuando el punto de desacuerdo es d, y t es la solución cuando el punto de desacuerdo es e, entonces la solución es $\alpha s + \beta t$ cuando el punto de desacuerdo es $\alpha d + \beta e$. Luego la función L definida por $L(d) = N(Z, d)$ satisface $L(\alpha d + \beta e) = \alpha L(d) + \beta L(e)$. Los matemáticos llaman lineales a las funciones que tienen esta propiedad.

La ubicación de la solución de negociación de Nash depende en gran medida de dónde se encuentra el punto de desacuerdo. Pero, ¿qué ocurre si previamente a la negociación no ha sido fijado un punto de desacuerdo para John y Mary? Según Nash, de darse un desacuerdo, debería jugarse no cooperativamente algún juego. En este ejemplo, se supone que el juego de desacuerdo tiene la forma estratégica que muestra la Figura 6.22(a).

Supongamos que d_{ij} representa el par de pagos en la fila i y la columna j del juego de desacuerdo. Por ejemplo, $d_{22} = (6, 2)$. La Figura 6.22(c) muestra los resultados $s_{ij} = L(d_{ij}) = N(Z, d_{ij})$ que se obtendrían si se usara la solución de negociación de Nash regular con punto de desacuerdo d_{ij}. Estos resultados s_{ij} han sido tabulados en la Figura 6.22(b).

Si John y Mary son incapaces de ponerse de acuerdo, antes de que empiece la negociación, sobre qué van a hacer en el juego de desacuerdo en el caso en que la negociación fracase, entonces las cosas no son muy complicadas. El juego de desacuerdo tiene un único equilibrio de Nash que al ser jugado conduce al par de pagos (4/3, 96/13) (Ejercicio 7.8.5*d*)). Ya que

5, 3	12, 0	2, 2
6, 0	6, 2	9, 1

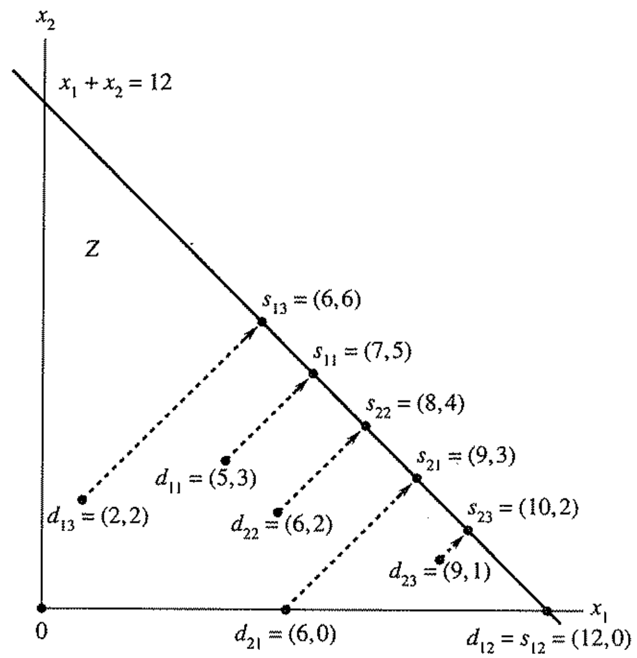
Juego de desacuerdo

(a)

7, 5	12, 0	6, 6
9, 3	8, 4	10, 2

Juego de las amenazas

(b)



(c)

Figura 6.22. Negociación de Nash sin punto de desacuerdo.

ambos jugadores saben que esto es lo que conseguirán si no llegan a ponerse de acuerdo, hemos identificado un punto de desacuerdo. Ahora podemos continuar como en el Capítulo 5.

Sin embargo, si John y Mary *pueden* comprometerse a seguir un determinado curso en el juego de desacuerdo en el caso de que las negociaciones se rompan, entonces pueden utilizar este poder para ejercer presión sobre su oponente. Nash estudió el caso en que los jugadores abren las negociaciones anunciando simultáneamente una estrategia para el juego de desacuerdo. Estos anuncios deben ser interpretados como *amenazas*. Se sobreentiende que si las negociaciones no culminan en acuerdo, entonces la amenaza *tiene* que cumplirse. Es importante que los jugadores no tengan libertad para dejar de cumplir sus amenazas, cuando llega el momento de cumplirlas.

En general, John y Mary amenazarán con utilizar determinadas estrategias mixtas en el juego de desacuerdo. Si John anuncia la estrategia mixta p y Mary anuncia la estrategia mixta q, entonces el desacuerdo conducirá a que John obtenga $d_1 = p^{\mathrm{T}}Aq$ y Mary obtenga $d_2 = p^{\mathrm{T}}Bq$, donde A y B son sus respectivas matrices de pagos en el juego de desacuerdo. Así pues, una vez que las amenazas han sido proferidas, los jugadores saben que el resultado del desacuerdo será el par de pagos d. Se obtiene, por tanto, $s = L(d) = N(Z, d)$, cuando la solución de negociación de Nash regular se usa para resolver el problema de negociación que resulta.

Si John y Mary son racionales, intentarán influir para que el resultado s les favorezca escogiendo estratégicamente p y q. Por tanto, se verán a sí mismos jugando un juego donde John escoge p, Mary escoge q y el resultado es $L(p^{\mathrm{T}}Aq, p^{\mathrm{T}}Bq)$. Puesto que L es lineal, $L(p^{\mathrm{T}}Aq, p^{\mathrm{T}}Bq) = (p^{\mathrm{T}}Cq, p^{\mathrm{T}}Dq)$, donde C y D son las matrices de pagos en el «juego de las amenazas» de la Figura 6.22(b).

Por ejemplo, si $p = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ y $q = (1/2, 0, 1/2)^{\mathrm{T}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
(p^{\mathrm{T}}Aq, p^{\mathrm{T}}Bq) &= (1/2 \times 5 + 1/2 \times 2, 1/2 \times 3 + 1/2 \times 2) \\
&= 1/2(5, 3) + 1/2(2, 2) \\
&= 1/2d_{11} + 1/2d_{13}.
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
L(p^{\mathrm{T}}Aq, p^{\mathrm{T}}Bq) &= L(1/2\, d_{11} + 1/2\, d_{13}) \\
&= 1/2L(d_{11}) + 1/2L(d_{13}) \\
&= 1/2s_{11} + 12s_{13} \\
&= 1/2(7, 5) + 1/2(6, 6) \\
&= (1/2 \times 7 + 1/2 \times 6, 1/2 \times 5 + 1/2 \times 6) \\
&= (p^{\mathrm{T}}Cq, p^{\mathrm{T}}Dq).
\end{aligned}
$$

Se sigue que la solución del juego en el que John y Mary negocian después de amenazar con el uso de estrategias mixtas especiales en el juego de desacuerdo es la misma que la del juego de las amenazas de la Figura 6.22(b). Puesto que Z fue escogido cuidadosamente, es fácil resolver el juego de las amenazas[30]. Es de suma constante, porque los pagos en cada recuadro siempre suman 12. Como se ha observado en la Sección 6.5.2, un

[30] Sin embargo, la metodología sería la misma en gran medida, incluso si el juego de las amenazas fuera mucho más complicado.

−1 / 1	−6 / 6	0 / 0
−3 / 3	−2 / 2	−4 / 4

(a)

1	6	0
3	2	4

(b)

Figura 6.23. La forma de suma cero para el juego de las amenazas.

juego así es estratégicamente equivalente a un juego de suma cero. De hecho, restando 6 de cada pago se obtiene el juego estratégicamente equivalente y de suma cero de la Figura 6.23(a). La matriz de pagos de John para este juego de suma cero aparece en la Figura 6.23(b).

La matriz de pagos de John para este juego de suma cero nos es familiar. En las Secciones 6.4.2 y 6.5.5 vimos que John debía jugar $\tilde{p} = (1/6, 5/6)^T$ y Mary debía jugar $\tilde{q} = (2/3, 1/3, 0)^T$. Entonces John conseguirá 2 2/3 y Mary conseguirá −2 2/3. Ya que este juego de suma cero es estratégicamente equivalente al juego de las amenazas original, John y Mary jugarán este juego precisamente de la misma manera que juegan el juego de suma cero. La única diferencia es que sus pagos tendrán 6 útiles más. O sea, John obtendrá 8 2/3 y Mary obtendrá 3 1/3.

En qué medida esta conclusión es realista depende de en qué medida es razonable suponer que John y Mary están irrevocablemente comprometidos a cumplir sus amenazas originales. En la práctica, adquirir este tipo de compromisos puede ser muy difícil. John puede amenazar con hacer algo terrible si Mary no quiere hacer concesiones, pero Mary no tiene por qué creer que John cumplirá su amenaza. De hecho, si el cumplirla le hace a él más daño que retirarse, John no la cumplirá cuando llegue el momento de hacerlo, excepto que algún impulso irracional lo domine. La situación no es muy diferente a la que se ha discutido en la Sección 4.6.3. Los jugadores que hacen amenazas increíbles en situaciones de negociación no son más creíbles que los libros de teoría de juegos que hacen predicciones increíbles sobre lo que harán los jugadores si se da una desviación del camino de equilibrio.

6.10. Ejercicios

Mates 1. Si A y B son conjuntos finitos de números reales, entonces[31]

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{máx } A \leqslant \text{máx } B.$$

[31] Recordemos que $B \subseteq A$ significa que todo elemento del conjunto A también es un elemento del conjunto B. máx A representa el mayor elemento de A. Si A y B tienen un número infinito de elementos, será necesario escribir sup en lugar de máx.

Mates 2. Explicar por qué

$$\text{máx } \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \text{máx } \{a_1, a_2, ..., a_n\} + \text{máx } \{b_1, b_2, ..., b_n\}.$$

Dar un ejemplo con $n = 2$ en el que la desigualdad sea estricta.

Mates 3. Explicar por qué

$$\text{máx } \{-a_1, -a_2, ..., -a_n\} = -\text{mín } \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$
$$\text{mín } \{-a_1, -a_2, ..., -a_n\} = -\text{máx } \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

4. Hallar los valores maximín $\underline{m}$ y minimax $\overline{m}$ de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Para qué matrices es cierto que $\underline{m} < \overline{m}$? ¿Para cuáles es cierto que $\underline{m} = \overline{m}$?

5. Demostrar, para cualquier matriz A, que

$$\text{maximín } (-A^T) = -\text{minimax } (A).$$

6. Hallar todos los puntos de silla de las matrices del Ejercicio 6.10.4.

Mates 7. Hallar, para cada matriz del Ejercicio 6.10.4, todos los valores de s que maximizan $\text{mín}_{t \in T}\, \pi(s, t)$ y todos los valores de t que minimizan $\text{máx}_{s \in t}\, \pi(s, t)$, donde $\pi(s, t)$ representa la casilla de la matriz en la fila s y columna t. ¿Qué relación guardan las respuestas con el Ejercicio 6.10.6?

Mates 8. Explicar por qué todas las matrices $m \times 1$ y $n \times 1$ tienen necesariamente un punto de silla.

Mates 9. Explicar por qué el intervalo abierto (1, 2), formado por todos los números reales que satisfacen $1 < x < 2$, no tiene elemento máximo ni elemento mínimo. ¿Quiénes son el supremo y el ínfimo de este conjunto?

10. Sea M la matriz de pagos del jugador I en un juego. Demostrar que, si M es A o D del Ejercicio 6.10.4, entonces el jugador I tiene una estrategia de seguridad pura. Hallar su nivel de seguridad en cada caso y todas sus estrategias puras de seguridad. Decidir en cada

caso qué debería hacer la jugadora II para asegurar que el jugador I no obtiene nada por encima de su nivel de seguridad.

11. Repetir el Ejercicio 6.10.10, pero intercambiando los papeles de los jugadores I y II. (El Ejercicio 6.10.5 puede ser útil.)

Mates 12. En la Sección 6.3.2 se ha demostrado que $\underline{m}=p_1(d^*)=1-p_2(d^*)$. Usese una metodología análoga para demostrar que $\overline{m}=p_1(d^*)=1-p_2(d^*)$, donde

$$\overline{m} = \min_{e} \sup_{d} \pi(d, e).$$

¿Por qué esto confirma que disparar a la distancia d^* es una estrategia de seguridad para el jugador I en el duelo?

13. Supongamos que el jugador I tiene una matriz de pagos 4×3. ¿Qué vector representa la estrategia mixta en la que nunca se utiliza la segunda estrategia pura y se usa cada una de las otras estrategias puras con la misma probabilidad? ¿Qué mecanismo aleatorio podría usar el jugador I para poner en práctica esta estrategia mixta?

14. Si se supone que una de las matrices del Ejercicio 6.10.4 es la matriz de pagos de la jugadora II en un juego, entonces ésta tiene una estrategia pura que está fuertemente dominada por una estrategia mixta, pero no lo está por ninguna estrategia pura. ¿Cuál de las matrices A, B, C o D tiene esta propiedad? ¿Cuál es la estrategia pura dominada? ¿Cuál es la estrategia mixta dominante?

15. En un juego, la matriz de pagos del jugador I es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz no tiene puntos de silla y, por tanto, las estrategias de seguridad del jugador I son mixtas. Hallar el nivel de seguridad del jugador I y una estrategia de seguridad mixta para él.

16. Cualquier estrategia mixta es una estrategia de seguridad para el jugador I, si su matriz de pagos es la matriz D del Ejercicio 6.10.4. ¿Por qué es cierto esto? ¿Cuál es el nivel de seguridad del jugador I?

17. Explicar por qué para el jugador I el uso de la estrategia mixta $p = (1/3, 1/3, 1/3)^{\mathrm{T}}$ le garantiza una utilidad esperada de por lo menos 3, si su matriz de pagos es la C del Ejercicio 6.10.4. Demostrar que el uso de la cuarta estrategia pura de la jugadora II asegura que el jugador I consigue como mucho 3. ¿Cuál es el nivel de seguridad del jugador I? ¿Cuál es una estrategia de seguridad para el jugador I?

18. Hallar las estrategias de seguridad del jugador I cuando su matriz de pagos es la B del Ejercicio 6.10.4.

Mates 19. Sea $p = (1 - x, x)^{\mathrm{T}}$ y $q = (1 - y, y)^{\mathrm{T}}$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant 1$. Si la matriz de pagos del jugador I es la B del Ejercicio 6.10.4, demostrar que, si usa la estrategia mixta p y la jugadora II usa la estrategia mixta q, la utilidad esperada del jugador I viene dada por

$$\Pi_1(p, q) = f(x, y) = 1 + 3x + 2y - 4xy.$$

Hallar los valores de (x, y) para los cuales $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Explicar por qué estos valores son puntos de silla de la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. Relacionar esta conclusión con la respuesta al Ejercicio 6.10.18.

Mates 20. La matriz de pagos del jugador I en un juego finito de dos jugadores es A. Explicar por qué una de sus estrategias mixtas $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a alguna estrategia mixta de la jugadora II si y sólo si

$$\exists\, q \in Q \;\forall p \in P \quad (\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant p^{\mathrm{T}}Aq),$$

donde P es el conjunto de estrategias mixtas del jugador I y Q es el conjunto de estrategias mixtas de la jugadora II[32]. ¿Por qué la proposición anterior es equivalente a

$$\min_{q \in Q} \max_{p \in P_0} p^{\mathrm{T}}Aq \leqslant 0,$$

donde $p_0 = \{p - \tilde{p} : p \in P\}$?

Mates 21. Con la notación del Ejercicio 6.10.20, explicar por qué la estrategia mixta $\tilde{p}$ del jugador I está fuertemente dominada (posiblemente por una estrategia mixta) si y sólo si

$$\exists\, p \in P \;\forall\, q \in Q \quad (p^{\mathrm{T}}Aq > \tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq).$$

Deducir que $\tilde{p}$ *no* está fuertemente dominada si y sólo si[33]

$$\forall\, p \in P \;\exists\, q \in Q \quad (p^{\mathrm{T}}Aq \leqslant \tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq).$$

¿Por qué es esta segunda afirmación equivalente a

$$\max_{p \in P_0} \min_{q \in Q} p^{\mathrm{T}}Aq \leqslant 0?$$

---

[32] Los símbolos «$\exists\, q \in Q$» significan «existe un q en el conjunto Q tal que». Los símbolos «$\forall\, p \in P$» significan «para cualquier p del conjunto P». Si no se está familiarizado con estos símbolos, es recomendable saltarse los Ejercicios 6.10.20 a 6.10.22.

[33] ¿Por qué es cierto que «no ($\exists\, p \;\forall\, q$ ...)» es equivalente a «$\forall\, p \;\exists\, q$ (no...)»?

Mates 22. Utilizar los Ejercicios 6.10.20 y 6.10.21 para demostrar que una estrategia mixta en un juego finito de dos jugadores es una respuesta óptima a alguna estrategia mixta elegida por su oponente si y sólo si no está fuertemente dominada. Será necesario utilizar el teorema del minimax de Von Neumann[34].

23. John y Mary anuncian simultáneamente si apuestan o no sobre el resultado de una elección a la que sólo se presentan un republicano y un demócrata. Si ambos apuestan, John pagará a Mary 10 dólares si gana el republicano, y Mary pagará a John 10 dólares si gana el demócrata. En los demás casos nadie paga nada a nadie.
   a) Si ambos son neutrales al riesgo y asignan la misma probabilidad al suceso de que gane el republicano, explicar por qué el juego es de suma cero.
   b) Si ambos son neutrales al riesgo, pero John cree que el demócrata ganará con probabilidad 5/8 y Mary cree que el republicano ganará con probabilidad 3/4, explicar por qué el juego no es de suma cero. (Véase el Ejercicio 2.6.5.)
   c) Si ambos asignan la misma probabilidad al suceso de que el republicano gane y ambos son estrictamente aversos al riesgo, explicar por qué el juego no es de suma cero.

24. En la versión de la ruleta de Gale del Ejercicio 3.7.15, supongamos que el jugador I es amante del riesgo con las preferencias sobre el dinero dadas por la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del Ejercicio 3.7.16. ¿Cuál ha de ser la función de utilidad de la jugadora II para que el juego sea de suma cero? ¿Cuáles son las estrategias de seguridad de los jugadores en este juego? (Véase Ejercicio 4.8.28.)

   ¿Puede ser que tanto el jugador I como la jugadora II sean amantes del riesgo, si el juego es de suma cero? ¿Puede ser que ambos sean aversos al riesgo?

25. El juego del duelo de la Sección 2.4 se llama a veces duelo ruidoso para distinguirlo del duelo silencioso. Este es el mismo juego, excepto que las pistolas no hacen ruido al disparar y ninguno de los duelistas sabe si en un momento dado su oponente ha disparado ya (excepto si le han tocado, por supuesto). En la Sección 6.5.2 vimos que el duelo ruidoso es un juego de suma 1. Suponiendo que los jugadores continúan interesados en maximizar su probabilidad de sobrevivir, ¿es esto cierto del duelo silencioso?

Mates 26. La matriz de pagos del jugador I en un juego de suma cero es A. ¿Por qué no le importaría ser la jugadora II en un juego de suma cero con matriz de pagos $-A^T$? Decimos que una matriz es antisimétrica si $A = -A^T$. ¿Por qué se dice que un juego con una matriz de pagos antisimétrica es «simétrico»? Demostrar que el valor de un juego así es necesariamente cero.

[34] Con P sustituido por P_0. *Cognoscenti* reconocerán la relevancia de este problema para la noción de «racionalizabilidad».

27. Hallar los valores de los juegos de suma cero que tienen las siguientes matrices de pagos usando el método de la Sección 6.4.2. Comprobar que el método de la Sección 6.6.2 proporciona las mismas respuestas.

a) $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 7 & 1 & -3 \\ -10 & 4 & -8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Hallar todas las estrategias de seguridad para ambos jugadores. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash para estos juegos?

28. Hallar los valores y todas las estrategias de seguridad de los juegos matriciales siguientes usando el método de la Sección 6.6.2.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

29. Hallar el valor y por lo menos una estrategia de seguridad para cada jugador en cada uno de los siguientes juegos.

a) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ -7 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Mates 30. Una matriz 2×2 no tiene puntos de silla. Si A es la matriz de pagos del jugador I en un juego de suma cero, demostrar que:
   a) Un jugador que usa una estrategia de seguridad conseguirá el mismo pago haga lo que haga el oponente.
   b) Un jugador obtendrá el mismo pago haga lo que haga, en el supuesto de que el oponente use una estrategia de seguridad.

Mates 31. Una matriz 2×2 no tiene puntos de silla. Si A es la matriz de pagos del jugador I en un juego de suma cero, demostrar que el valor del juego viene dado por $v = \{e^T A^{-1} e\}^{-1}$, donde $e = (1, 1)^T$.

32. Hallar los valores de los siguientes juegos aprovechando cualquier simetría que contengan.

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mates 33. Sean $(\tilde{p}, \tilde{q})$ y $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ dos equilibrios de Nash para un juego de suma cero con dos jugadores de matriz A. Demostrar que los dos equilibrios de Nash son equivalentes e intercambiables (Sección 1.9.2). (Basta con probar que $(\tilde{p}, \tilde{Q})$ es un equilibrio de Nash y que $\tilde{p}^{\mathrm{T}}A\tilde{q} = \tilde{P}^{\mathrm{T}}A\tilde{Q}$.)

Fun 34. El coronel Blotto[35] dispone de cuatro compañías que puede distribuir entre dos posiciones de tres formas distintas: (3, 1), (2, 2) y (1, 3). Su oponente, el conde de Baloney, tiene tres compañías que puede distribuir entre las dos mismas posiciones de dos maneras: (2, 1) y (1, 2). Supongamos que Blotto manda m_1 compañías a la posición 1 y que Baloney manda n_1 compañías a la posición 1. Si $m_1 = n_1$, el resultado es un punto muerto y cada jefe obtiene un pago de cero por la posición 1. Si $m_1 \neq n_1$, la fuerza mayor derrota a la menor y no sufre pérdidas. Si $m_1 > n_1$, Blotto consigue un pago n_1 y Baloney un pago $-n_1$ por la posición 1. Si $m_1 < n_1$, Blotto consigue un pago $-m_1$ y Baloney consigue un pago m_1 por la posición 1. El pago total de cada jugador es la suma de los pagos en ambas posiciones.

Hallar la forma estratégica de este juego de jugadas simultáneas. Demostrar que no tiene puntos de silla. Determinar una estrategia mixta que sea un equilibrio de Nash.

Fun 35. Repetir el ejercicio anterior cuando Blotto dispone de 5 compañías y Baloney de 4. (Tal vez le interesará utilizar el truco de la Sección 6.7 por medio del cual la Figura 6.16 se redujo a la 6.17.)

[35] Este no es el coronel Blotto que conocimos en el Ejercicio 4.8.16. Existen muchas variantes del juego del coronel Blotto y la descrita en este ejercicio no es muy parecida en su estructura a la del Ejercicio 4.8.16.

Fun 36. Analizar el juego de los barcos de la Sección 6.7 suponiendo que Mary sólo dispone de tres bombas. Su objetivo es hundir el barco antes de que se le terminen las bombas. El objetivo de John es evitar que le hundan.

Mates 37. El juego de la inspección de la Sección 6.8 se modifica de manera que el Departamento puede inspeccionar *dos* días, a escoger libremente, de los n en los que el río puede ser contaminado. La empresa continúa necesitando *un* día de cada n para hacer sus vertidos contaminantes. Si el valor de este juego es un u_n, demostrar que, para $n \geqslant 3$,

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1} + 2},$$

donde $v_k = -1 + 2/k$, como en la Sección 6.8. Calcular el valor de valor de u_4 y hallar la probabilidad con que el Departamento debería inspeccionar en el primer día, si $n = 4$.

Fun 38. Las inteligencias del coronel Blotto y del conde de Baloney han de enfrentarse en un nuevo problema militar. Ahora Blotto manda dos compañías y Baloney sólo manda una. Cada uno de ellos quiere conquistar la posición del otro sin perder la suya propia. Cada día ambos escogen un número de compañías y las mandan a atacar la posición del enemigo. Si los defensores de una posición son inferiores en número a los atacantes, la posición es capturada. En los demás casos se llega a un punto muerto. Esto continúa durante n días, excepto si uno de los jefes consigue una victoria. Todo lo que no sea una victoria total no sirve para nada, y las compañías se retiran a su posición y abandonan cualquier posición ganada hasta el día siguiente.

Evaluando las derrotas a -1, las victorias a $+1$ y los puntos muertos a 0, determinar las estrategias óptimas para los dos jugadores, y calcular el pago esperado de Blotto al usar las estrategias óptimas.

Econ 39. Dibujar un esquema de las regiones de pagos cooperativos (Sección 5.3) para cada uno de los juegos de la Figura 6.24. Suponer posible la «libre eliminación» y la «utilidad transferible».

En cada caso, John y Mary pueden obtener cualquier par de pagos en la región cooperativa en la que pueden llegar a acuerdos. Una vez que han localizado un punto de desacuerdo, utilizarán la solución de negociación de Nash regular. Sin embargo, a priori no se da ningún punto de desacuerdo. Si no llegan a ponerse de acuerdo, tendrán que jugar el juego dado sin acuerdo. Como en la Sección 6.9, las negociaciones se abren con un compromiso irrevocable de cada jugador a usar una estrategia mixta en caso de no

3, 3	0, 6
6, 0	2, 1

1, 1	0, 2
2, 0	−2, −1

Figura 6.24. Juegos para el Ejercicio 6.10.39.

alcanzar un acuerdo. Para cada uno de los dos juegos dados, determinar cuál será el resultado final y qué amenazas proferirán los jugadores.

40. Odd Man Out es un juego de suma cero con tres jugadores. Los jugadores, que son neutrales al riesgo, escogen simultáneamente cara o cruz. Si todos eligen lo mismo, nadie paga. Si un jugador no elige lo mismo que los otros dos, les paga un dólar a cada uno. ¿Cuál es una estrategia de seguridad para un jugador en este juego? Hallar un equilibrio de Nash en el que ningún jugador usa su estrategia de seguridad. ¿Por qué la existencia de este equilibrio de Nash contrasta con la situación en el caso de dos jugadores?

41. En el juego de cartas de O'Neill, dos jugadores tienen, cada uno, la A, K, Q y J de un palo de una baraja. Ambos enseñan simultáneamente una carta. El jugador I gana si ambos enseñan una A o si las cartas enseñadas no tienen la misma letra. La jugadora II gana si ambos jugadores enseñan cartas con la misma letra (excepto que sea la A) o si uno enseña una A y el otro no.
    a) ¿Por qué se puede analizar este juego sin información suplementaria sobre las actitudes de los jugadores hacia el riesgo?
    b) Hallar la forma estratégica 4×4 del juego.
    c) Reducir la forma estratégica a una matriz 2×2 usando el truco de la Sección 6.7 por medio del cual la Figura 6.16 fue reducida a la 6.17.
    d) Hallar la estrategia mixta que es el único equilibrio de Nash del juego.

C A P I T U L O

7

Mantener el equilibrio

Libra es un signo del Zodiaco. Representa la balanza usada antiguamente para pesar. Por tanto, el término *equilibrio* significa algo así como «igualmente pesado». En teoría de juegos el tipo de equilibrio más importante es el equilibrio de Nash. Recordemos de la Sección 1.8.2 que (s, t) es un equilibrio de Nash si y sólo si s es una respuesta óptima a t y, simultáneamente, t es una respuesta óptima a s. Así, si el jugador I prevé que la jugadora II usará la estrategia t, y la jugadora II prevé que el jugador I usará la estrategia s, ninguno de los dos tendrá motivos para conducirse de otra forma que la prevista por su oponente. En este sentido sus predicciones están «equilibradas».

Este capítulo explora la idea de equilibrio de Nash con mayor profundidad que en capítulos anteriores. Empezaremos por observar que los equilibrios de Nash se dan donde se cortan las curvas de respuestas óptimas de los jugadores. Cada punto de corte corresponde a un equilibrio de Nash. ¿Cuál de estos equilibrios de Nash deberíamos seleccionar? La segunda dificultad se presenta cuando las curvas no se cortan. ¿Qué debemos hacer en un juego sin equilibrios de Nash? Nash demostró que el segundo problema no se puede dar en un juego finito. Su prueba descansa en el importante teorema del punto fijo de Brouwer. Es divertido redondear el capítulo mostrando esquemáticamente de qué forma el teorema de Brouwer se podría demostrar a partir del hecho de que los hexágonos no pueden terminar en empate.

7.1. Curvas de reacción

Los economistas usan la palabra *reacción* como sinónimo de lo que hasta ahora hemos llamado una respuesta óptima.

7.1.1. Curvas de reacción con estrategias puras

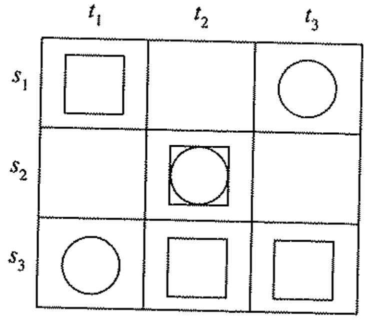
Consideremos la matriz de pagos para un juego de suma cero con dos jugadores que aparecen en la Figura 6.3(a) (la hemos repetido en la Figura 7.1(a)). Si ambos jugadores sólo pueden usar estrategias puras en este juego, el jugador I tiene la correspondencia de respuesta óptima $R_1 : T \to S$, y la jugadora II tiene la correspondencia de respuesta óptima $R_2 : S \to T$, definidas por

$$\begin{aligned} R_1(t_1) &= \{s_3\}, & R_2(s_1) &= \{t_1\} \\ R_1(t_2) &= \{s_2\}, & R_2(s_2) &= \{t_2\} \\ R_1(t_3) &= \{s_1\}, & R_2(s_3) &= \{t_2, t_3\} \end{aligned}$$

Esto significa, por ejemplo, que $R_1(t_1) = \{s_3\}$ es el conjunto de respuestas óptimas del jugador I a la elección de t_1 por la jugadora II. Análogamente,

	t_1	t_2	t_3
s_1	0	1	7
s_2	4	2	3
s_3	9	0	0

(a)



(b)

Figura 7.1. Curvas de reacción.

$R_2(s_3) = \{t_2, t_3\}$ es el conjunto de respuestas óptimas de la jugadora II a la elección de s_3 por el jugador I.

Obsérvese que R_1 y R_2 son lo que los economistas llaman *correspondencias*. *No* son funciones. El requisito para que $R_2 : S \to T$ sea una función es que para cada s en S, $R_2(s)$ esté únicamente definida como un *elemento* de T. Para una correspondencia, $R_2(s)$ no es un elemento[1], sino un *subconjunto* de T. Por ejemplo $R_2(s_3)$ es el subconjunto $\{t_2, t_3\}$. Tampoco t_2 como t_3 son respuestas óptimas a s_3.

La Figura 7.1(b) muestra las curvas de reacción de los jugadores I y II. La curva de reacción del jugador I es indicada por círculos y la de la jugadora II por cuadrados. La condición para que un par de estrategias (s, t) pertenezca a la curva de reacción del jugador I es que

$$s \in R_1(t).$$

Esto significa que s es una respuesta óptima del jugador I a la elección de t por la jugadora II. La condición para que un par de estrategias (s, t) pertenezca a la curva de reacción de la jugadora II es que

$$t \in R_2(s).$$

Esto significa que t es una respuesta óptima de la jugadora II a la elección de s por el jugador I.

Un par (s, t) de estrategias es un equilibrio de Nash si y sólo si

$$s \in R_1(t) \quad \text{y} \quad t \in R_2(s),$$

[1] Por esta razón escribimos $R_2(s_1)$ como $\{t_1\}$ en lugar de t_1. Los símbolos $\{t_1\}$ representan el *conjunto* cuyo único elemento es t_1. Aunque esto puede parecer una distinción pedante, es importante en según qué contextos. En este libro, sin embargo, la ignoraremos cuando no exista peligro de confusión.

de forma que s y t son respuestas óptimas una de otra. Los equilibrios de Nash se dan, por tanto, allí donde se cruzan las curvas de reacción. Así, para el juego de la Figura 7.1(a) existe un único equilibrio de Nash en (s_2, t_2).

Esto no es nada nuevo. Un esquema de círculos y cuadrados idéntico al de la Figura 7.1(b) aparece en la Figura 6.3(a). En la Sección 6.2.2 se explicó por qué el par (s_2, t_2) es un equilibrio de Nash haciendo observar que la casilla (s_2, t_2) contiene un círculo y un cuadrado. Y esto es exactamente lo que se requiere para que las curvas de reacción se corten en (s_2, t_2).

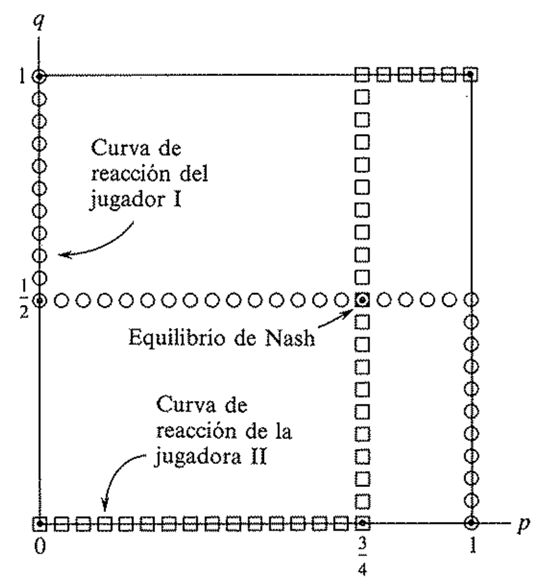
7.1.2. Curvas de reacción con estrategias mixtas

Hemos estado analizando el juego de la Figura 6.3(a). Los círculos y cuadrados de la Figura 6.3(b) muestran dos curvas de reacción para otro juego de suma cero con dos jugadores. Estas curvas de reacción no se cortan. Se sigue que este juego no tiene equilibrios de Nash, si los jugadores sólo pueden usar estrategias puras. Estas dificultades motivaron la introducción de las estrategias mixtas en el Capítulo 6.

Cuando se consideran estrategias mixtas, las curvas de reacción sólo se pueden dibujar fácilmente en el caso 2 × 2. Consideremos, por ejemplo, la matriz de pagos para un juego de suma cero con dos jugadores que aparece en la Figura 7.2(a). Este juego no tiene un equilibrio de Nash con estrategias puras, por lo que consideraremos estrategias mixtas.

	t_1	t_2
s_1	1	4
s_2	3	2

(a)



(b)

Figura 7.2. Curvas de reacción con estrategias mixtas.

Una estrategia mixta para el jugador I es un vector $(1 - p, p)^T$, donde $1 - p$ es la probabilidad con la que s_1 debe ser jugada y p es la probabilidad con la que s_2 debe ser jugada. Cada estrategia mixta del jugador I corresponde, por tanto, a un número real del intervalo $[0, 1]$. Análogamente, cada estrategia mixta de la jugadora II corresponde a un número real q del intervalo $[0, 1]$. Cada par de estrategias mixtas para ambos jugadores corresponde, por tanto, a un par (p, q) en el cuadrado de la Figura 7.2(b).

Si la jugadora II escoge la estrategia mixta que corresponde a q, entonces el pago esperado del jugador I cuando usa su primera estrategia pura es

$$E_1(q) = (1 - q) + 4q = 1 + 3q.$$

Si usa su segunda estrategia pura, su pago esperado es

$$E_2(q) = 3(1 - q) + 2q = 3 - q.$$

Por tanto, lo óptimo para él es responder con su primera estrategia pura si $q > 1/2$, porque esta desigualdad se cumple si y sólo si $1 + 3q > 3 - q$. Análogamente, es óptimo para él responder con su segunda estrategia pura si $q < 1/2$.

¿Qué hacer si $q = 1/2$? En este caso el jugador I es indiferente entre su primera y su segunda estrategia pura, luego cualquiera de ellas es una respuesta óptima a $q = 1/2$. Y no sólo esto, sino que cualquier combinación de su primera y segunda estrategias puras también es una respuesta óptima a $q = 1/2$. Esto sirve para ilustrar un principio que es con frecuencia muy útil:

> Una estrategia mixta es una respuesta óptima a algo, si y sólo si cada una de las estrategias puras a las que asigna probabilidad positiva también es una respuesta óptima a la misma cosa. Un jugador que optimiza por medio de una estrategia mixta será, por tanto, indiferente entre todas las estrategias puras a las que la estrategia mixta asigna probabilidad positiva.

La razón es simple. Nadie, en ningún caso, querría responder usando con probabilidad positiva una estrategia pura s si existe otra estrategia t que es definitivamente mejor que s. Siempre que tuviera que usar s, usted podría usar t en su lugar.

Resumiendo: La respuesta óptima del jugador I cuando $q < 1/2$ es usar su segunda estrategia pura. Esto corresponde a tomar $p = 1$. Su respuesta óptima cuando $q > 1/2$ es usar su primera estrategia pura. Esto corresponde a tomar $p = 0$. Cualquier estrategia mixta es una respuesta óptima cuando $q = 1/2$. Por tanto, la correspondencia de respuesta óptima viene dada por

$$R_1(q) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si} \quad 0 \leqslant q < 1/2, \\ [0, 1], & \text{si} \quad q = 1/2, \\ \{0\}, & \text{si} \quad 1/2 < q \leqslant 1. \end{cases}$$

La curva de reacción que representa esta correspondencia aparece representada por círculos pequeños en la Figura 7.2(b). Por ejemplo, el conjunto de respuestas óptimas del jugador I a $q = 1/3$ se halla determinando los valores de p en los cuales la recta horizontal $q = 1/3$ corta la curva de reacción del jugador I. En este caso, sólo $p = 1$ tiene esta propiedad. Así pues, $p = 1$ es la única respuesta óptima a $q = 1/3$.

La curva de reacción de la jugadora II se puede hallar de forma análoga. Si el jugador I usa la estrategia mixta que corresponde a p, entonces la jugadora II obtiene

$$E_1(p) = -(1 - p) + -3p = -1 - 2p,$$

si usa su primera estrategia pura, y

$$E_2(p) = -4(1 - p) + -2p = -4 + 2p$$

si usa su segunda estrategia pura. Su primera estrategia pura es, por tanto, su única respuesta óptima si $p < 3/4$, porque esta desigualdad se cumple si y sólo si $-1 - 2p > -4 + 2p$. Su segunda estrategia pura es su única respuesta óptima, si $p > 3/4$. Si $p = 3/4$, cualquiera de sus estrategias mixtas es una respuesta óptima. Por tanto, su correspondencia de respuesta óptima, $R_2 : [0, 1] \to [0, 1]$, viene dada por

$$R_1(p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si} \quad 0 \leqslant p < 3/4, \\ [0, 1], & \text{si} \quad p = 3/4, \\ \{1\}, & \text{si} \quad 3/4 < p \leqslant 1. \end{cases}$$

La curva de reacción que representa esta correspondencia aparece representada por pequeños cuadrados en la Figura 7.2(b). Por ejemplo, el conjunto de respuestas óptimas de la jugadora II a $p = 1/4$ se halla determinando los valores de q para los cuales la recta vertical $p = 1/4$ corta la curva de reacción de la jugadora II. En este caso, sólo $q = 0$ tiene esta propiedad. Así pues, sólo $q = 0$ es una respuesta óptima a $p = 1/4$.

Los equilibrios de Nash se dan allí donde se cortan las curvas de reacción. Según la Figura 7.2(b), es evidente que sólo $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (3/4, 1/2)$ corresponde a un equilibrio de Nash. Puesto que estamos considerando un juego de suma cero con dos jugadores, se sigue a partir del Capítulo 6 que $\tilde{p} = 3/4$ es una estrategia de seguridad para el jugador I, y que $\tilde{q} = 1/2$ es una estrategia de seguridad para la jugadora II.

7.1.3. Juegos para pájaros

Los juegos estudiados en las subsecciones precedentes son de suma cero, pero los mismos métodos se usan igualmente bien para todos los juegos con

(a)

	Paloma	Halcón
Paloma	$\frac{1}{2}V$, $\frac{1}{2}V$	0, V
Halcón	V, 0	W, W

(b) Dilema del prisionero

	Paloma	Halcón
Paloma	3, 3	0, $\boxed{6}$
Halcón	6, 0	1, $\boxed{1}$

(c) Gallina

	Paloma	Halcón
Paloma	1, 1	0, $\boxed{2}$
Halcón	2, $\boxed{0}$	−1, −1

Figura 7.3. Juegos de halcones y palomas.

dos jugadores[2]. Como ejemplo, consideremos el juego de halcones y palomas de la Figura 7.3(a). Este es el juego bimatricial estándar utilizado para introducir ideas evolutivas en el contexto de la teoría de juegos.

Dos pájaros de la misma especie compiten por un territorio cuyo valor en términos de adaptación evolutiva es V. Cada pájaro puede adoptar una estrategia de halcón o de paloma en un juego de jugada simultánea. Si ambos se comportan como palomas, se reparten el territorio. Si uno se comporta como paloma y el otro como halcón, el halcón se queda con el territorio. Si ambos se comportan como halcones, se produce una lucha. La adaptación evolutiva de un pájaro que tiene que luchar es W. Se supone normalmente que todos los pájaros tienen la misma probabilidad de vencer y así quedarse con el territorio. Sin embargo, una lucha tiene sus costes, porque hay un riesgo de daños. Así pues, $W = 1/2\ V - C$, donde C representa el coste de luchar.

En el Capítulo 9 diremos algo más acerca de este juego. Por el momento basta con observar que al elegir los parámetros $V = 6$ y $C = 2$ se obtiene una versión del que es, indudablemente, el más famoso de todos los juegos que a los especialistas de teoría de juegos les encanta citar. Se trata del dilema del prisionero, sobre el cual volveremos repetidamente en lo que queda de libro. Sin embargo, ahora mismo prestaremos más atención a un

[2] De hecho, estos métodos funcionan igualmente bien con cualquier número de jugadores. Si el conjunto de estrategias mixtas del jugador i es P^i, entonces P^{-i} con frecuencia se usa para designar el conjunto de vectores-estrategias disponibles a todos los jugadores excepto al jugador i. Por ejemplo, en un juego de tres jugadores, $P^{-2} = P^1 \times P^3$, y por tanto designa el conjunto de todos los vectores de la forma (p_1, p_3), donde p_1 es una estrategia mixta para el jugador I y p_3 es una estrategia mixta para el jugador III. Si $R_2 : P^{-2} \to P^{-2}$ es la correspondencia de respuestas óptimas de la jugadora II, entonces $R_2(p_1, p_3)$ representa el conjunto de respuestas óptimas de la jugadora II al uso de p_1 por el jugador I y de p_3 por el jugador III. Los equilibrios de Nash serán ternas en las cuales se corten las tres «superficies» de reacción que representan R_1, R_2 y R_3. Ninguna de las cosas que en este capítulo se dicen dejan de cumplirse en el caso de n jugadores. Nos limitamos a considerar el caso de dos jugadores para que las manipulaciones algebraicas sean manejables.

segundo juego llamado el gallina. Este se obtiene a partir del juego de palomas y halcones eligiendo los parámetros $V = 2$ y $C = 2$.

Tanto el dilema del prisionero como el gallina se presentan con pequeñas historias independientes de la que motiva en general el juego de palomas y halcones. Estas historias no deben ser tomadas en serio. Principalmente se usan para recordar cuáles son los pagos de los juegos. La historia que acompaña habitualmente al juego del gallina tiene que ver con ritos de virilidad adolescente. Su estructura estratégica, sin embargo, se adapta igualmente bien al juego que llevan a cabo de forma mortalmente serias hombres de negocios de mediana edad que conducen coches que se acercan frontalmente en una calle que es demasiado estrecha para que ambos puedan pasar sin riesgo de chocar, excepto si reducen la velocidad. Si uno de los jugadores se espanta y reduce su velocidad mientras el otro mantiene la velocidad, el jugador que la ha reducido pierde autoestima, mientras que el otro la gana. Si ambos reducen, su niveles iniciales de autoestima quedan inalterados. Si ninguno reduce, las consecuencias son desagradables para los dos[3].

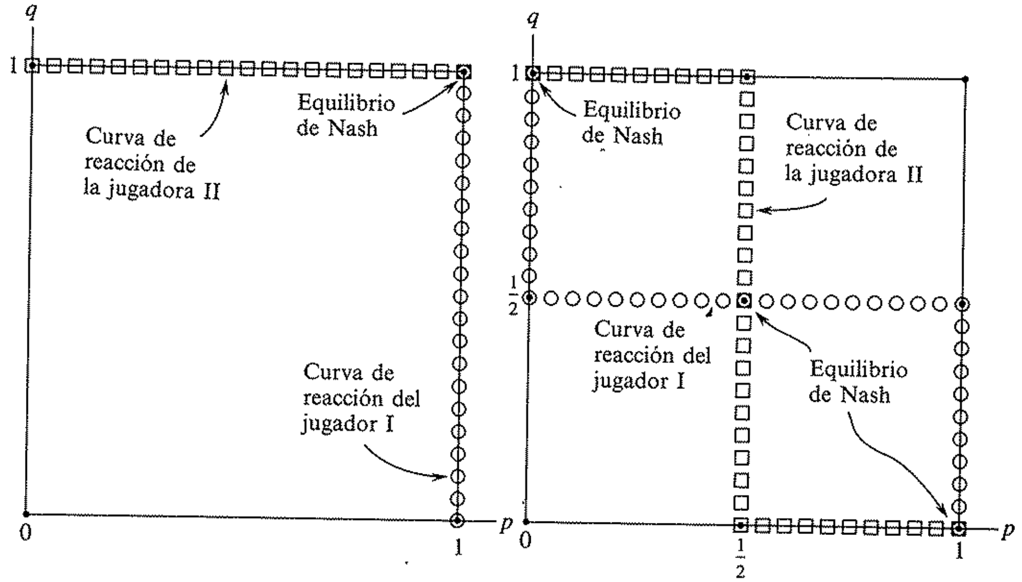
Las curvas de reacción para el dilema del prisionero y para el gallina cuando ambos jugadores se limitan a usar estrategias puras se han indicado con círculos y cuadrados en la Figura 7.3. Obsérvese que (*halcón, halcón*) es un equilibrio de Nash para el dilema del prisionero. El gallina tiene dos equilibrios de Nash con estrategias puras: (*halcón, paloma*) y (*paloma, halcón*). Pero no deberíamos contentarnos con estos equilibrios de Nash. Puede ser que obtengamos nuevos equilibrios de Nash al considerar estrategias mixtas. De hecho, puesto que los juegos tienen habitualmente un número impar de equilibrios de Nash, debemos considerar atentamente las estrategias mixtas del gallina. Por otra parte, no hallaremos más equilibrios de Nash para el dilema del prisionero, porque *paloma* está fuertemente dominada por *halcón*, y por tanto ningún jugador racional jamás elegirá jugar *paloma* con probabilidad positiva.

La Figura 7.4 muestra las curvas de reacción del dilema del prisionero y del gallina cuando se admiten estrategias mixtas. Estas curvas de reacción se han calculado como se ha indicado en la Sección 7.1.2. La única diferencia es que la matriz de pagos B de la jugadora II aquí ya no es igual a $-A$, como en los juegos de suma cero con dos personas.

En el dilema del prisionero las curvas de reacción sólo se cortan donde $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (1, 1)$. Esto confirma que el único equilibrio de Nash es que los dos jugadores jueguen *halcón*.

En el gallina, las curvas de reacción se cortan en tres puntos: donde $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (0, 1)$, donde $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (1, 0)$ y donde $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (1/2, 1/2)$. La primera y la segunda de estas alternativas son los equilibrios de Nash con estrategias puras que ya habíamos localizado. La tercera alternativa es un equilibrio de

[3] Es una lástima que esta versión de la historia requiera confundir una gallina y una paloma, pero la mayoría de lectores de este libro deben ser gente de ciudad que no distinguen demasiado entre aves domésticas.



Dilema del prisionero

(a)

Gallina

(b)

Figura 7.4. Las curvas de reacción para el dilema del prisionero y el gallina.

Nash con estrategias mixtas en el que ambos jugadores usan *halcón* y *paloma* con probabilidad 1/2.

Obsérvese que la curva de reacción del jugador I para el gallina es vertical cuando la jugadora II usa $\tilde{q} = 1/2$. Análogamente, la curva de reacción de la jugadora II es horizontal cuando el jugador I usa $\tilde{p} = 1/2$. Estas observaciones ilustran el hecho que un jugador será necesariamente *indiferente* entre todas las estrategias puras que él o ella puede usar con probabilidad positiva cuando se usa un equilibrio de estrategias mixtas. Esto puede ser útil en muchas ocasiones para hallar un equilibrio mixto sin tener que construir previamente las correspondencias de respuestas óptimas.

Por ejemplo, para hallar el equilibrio mixto de Nash en el gallina, sólo necesitamos buscar el valor de $\tilde{p}$ que hace que el jugador I sea indiferente entre *paloma* y *halcón*, y el de $\tilde{q}$ que hace que la jugadora II sea indiferente entre *paloma* y *halcón*. Estas condiciones conducen a las ecuaciones

$$1(1 - \tilde{p}) + 0\tilde{p} = 2(1 - \tilde{p}) + (-1)\tilde{p},$$
$$1(1 - \tilde{q}) + 0\tilde{q} = 2(1 - \tilde{q}) + (-1)\tilde{q}.$$

Estas ecuaciones admiten la solución única $\tilde{p} = \tilde{q} = 1/2$.

7.1.4. Estrategias mixtas en el gallina

Filo 7.2 →

Excepto si se dispone de algún factor extraño que rompe la simetría, un especialista en teoría de juegos no puede recomendar ninguno de los dos equilibrios de Nash puros para el gallina, porque cualquier argumento en favor de uno es un argumento igualmente bueno en favor del otro. Por otra parte, en la Sección 1.8.1 vimos por qué es contraproducente recomendar algo que no es un equilibrio de Nash. Si nuestro especialista ha de recomendar algo, parece que no queda otra opción que recomendar el equilibrio de Nash de estrategias mixtas. Pero este es un razonamiento completamente negativo. ¿Se puede decir algo positivo acerca del equilibrio mixto?

La defensa hecha en el Capítulo 6 del uso de equilibrios de Nash con estrategias mixtas en juegos de suma cero con dos personas es aquí insuficiente. En aquellos juegos una estrategia de equilibrio es necesariamente una estrategia de seguridad. El usarla asegura al jugador por lo menos su nivel de seguridad. Ya que un jugador no puede prever razonablemente que conseguirá más que eso en un juego de suma cero con dos jugadores, este es un buen argumento positivo para un jugador que dude de lo acertado de la recomendación del especialista en teoría de juegos[4].

Para el especialista, es tentador aducir que un libro de teoría de juegos no necesita incluir defensa alguna del equilibrio de Nash que recomienda. Pero esta actitud patriarcal deja frío al jugador I que lee el libro y se da cuenta de que todas sus estrategias para el gallina son igualmente buenas si su oponente sigue la recomendación del libro y usa la estrategia de equilibrio mixto que se le asigna. Si el jugador I confía en que la jugadora II seguirá la recomendación del libro, él podría desviarse y jugar cualquier estrategia que se le antoje[5]. Pero entonces debe preguntarse si es efectivamente razonable suponer que la jugadora II seguirá el consejo del libro cuando él mismo no encuentra razones para hacerlo.

Estas consideraciones exponen por qué no se pueden introducir los equilibrios de Nash basándolos sólo en las recomendaciones que los especialistas en teoría de juegos pueden escribir sobre cómo jugar un juego que se juega una sola vez. En el Capítulo 9, discutiremos situaciones en las que surgen equilibrios de Nash mixtos como consecuencia de que los jugadores aprenden a jugar mejor en una larga sucesión de *repeticiones* del mismo juego[6]. De momento tal vez sea suficiente observar que un equilibrio de Nash no tiene por qué ser interpretado ingenuamente como una orden

[4] El Ejercicio 6.10.40 proporciona un ejemplo de un juego de suma cero con tres jugadores, *Odd Man Out*, en el cual las estrategias de equilibrio no son necesariamente estrategias de seguridad. El gallina es un juego bimatricial que no es de suma cero. Los niveles de seguridad de los jugadores son ambos 0, y se los aseguran jugando *paloma*. Pero (*paloma*, *paloma*) no es un equilibrio de Nash. Además, cada jugador consigue un pago de 1/2 cuando usa el equilibrio de Nash mixto.

[5] En los Ejercicios 7.9.29 y 7.9.30 este problema es incluso más grave que en el gallina.

[6] La Sección 6.1 ya apunta a una situación así al motivar las estrategias mixtas por medio del ejemplo de los faroles en una larga sucesión de juegos de póquer.

inequívoca sobre cómo jugar un juego. Por el contrario puede ser considerado como describiendo las probabilidades que jugadores racionales pueden asignar razonablemente a las acciones que sus oponentes pueden adoptar[7]. Así, $(\tilde{p}, \tilde{q})$ se convierte en un par de *predicciones* en lugar de un par de *recetas*. El libro de teoría de juegos ya no dice qué es lo que los jugadores deben *hacer*: sólo lo que deben *creer*. Esto a veces no es muy útil, como cuando se dice a un jugador del gallina que ha de considerar la elección de *halcón* o *paloma* por parte de su oponente como igualmente probables. Pero estos consejos anodinos son probablemente los únicos que pueden ser ofrecidos en ausencia de información extra sobre las circunstancias en las que se juega el juego.

7.2. Oligopolios y competencia perfecta

Econ 7.3 →

Los economistas se entusiasman con las virtudes de la competencia perfecta en oposición a la competencia imperfecta. Un análisis completo de las razones en que se basa su entusiasmo escapa a los límites de este libro. Sin embargo, de esta sección, que está dedicada a analizar con ayuda de la teoría de juegos algunos modelos muy simples de competencia imperfecta, se puede entresacar una ligera idea de los argumentos que usan. Esta es un área muy importante en la que los conceptos de la teoría de juegos han revolucionado la manera de pensar acerca de algunos problemas económicos.

7.2.1. *Modelos de Cournot*

Los *widgest** son cosas pequeñas y novedosas producidas a un coste de c dólares cada uno. Mucha gente comprará unos pocos *widgets* cada uno, si el precio no es muy alto. La conducta de estos consumidores potenciales se describe en este ejemplo por la ecuación de demanda[8]

$$p + q = M,$$

[7] No necesariamente hemos de ver a un jugador como si tomara opciones al azar. Su elección puede estar completamente determinada desde el punto de vista del jugador, pero no tiene por qué ser visto de esta forma por su oponente. Por ejemplo, las decisiones acerca de cuándo devaluar una moneda son tomadas por «expertos» que con seguridad no tiran monedas al aire en sus deliberaciones. Sin embargo, sus decisiones son difíciles de predecir porque los especuladores no saben qué datos condicionarán las decisiones de los «expertos». Estas historias de «purificación» son más convincentes cuando van acompañadas de los detalles de *cómo* se llega a la elección final y *por qué* este proceso no es plenamente conocido por el oponente. El modelo conocido que mejor satisface estos criterios ha sido propuesto por Harsany y lo discutiremos en la Sección 11.6.

* *Widget* es una palabra inventada por el autor sin ningún significado en inglés (*N. del T.*).

[8] Sólo consideraremos precios y cantidades en el intervalo $[0, M]$. Se debe tener presente, sin embargo, que los economistas con frecuencia hablan de demanda «lineal» incluso cuando se aceptan precios $p > M$, aunque la cantidad q entonces pedida siempre será cero y la curva de demanda necesariamente se doblará en $(q, p) = (0, M)$.

donde M es un número mucho mayor que c. Si el precio de un *widget* es p dólares, la ecuación de demanda nos dice que el número de *widget* vendidos será $q = M - p$.

Suponemos muy pocas cosas sobre los consumidores y concentraremos nuestra atención en los productores. Los economistas hablan de competencia perfecta cuando existe un gran número de empresas, la producción de cada una de las cuales tiene un efecto insignificante en el mercado. Una empresa así no tiene por qué preocuparse acerca del impacto de su propia producción sobre el precio de venta de los *widgets*. En una situación de oligopolio, sin embargo, las cosas no son tan simples.

Un oligopolio es un sector productivo con n productores, cada uno de los cuales tiene unas dimensiones apreciables. Ninguna empresa puede entonces no prestar atención al efecto que sus propias decisiones sobre producción tienen sobre el precio de mercado. Se da un monopolio cuando $n = 1$. Este caso no es muy interesante desde el punto de vista de la teoría de juegos, pero será útil analizarlo para poder así tener un elemento de comparación.

Monopolio. ¿Cuántos *widgets* producirá un monopolista, si su objetivo es maximizar beneficios? Sería estúpido por su parte producir más *widgets* de los que puede vender al precio que se propone fijar. Si produce q *widgets* los venderá al precio $p = M - q$, porque este es el mayor precio al que todos serán vendidos[9].

El beneficio es siempre la diferencia entre los ingresos obtenidos al vender lo producido y el coste de producirlo. El beneficio del monopolista es, pues,

$$\pi(q) = pq - cq = (p - c)q = (M - q - c)q.$$

Para hallar la producción $\tilde{q}$ que maximiza el beneficio, derivamos $\pi(q)$ e igualamos la derivada a cero. Puesto que

$$\frac{d\pi}{dq} = M - c - 2q,$$

el beneficio se maximiza cuando $\tilde{q} = 1/2(M - c)$. El precio es entonces $\tilde{p} = 1/2(M + c)$ y el beneficio máximo es $\pi = \{1/2(M - c)\}^2$.

Duopolio. Consideremos ahora el caso en el que hay dos productores. Entonces se dice que la industria del *widget* es un *duopolio*. Para este caso especial, el economista francés Cournot anticipó la idea de un equilibrio de

[9] A veces un monopolista puede *discriminar por medio del precio*, vendiendo la misma cosa a gente distinta a precios distintos. Las líneas aéreas, por ejemplo, venden pasajes más baratos a los estudiantes que a los profesores. Sin embargo, en este ejemplo la empresa debe vender todos los *widgets* al mismo precio.

Nash hace más de un siglo. Por ello, los economistas a veces hablan de un equilibrio de Cournot-Nash para referirse a lo que en este libro llamamos un equilibrio de Nash.

En el modelo de Cournot, ambos productores deciden cuál será su producción ignorando qué ha decidido el otro. El precio al que se venden los *widgets* queda entonces determinado por la demanda de *widgets*. El precio, esto es, se va ajustando hasta que la oferta iguala a la demanda. La oferta es simplemente el número total $q = q_1 + q_2$ de *widgets* producido. La demanda de *widgets* cuando el precio es p es $M - p$. Luego el precio al que se venden los *widgets* satisface

$$p = M - q_1 - q_2$$

Al modelizar la situación como un juego, las dos empresas se convierten en jugadores I y II. Estos juegan un juego de jugadas simultáneas en el que cada jugador escoge un número q_i del intervalo $[0, M]$. Los pagos de los jugadores en el juego se identifican con sus beneficios. Por tanto, las funciones de pagos son

$$\pi_1(q_1, q_2) = (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2)q_1,$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2)q_2.$$

El juego es infinito porque el conjunto de estrategias de cada jugador es infinito. Puesto que se pueden obtener respuestas muy directas por medio del cálculo infinitesimal, estos juegos no son necesariamente más difíciles de analizar que los juegos finitos. En este caso, por ejemplo, es fácil calcular el único equilibrio de Nash $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$.

Para hallar las respuestas óptimas a la elección de q_2 por la jugadora II, el jugador I sólo necesita derivar su función de beneficios e igualar la derivada a cero. Ya que

$$\frac{\partial\pi}{dq_1} = M - c - 2q_1 - q_2,$$

el jugador I tiene una única respuesta óptima a q_2, es decir,

$$q_1 = R_1(q_2) = 1/2(M - c - q_2).$$

Obsérvese que es necesario diferenciar *parcialmente* respecto a q_1 manteniendo constante q_2 porque la elección del jugador I de q_1 es *independiente* de la elección de q_2 por la jugadora II. La curva de reacción[10] del jugador I se muestra en la Figura 7.5(a).

[10] Las curvas a trazos son las curvas de beneficio constante, o isobeneficio, del jugador I. A lo largo de una de estas curvas, el beneficio del jugador I es constante. Por ejemplo, $\pi_1(q_1, q_2) = 3$ es la curva a lo largo de la cual el beneficio del jugador I es siempre igual a 3. La ecuación

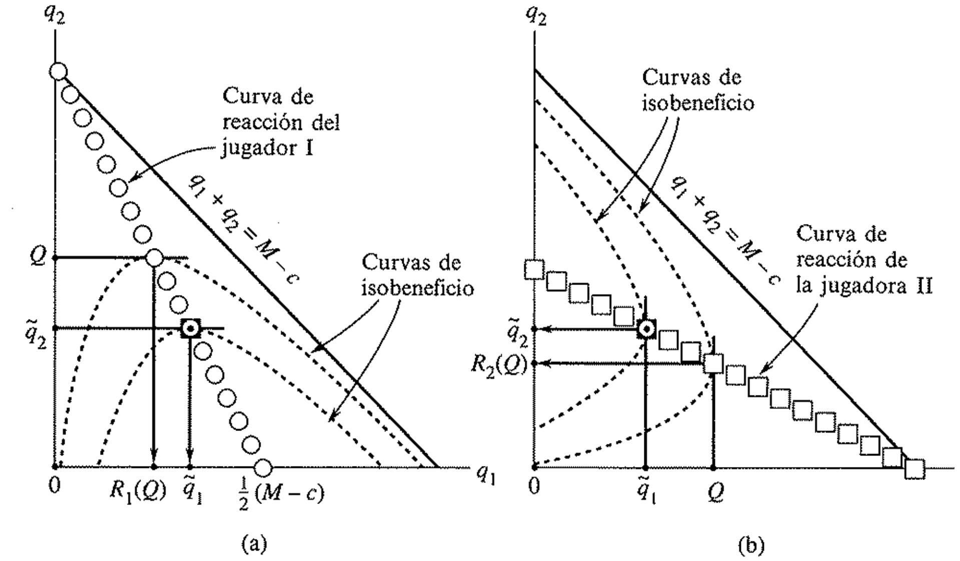


Figura 7.5. Duopolio de Cournot.

La curva de reacción de la jugadora II aparece en la Figura 7.5(b). Puesto que las cosas son simétricas, su ecuación se obtiene simplemente intercambiando q_1 y q_2 en la fórmula de $R_1(q_2)$. Así pues, la única respuesta óptima de la jugadora II a la elección de q_1 por el jugador I es

$$q_2 = R_2(q_1) = 1/2(M - c - q_1).$$

Los equilibrios de Nash se dan donde se cortan las curvas de reacción. Para hallar $\tilde{q}_1$ y $\tilde{q}_2$, debemos resolver las ecuaciones $q_1 = R_1(q_2)$ y $q_2 = r_2(q_1)$ simultáneamente. Las dos ecuaciones son

$$2\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 = M - c,$$
$$\tilde{q}_1 + 2\tilde{q}_2 = M - c,$$

luego $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 1/3(M - c)$. (El Ejercicio 10.9.36 indica cómo se puede llegar a la misma conclusión con el método de la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas.)

de esta curva es $(M - c - q_1 - q_2)q_2 = 3$, y es, por tanto, una *hipérbola* de asíntotas $q_1 + q_2 = M - c$ y $q_2 = 0$. (Puede ser útil recordar que todas las hipérbolas de la forma $(ax + by + c)(Ax + By + C) = d$ tienen las mismas asíntotas. Estas se hallan por medio de la hipérbola degenerada de la familia, que se obtiene haciendo $d = 0$. Esta hipérbola degenerada consiste en el par de rectas $ax + by + c = 0$ y $Ax + By + C = 0$. Estas dos rectas son las asíntotas de la familia.) Obsérvese que cada recta horizontal $q_2 = Q$ es tangente a una curva de beneficio constante en $q_1 = R_1(Q)$. Esto es así porque, al calcular una respuesta óptima a $q_2 = Q$, el jugador I debe hallar el punto de $q_2 = Q$ en el que su beneficio es máximo.

Así pues, en el modelo de Cournot del duopolio existe un único equilibrio de Nash en el que cada jugador produce $1/3(M - c)$ *widgets*. Por tanto, el número total de *widgets* producido es $2/3(M - c)$ y el precio al que son vendidos es $\tilde{p} = M - 2/3(M - c) = 1/3M + 2/3\, c$. El beneficio de cada jugador es $\{1/3(M - c)\}^2$.

Oligopolio. Podemos repetir la historia del duopolio, pero con n jugadores en lugar de dos. En este caso la función de beneficios del jugador I es

$$\pi_1(q_1, q_2, \cdots, q_n) = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_1.$$

Los equilibrios de Nash se encuentran resolviendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \cdots + \tilde{q}_n &= M - c, \\ \tilde{q}_1 + 2\tilde{q}_2 + \cdots + \tilde{q}_n &= M - c, \\ &\vdots \\ \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \cdots + 2\tilde{q}_n &= M - c, \end{aligned}$$

Estas tienen la solución única

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \cdots = \tilde{q}_n = \frac{1}{n+1}(M - c)$$

Supongamos, por ejemplo, que $n = 9$. Entonces cada empresa produce $1/10\ (M - c)$ *widgets*. El número total de *widgets* producido es, pues, $9/10\ (M - c)$, y el precio al que son vendidos es $\tilde{p} = M - 9/10\ (M - c) = 1/10\ M + 9/10\ c$. El beneficio de cada jugador es $\{1/10(M - c)\}^2$.

Competencia perfecta. En un sector perfectamente competitivo, las empresas aceptan precios. Las empresas creen que no pueden hacer nada que afecte los precios a los que se venden los *widgets*. La razón es que $p = M - q$, donde q es el número total de *widgets* producidos, y se supone que ninguna empresa individual es capaz por sí sola de producir lo bastante como para modificar sensiblemente q. Por tanto, al intentar maximizar los beneficios

$$\pi(q) = (p - c)q,$$

las empresas tratan p como una constante $\tilde{p}$. Si $\tilde{p} < c$, el beneficio se maximiza no produciendo, y no habría ninguna empresa en este sector. Si $\tilde{p} > c$, el beneficio no puede ser maximizado, porque por mucho que produzca una empresa, aumentaría sus beneficios produciendo aún más. Pero una empresa que produjera una cantidad enorme no tendría un impacto insignificante sobre el precio del mercado. Luego el único valor de $\tilde{p}$ consistente con una historia de competencia perfecta es $\tilde{p} = c$. En un mercado

	Producción total	Precio	Beneficio total	Excedente del consumidor
Monopolio	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$	$\frac{1}{8}(M-c)^2$
Duopolio	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
Oligopolio	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$	$\frac{n^2}{2(n+1)^2}(M-c)^2$
Competición	$M-c$	$\mathbf{c}$	0	$\frac{1}{2}(M-c)^2$

Figura 7.6. Una comparación de distintas estructuras de mercado.

perfectamente competitivo el precio al que se venden los *widgets* es el precio de coste, y todas las firmas tienen cero beneficios.

Para comprobar la validez de este argumento más bien abstracto, consideremos qué ocurre cuando el número de empresas en un oligopolio se hace muy grande. Si $n \to \infty$ en el modelo anterior para el oligopolio, entonces el número de *widgets* producido converge hacia $M - c$, y el precio al que son vendidos converge hacia $\tilde{p} = c$. Cada una de las empresas obtiene entonces beneficio cero. Estas son exactamente las conclusiones obtenidas al considerar el caso ideal de la competencia perfecta.

La tabla de la Figura 7.6 compara los resultados de equilibrio para cada una de las estructuras de mercado consideradas en esta subsección[11]. Obsérvese cómo mejora la mayoría de consumidores a medida que el sector se hace más competitivo. El precio de los *widgets* baja y el número de *widgets* aumenta. Esto explica en buena medida por qué los economistas se entusiasman con las virtudes de los sectores perfectamente competitivos.

7.2.2. Detrás del líder

El tema principal de esta subsección es el modelo de duopolio de Stackelberg. La manera cómo los economistas discuten este tema puede ser muy confusa para los que ya saben un poco de teoría de juegos. Puede ser útil que comencemos por describir cómo un libro de texto estándar de economía

[11] Las casillas en la columna del *excedente del consumidor* muestran cuánto ahorran los consumidores en conjunto comparado con lo que tendrían que pagar a un monopolista que no tuviera que cobrar un mismo precio a todos los consumidores, sino que pudiera extraer de cada uno el máximo que estuvieran dispuestos a pagar por conseguir otro *widget* (véase Ejercicio 7.9.20). Los economistas consideran esta cantidad una medida de cómo son tratados los consumidores en regímenes distintos.

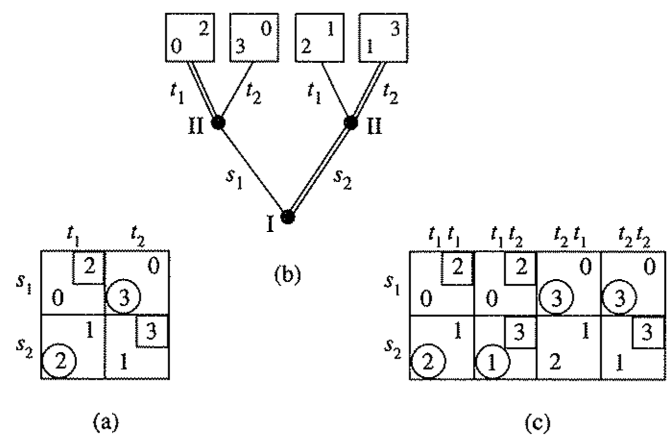


Figura 7.7. Detrás del líder.

presentaría el análisis de Stackelberg del simple juego bimatricial de la Figura 7.7(a).

Uno de los jugadores es llamado el *líder* y el otro el *seguidor*. Normalmente hay una gran diferencia entre el líder y el seguidor (como en los juegos de gato y ratón del Ejercicio 4.8.2). El jugador I será el líder y la jugadora II será el seguidor. Esto significa que el jugador I elige *primero* entre s_1 y s_2. *Después* de conocer su elección, la jugadora II escoge entre t_1 y t_2. Esta está *segura*, por tanto, de dar una respuesta óptima a todo lo que escoja el jugador I. Así, él trabaja en la hipótesis de que cualquiera que sea la fila que escoja, el resultado final será la casilla de esta fila en la que el pago de la jugadora está encerrado en un cuadrado. De las dos casilla (s_1, t_1) y (s_2, t_2) que gozan de esta propiedad, el jugador I prefiere esta última porque $1 > 0$. Por tanto escogerá s_2, a lo cual la jugadora II responderá con t_2. Los economistas llaman el par (s_2, t_2) un equilibrio de Stackelberg, en honor del economista alemán Von Stackelberg.

Es fácil dejarse confundir por este lenguaje, porque conduce a pensar que el juego bimatricial de la Figura 7.7(a) es la forma estratégica del juego que estamos estudiando. Pero *no* es así. En esta figura aparece la forma estratégica del juego de *jugadas simultáneas* en el que ambos jugadores toman una decisión ignorando la elección del otro. El par de estrategias (s_2, t_2) ciertamente no es un equilibrio de Nash de este juego de jugadas simultáneas. El juego de jugadas simultáneas no tiene ningún equilibrio de Nash con estrategias puras (Ejercicio 7.9.1).

Para hallar la forma estratégica del juego del líder y el seguidor cuyo equilibrio de Stackelberg es (s_2, t_2) una buena idea es empezar observando su forma extensiva[12], que aparece en la Figura 7.7(b). La jugadora II tiene

[12] La diferencia entre ésta y la forma extensiva del juego de jugadas simultáneas reside en que los dos nodos de decisión de la jugadora II no están encerrados en un conjunto de información (como en la Figura 4.3(a)).

dos nodos de decisión, en cada uno de los cuales puede elegir entre dos decisiones. Por tanto, dispone de $2 \times 2 = 4$ estrategias puras. Con la terminología de la Sección 1.3, las marcamos t_1t_1, t_1t_2, t_2t_1 y t_2t_2. Por ejemplo, t_2t_1 significa que hay que jugar t_2 si el jugador I usa s_1, y hay que jugar t_1 si el jugador I usa s_2. En el juego del líder y el seguidor, la elección de la jugadora II es, por tanto, una *función* que hace depender su elección de la elección hecha por el jugador I. En el juego de jugadas simultáneas, ambos jugadores eligen independientemente.

La forma estratégica 2×4 del juego del líder y el seguidor aparece en la Figura 7.7(c). El uso del algoritmo de Zermelo en la forma extensiva[13] muestra que el juego tiene un único equilibrio subjuego-perfecto (s_2, t_1t_2). Con la notación de la Sección 1.3, la partida que resulta al usar este equilibrio subjuego-perfecto es $[s_2t_2]$. Es esta *partida* del juego del líder y el seguidor es llamada un «equilibrio de Stackelberg» por los economistas[14].

Duopolio de Stackelberg. La diferencia entre el modelo de Stackelberg y el de Cournot sólo consiste en que en el primero el jugador I decide en primer lugar cuántos *widgets* va a producir. Por tanto es líder. La jugadora II observa la decisión que toma el jugador I, y entonces decide cuántos *widgets* producirá ella. Por tanto es la seguidora[15].

Al analizar el modelo, la consideración importante a tener presente es que una estrategia pura para la jugadora II es una *función* f: $[0, M] \to [0, M]$. Cuando el jugador I escoge q_i, entonces la jugadora contesta con

[13] O la observación de que (s_1, t_1t_2) es un único equilibrio de Nash para la forma estratégica.

[14] Sería menos confuso que hablaran de una «partida de Stackelberg». O aún mejor, podrían identificar Stackelberg con la situación «seguir a líder» y hablar de un equilibrio subjuego-perfecto en un *juego* de Stackelberg.

[15] En la literatura producida por economistas, estas historias aparecen a menudo complicadas por la reluctancia de los autores a comprometerse con un determinado conjunto de reglas que rijan las acciones de los agentes económicos. Por el contrario, los agentes aparecen condicionados por el mismo tipo de «conjetura» que ellos están haciendo sobre sus oponentes. Por ejemplo, en el juego de jugadas simultáneas usado antes para modelizar el duopolio de Cournot, las dos empresas toman decisiones de producción de una vez para siempre. No se les ofrece ninguna oportunidad posterior para revisar sus decisiones una vez que han observado la producción de la otra empresa. Sin embargo, el resultado de Cournot es defendido frecuentemente con una historia en la que las empresas pueden revisar su nivel de producción, si quieren hacerlo. La historia es que, al tomar la decisión inicial sobre la producción, los jugadores conjeturan que, si fueran a revisar su producción en un momento posterior, la empresa contraria no respondería en absoluto y mantendría su decisión de producción inicial. Si las empresas hacen estas *conjeturas de Cournot*, eligirán su producción.

La historia equivalente para el modelo de Stackelberg atribuye conjeturas de Cournot la jugadora II, pero *conjeturas de Stackelberg* al jugador I. Se supone que éste cree que la jugadora II es tan flexible que responderá a cualquier variación de la producción del I con un cambio inmediato a la respuesta óptima.

Los especialistas en teoría de juegos desconfían normalmente de estas historias porque se puede defender casi cualquier resultado con tal de ser suficientemente ingenioso a la hora de suponer «variaciones conjeturales» para los agentes. Los especialistas piensan que los que proponen teorías de «variación conjetural» tienen la obligación de explicar por qué la irracionalidad que atribuyen a sus agentes es más plausible que todas las demás irracionalidades de que es víctima la especie humana.

	Producción total	Precio	Beneficio total	Excedente del consumidor
Stackelberg	$\frac{3}{4}(M-c)$	$\frac{1}{4}M+\frac{3}{4}c$	$\frac{3}{16}(M-c)^2$	$\frac{9}{32}(M-c)^2$

Figura 7.8. El modelo de Stackelberg del duopolio.

una producción $q_2 = f(q_1)$ para cada q_1. Su estrategia pura óptima, por tanto, es la función $R_2 : [0, M] \to [0, M]$. El jugador I sabe que la jugadora II elegirá R_2, y puede anticipar un beneficio de

$$\pi_1(q_1, R_2(q_1))$$

al elegir q_1. Puesto que él es un maximizador de beneficios, elegirá la producción $\tilde{q}_1$ que maximiza esta cantidad. Por tanto, el «equilibrio de Stackelberg» será $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ donde $\tilde{q}_2 = R_2(\tilde{q}_1)$.

Al analizar el modelo de Cournot ya hemos hecho todos los cálculos necesarios. Puesto que $R_2(q_1) = 1/2(M - c - q_1)$ y $\pi_1(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_1$, el jugador I tiene que maximizar

$$(M - c - q_1 - R_2(q_1))q_1 = 1/2(M - c - q_1)q_1$$

Este valor para el beneficio del líder de Stackelberg es siempre exactamente igual a la mitad de lo que conseguiría un monopolista que produjera q_1. El jugador I, por tanto, tomará la misma decisión sobre producción, $\tilde{q}_1 = 1/2(M - c)$, que un monopolista. La producción de la jugadora II es ahora $\tilde{q}_2 = R_2(\tilde{q}_1) = 1/4(M - c)$. La producción total es, por tanto, $3/4(M - c)$, y los *widgets* se venden a precio $\tilde{p} = 1/4M + 3/4\, c$. La Figura 7.8, que hay que comparar con la Figura 7.6, indica por qué los consumidores prefieren un duopolio de Stackelberg a un duopolio de Cournot.

7.3. Selección de equilibrios

Ocurre con frecuencia que las curvas de reacción de los jugadores se cortan varias veces. En este caso el juego tendrá más de un equilibrio de Nash. ¿Cuál de ellos debe ser elegido?

A veces la respuesta adecuada es que la pregunta está mal planteada. Por ejemplo, el juego del ultimátum que estudiamos en la Sección 5.8.1 tiene muchos equilibrios de Nash, pero el problema importante no es cuál de ellos debemos elegir. En este juego, sólo equilibrios subjuego-perfectos tienen sentido para jugadores racionales, y el juego del ultimátum tiene un único equilibrio subjuego-perfecto.

La sección presente, sin embargo, está dedicada al problema de la selección de equilibrios cuando éste no se soluciona de la forma que acabamos de indicar[16].

7.3.1. Intercambiabilidad y equivalencia

Algunas veces, no importa qué equilibrio se escoge. Esto ocurre cuando todos los equilibrios de Nash son intercambiables y equivalentes. Recordemos de la Sección 1.9.2 que dos equilibrios de Nash (s, t) y (s', t') son *equivalentes* si $\pi_1(s, t) = \pi_1(s', t')$ y $\pi_2(s, t) = \pi_2(s', t')$. Puesto que ambos jugadores consiguen lo mismo en ambos equilibrios, ninguno se preocupará de cuál es el seleccionado. Dos equilibrios de Nash (s, t) y (s', t') son *intercambiables* si (s, t') y (s', t) también son equilibrios de Nash.

Si los equilibrios de Nash de un juego tienen la propiedad de que todos los pares son equivalentes e intercambiables, entonces el problema de la selección desaparece. Incluso si Von Neumann hubiera escrito un libro para recomendar el equilibrio (s, t) y Morgenstern hubiera escrito un libro opuesto para recomendar el equilibrio (s', t'), su falta de acuerdo no preocuparía en absoluto a los jugadores. Si el jugador I sigue a Von Neumann, jugará s. Si la jugadora II sigue a Morgenstern, jugará t'. El resultado será el par equilibrio de Nash (s, t') que asigna a cada jugador exactamente el pago que habían anticipado.

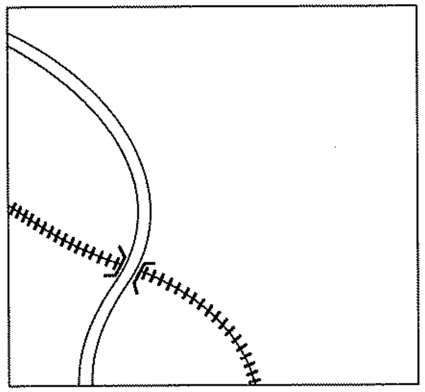
El Teorema 6.5.2 muestra que los equilibrios de Nash de un juego de suma cero con dos jugadores son necesariamente intercambiables y equivalentes, pero esto ocurre muy raramente en los demás casos.

7.3.2. Convenciones

Dos saboteadores son lanzados en paracaídas sobre territorio enemigo. Al saltar, quedan separados inesperadamente. Para el éxito de su misión, sin embargo, es esencial que se reúnan nuevamente. Si usted fuera uno de ellos, intentando reunirse con su colega, ¿a qué punto del mapa de la Figura 7.9(a) se dirigiría? Casi todo el mundo contesta que iría al puente. Esto es lo que Schelling[17] llama un *punto focal.*

[16] Algunos especialistas en teoría de juegos mantienen que el problema de la selección de equilibrios casi siempre se puede solventar reemplazando la idea de equilibrio de Nash por alguna noción de equilibrio más refinada. Sin embargo, no existe consenso sobre cuál debe ser el refinamiento adecuado, excepto en algunos casos simples. Esta es una de las razones por las que este libro se ocupa poco de otros refinamientos que no sean la noción de equilibrio subjuego-perfecto. Hay material suficiente para escribir un libro sin necesidad de entrar en temas polémicos.

[17] Uno de los ensayos en imperecedero *Strategy of Conflict* contiene muchos ejemplos ingeniosos e instructivos de este tipo.



	0 / 0	1 / 1
	1 / 1	0 / 0

(a) (b)

Figura 7.9. Puntos focales.

En el argot de la Sección 1.9.1, los saboteadores están jugando un juego en equipo. Cada uno escoge un lugar sobre el mapa. Podemos considerar entonces que ambos obtienen un pago victorioso de 1 si eligen el mismo lugar, y un pago perdedor de 0 en caso contrario. Sus objetivos son, por tanto, idénticos. Ya que sus objetivos no entran en absoluto en conflicto, su problema es uno de *coordinación pura.*

La Figura 7.9(b) muestra un juego más simple de coordinación pura. Como en el juego de los saboteadores, los equilibrios de Nash de estrategias puras son equivalentes, pero no intercambiables. Sin embargo, aquí no hay ningún punto focal evidente. Tampoco no tiene sentido observar la estructura del juego propiamente dicho para buscar una razón para seleccionar un equilibrio en lugar de otro. Para hallar un punto focal, es necesario buscar pistas, no en el juego propiamente dicho, sino en la situación del mundo real de la cual el juego ha sido abstraído[18].

Afortunadamente, las sociedades humanas tienen abundantes *convenciones* que existen precisamente con este propósito. En puridad, estas convenciones son completamente arbitrarias. La gente no queda en el «punto de reunión» de un aeropuerto porque piensa que allí la reunión será más placentera, sino porque es convencional hacerlo. Lo mismo se puede decir de otras convenciones como «conducir por la derecha»[19] o «poner cosas en orden alfabético».

[18] Recordemos que en la Sección 1.9.2 elaboramos una analogía entre la elección de un equilibrio en un juego y la elección de una raíz de una ecuación de segundo grado.

[19] Aunque algunos creen que «conducir por la derecha» más que arbitrario es perverso. Los británicos, por ejemplo, dicen que es razonable conducir por la izquierda porque los diestros pueden mantener la mano y el brazo que dominan más en el volante mientras usan la zurda para cambiar las marchas. Sin embargo, conducir por la derecha es ciertamente perferible a la convención de elegir el equilibrio mixto en el que se elige al azar el lado de la carretera por el que se conduce.

	Derecha	*Izquierda*
Izquierda	1 / 1	2 / 0
Derecha	0 / 2	−1 / −1

(a)

	t_1	t_2
s_1	10 / 10	x / 0
s_2	0 / x	x / x

(b)

Figura 7.10. Más puntos focales.

Es fácil subestimar la importancia de estas convenciones reguladoras. Pero obsérvese que las palabras de este libro sólo tienen sentido por convención. El dinero sólo es valioso porque es convencional considerarlo valioso. Estas consideraciones han conducido a algunos autores a proclamar que la sociedad «no es más que» el sistema de sobreentendidos convencionales que le dan coherencia.

Sin embargo, las convenciones a las que podemos recurrir al seleccionar equilibrios para juegos simples son de un carácter más humilde. Con frecuencia las pistas contextuales necesarias para localizar un punto focal se pueden opbservar en los nombres de estrategas. Por ejemplo, para modelizar el juego de la vida real en el que dos coches se aproximan en una calle, podríamos usar el juego de coordinación pura de la Figura 7.9(b) con la primera estrategia pura del jugador I marcada *izquierda,* la segunda estrategia pura de la jugadora II marcada *izquierda* y las estrategias puras restantes marcadas *derecha.* En los Estados Unidos nadie dudaría en elegir (*derecha, derecha*) como equilibrio focal.

Esto también es cierto para el gallina, si se introduce, como en la Sección 7.1.3, en el contexto de conductores y es marcado como en la Figura 710(a). La jugadora II desearía que las convenciones británicas estuvieran vigentes, pero estará fácilmente de acuerdo en que una convención cualquiera es mejor que ninguna[20].

7.3.3. Dominación de Pareto

A veces un equilibrio de Nash (s, t) es una mejora de Pareto (Sección 5.4.1) sobre todos los demás equilibrios de Nash del juego. Se dice entonces que (s, t) *Pareto-domina* a los demás equilibrios de Nash[21]. Se suele argumentar

[20] Algunas de las dificultades que surgen cuando el gallina debe ser estudiado en ausencia de convenciones fueron discutidas en la Sección 7.1.4. Pero las cosas pueden ser incluso más complicadas en otros juegos. Ver los Ejercicios 7.9.29 y 7.9.30.

[21] A pesar del riesgo de confundir este uso de la palabra «dominar» con la noción de dominación estratégica introducida en la Sección 4.6.

que esto es suficiente para asegurar el estatus de punto focal a (s, t), e incluso que la selección de cualquier otro equilibrio es de alguna forma irracional.

Para ayudarnos a discutir estos extremos, consideremos el juego de la Figura 7.10(b). Si $0 \leqslant x \leqslant 10$, el juego tiene dos equilibrios de Nash con estrategias puras, (s_1, t_1) y (s_2, t_2). Si $x < 10$, (s_1, t_1) es una mejora de Pareto sobre (s_2, t_2). ¿Deberíamos elegirlo siempre? Nadie negaría estatus de punto focal a (s_1, t_1) cuando $x = 1$. Pero, ¿y si $x = 9$? ¿Y si $x = 9.9$? ¿Y si $x = 9.99$?[22].

7.3.4. Estabilidad

Una convención para elegir equilibrios no sobrevivirá durante mucho tiempo si no es estable[23]. Lo que esto significa en concreto depende del contexto. Hablando de forma poco precisa, la idea es que pequeños errores al usar la convención no deben provocar fallos de coordinación desastrosos.

Sólo desarrollaremos un ejemplo en el que esta idea juega un papel importante. Sin embargo, el ejemplo es el juego de demandas de Nash, que es lo bastante importante como para que le dediquemos íntegramente una sección.

7.4. Juego de demandas de Nash

Econ 7.5 ⟶

El juego de demandas de Nash es un juego de jugadas simultáneas basado en un problema de negociación de Nash (X, d) del tipo descrito en la Sección 5.5.1. Su estudio ilustrará no sólo de qué forma consideraciones de «estabilidad» pueden a veces ayudar en los problemas de selección de equilibrios, sino que además esclarecerá todavía más las circunstancias en las que se puede usar útilmente la solución de negociación de Nash de la Sección 5.5.2.

John y Mary anuncian simultáneamente una demanda. Sus demandas x_1 y x_2 pueden ser compatibles o incompatibles. Son compatibles si el par

[22] Harsanyi y Selten distinguen entre «dominación de Pareto» y «dominación por riesgo». Esta última noción pretende expresar la idea de que algunos equilibrios son más arriesgados que otros. Por ejemplo, (s_1, t_1) es más arriesgado que (s_2, t_2) porque un jugador que busca este último con seguridad conseguirá x, pero un jugador que busca el primero puede no conseguir nada si se da un fallo de coordinación. La manera cómo Harsanyi y Selten cuantifican el riesgo hace que (s_2, t_2) «riesgo-domine» a (s_1, t_1) cuando $x > 5$. Pero, ¿es que la dominación según el riesgo siempre supera a la dominación de Pareto? Para conocer las respuestas de Harsanyi y Selten a este tipo de cuestiones hay que leer su libro *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*.

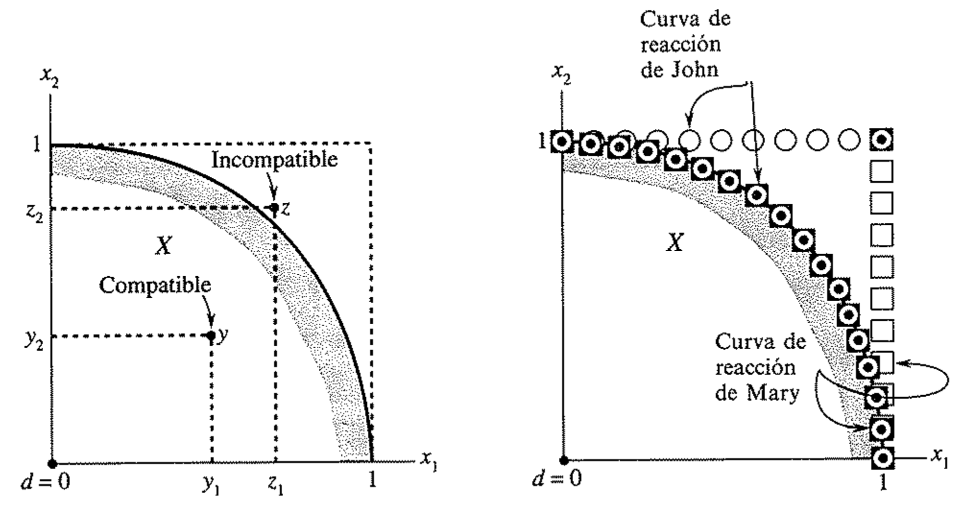
[23] *Cognoscenti* notarán que no nos estamos refiriendo a estabilidad en el sentido técnico de Kohlberg, Mertens u otros. Tampoco estamos aprovechando la ocasión para itroducir la idea de refinamiento por la puerta trasera. En la teoría del refinamiento, los «temblores» implícitamente considerados se derivan de la estructura misma del juego. Aquí se sugiere que los «temblores» existen realmente en la situación de la vida real de la que se abstrajo el juego.

(x_1, x_2) pertenece al conjunto X de pares de pagos factibles. En caso contrario, son incompatibles. Si las demandas son compatibles, ambos jugadores las consiguen. Si las demandas son incompatibles, ambos jugadores reciben sus pagos de desacuerdo. Por tanto, las funciones de pagos de los jugadores, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quedan definidas por

$$\pi_i(x) = \begin{cases} x_i, & \text{si} \quad x \in X, \\ d_i, & \text{si} \quad x \notin X. \end{cases}$$

La Figura 7.11(a) representa un juego de negociación (X, d). Recordemos que el cero y la unidad en la escala de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de un jugador se pueden elegir del modo más conveniente. En este problema, las matemáticas son un poco más simples si las escalas de utilidad se escogen de manera que $d = 0$. No ganamos ninguna simplificación apreciable al fijar la unidad de la escala, pero la hemos elegido de manera que la frontera de X pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Una simplificación más es que John y Mary se limitarán a hacer demandas en el intervalo $[0, 1]$.

Las curvas de reacción de los jugadores para esta versión especializada del juego se muestran en la Figura 7.11(b). Obsérvese que si Mary hace una demanda que satisface $0 \leqslant x_2 < 1$, entonces la respuesta óptima de John es escoger la demanda x_1 que hace (x_1, x_2) Pareto-eficiente en X. Sería estúpido por parte de John reclamar menos, porque entonces obtendría menos. También sería estúpido reclamar más, porque entonces las demandas serían incompatibles y John sólo conseguiría $d_1 = 0$. Si Mary hace su demanda máxima de $x_2 = 1$, entonces John no conseguirá nada haga lo que haga. Cualquier demanda es una respuesta óptima para él en este caso.



(a) (b)

Figura 7.11. El juego de demandas de Nash.

La Figura 7.11(b) muestra que cualquier punto del conjunto de negociación (Sección 5.4) para el problema de negociación (X, d) corresponde a un equilibrio de Nash para el juego de demandas de Nash. También existe un equilibrio de Nash «no cooperativo» que se obtiene si los dos jugadores son lo bastante codiciosos como para hacer sus máximas demandas posibles. Entonces ninguno consigue nada.

Por tanto, existen un número infinito de equilibrios de Nash para el juego de demandas de Nash. Esto crea un importante problema de selección de equilibrios. Sin embargo, sólo una convención para elegir un equilibrio entre los muchos posibles es «estable».

7.4.1. El juego de demandas de Nash «suavizado»

Mates 7.5 ⟶

Para explicar en qué sentido usamos la palabra «estable», es necesario considerar una versión «suavizada» del juego de demandas de Nash en el que los jugadores no están muy seguros de cómo es el conjunto de factibles X. Por tanto, no saben a priori si un par (x_1, x_2) será compatible o no. Lo mejor que pueden hacer es asignar una probabilidad $p(x_1, x_2)$ al suceso de que un par de demandas será compatible.

La Figura 7.12(a) indica algunas gráficas para la función $p : [0, 1]^2 \to [0, 1]$. Por ejemplo, si un par de demandas $x = (x_1, x_2)$ se encuentra en o por debajo de la gráfica de $p(x) = 2/3$, entonces la probabilidad de que el par de demandas x sea compatible es por lo menos 2/3. En este caso, los jugadores saben que la frontera del conjunto X se encuentra en la franja limitada por las regiones representadas por $p(x) = 0$ y $p(x) = 1$. Si el grado de incertidumbre que padecen es pequeño, la franja será estrecha. Este análisis se centrará en saber qué ocurre cuando su amplitud se hace infinitamente pequeña.

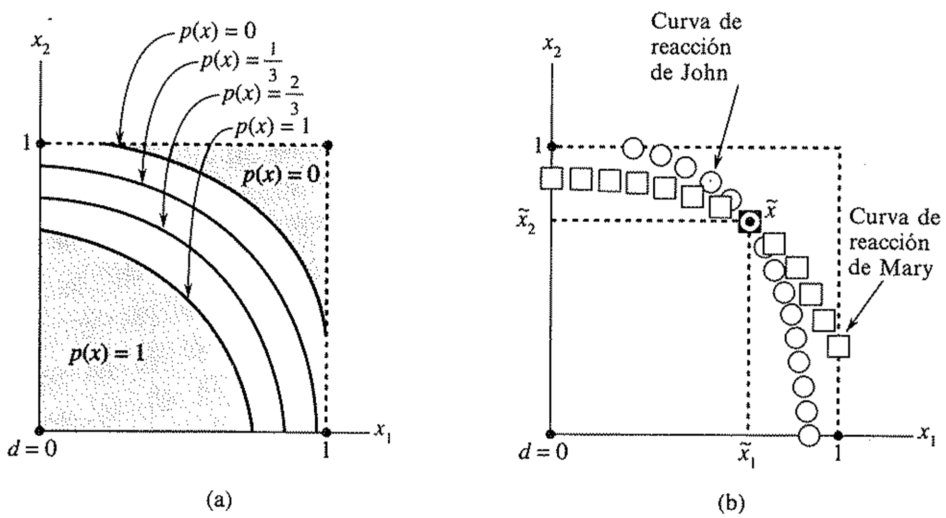


Figura 7.12. El juego de demandas de Nash «suavizado».

La función de pagos del jugador i en el juego de demandas suavizado es

$$\pi_i(x_1, x_2) = x_i p(x_1, x_2)$$

porque, si se escoge el par de demandas (x_1, x_2), el resultado es una lotería en la que el jugador i obtiene x_i con probabilidad $p(x_1, x_2)$ y nada con probabilidad $1 - p(x_1, x_2)$.

Supondremos que la función $p : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ se comporta lo bastante bien como para que, con planteamientos sencillos, podamos calcular con éxito las funciones de reacción[24]. Para determinar sus respuestas óptimas a la demanda de Mary de x_2, John puede simplemente derivar su función de pagos parcialmente con respecto a x_1, manteniendo x_2 constante. Entonces se iguala a cero la derivada parcial que se obtiene, $\partial\pi_1/\partial x_1$. Esto proporciona la ecuación[25]

$$x_1 p_{x_1}(x_1, x_2) + p(x_1, x_2) = 0 \qquad (7.1)$$

para la curva de reacción de John. Análogamente, la curva de reacción de Mary tiene la ecuación

$$x_2 p_{x_2}(x_1, x_2) + p(x_1, x_2) = 0 \qquad (7.2)$$

La Figura 7.12(b) muestra la forma típica de las curvas de reacción[26].

Un equilibrio de Nash $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ se da donde se cortan estas dos curvas. La Figura 7.12(b) muestra las dos curvas cortándose una vez. Pero puede darse el caso que las curvas se corten varias veces, de manera que existan múltiples equilibrios de Nash. El siguiente análisis muestra que, por muchos equilibrios de Nash que haya, todos se aproximan a la solución de negociación de Nash regular cuando los jugadores saben razonablemente bien cómo es X[27].

Como hemos explicado en la Sección 4.5.1, la tangente a la curva $p(x) =$

---

[24] Entre las hipótesis que se hacen normalmente figuran que p es diferenciable, casi-cóncava y estrictamente decreciente.

[25] Recordemos que la notación p_{x_1} representa simplemente $\partial p/\partial x_1$.

[26] Si John y Mary fueran menos ingenuos al calcular sus curvas de reacción, prestarían especial atención a lo que ocurre cuando $x_1 = 1$ ó $x_2 = 1$. Según lo que se supone acerca de p, podrían tal vez descubrir que sus curvas de reacción se inclinan hacia atrás, como en la Figura 7.11(b), y se cruzan en un equilibrio de Nash «no cooperativo» en el que ninguno de los jugadores consigue nada porque cada uno, codiciosamente, lo pide todo. Esta posibilidad es ignorada en el texto porque, si se diera, rechazaríamos en cualquier caso el equilibrio de Nash «no cooperativo» como un posible candidato para la selección.

[27] La Figura 5.10(b) muestra cómo se define la solución de negociación de Nash regular. Si lo que usted recuerda de esta noción no es muy preciso, sería prudente revisar la Sección 5.5.

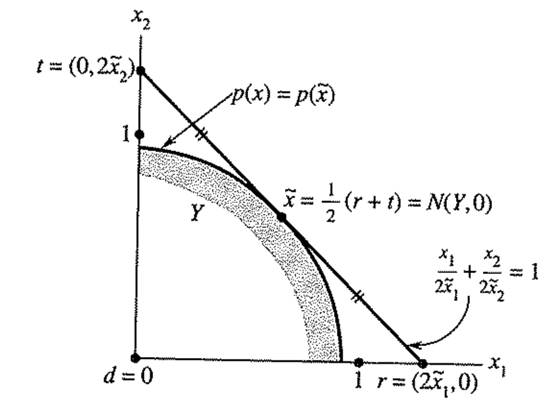


Figura 7.13. Caracterización de los equilibrios de Nash en el juego «suavizado».

$= p(\tilde{x})$ en el punto $\tilde{x}$ tiene por ecuación $\nabla p(\tilde{x})^{\top}(x - \tilde{x}) = 0$. Desarrollada, la ecuación de la tangente es

$$p_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(x_1 - \tilde{x}_1) + p_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(x_2 - \tilde{x}_2) = 0 \qquad (7.3)$$

Si $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ es un equilibrio de Nash, debe pertenecer a las curvas de reacción de John y Mary. Luego (7.1) y (7.2) se cumplen ambas con $x = \tilde{x}$. Esto permite eliminar las derivadas parciales de (7.3), obteniendo la ecuación más simple.

$$\frac{p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}(x_2 - \tilde{x}_2) = 0.$$

Un poco de álgebra reduce esto a

$$\frac{x_1}{2\tilde{x}_1} + \frac{x_2}{2\tilde{x}_2} = 1.$$

La Figura 713 sirve para recordar que esta es la ecuación de la tangente a $p(x) = p(\tilde{x})$ en el punto $\tilde{x}$.

En la Figura 7.12, la tangente corta el eje x_1 en el punto $r = (2\tilde{x}_1, 0)$. Y corta el eje x_2 en el punto $t = (0, 2\tilde{x}_2)$. Así, el equilibrio de Nash $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ se encuentra en el punto medio del segmento que une r y t. Si Y es la región sombreada de la Figura 7.13, se sigue que $\tilde{x}$ es la solución de negociación de Nash regular para el problema de negociación $(Y, 0)$. Con la notación de la Sección 5.5, $\tilde{x} = s = N(Y, 0)$.

La frontera del conjunto Y es una gráfica de probabilidad. Todas estas gráficas convergen hacia la frontera del conjunto X cuando la amplitud[28] de

[28] Los matemáticos deben observar que la «amplitud» de la franja se puede considerar la distancia de Hausdorff entre el conjunto en que $p = 0$ y el conjunto en que $p = 1$. Necesitarán comprobar que la solución de negociación de Nash es continua para la métrica de Hausdorff.

la franja representada en la Figura 7.11(a) tiende a cero. Se sigue que $N(Y, 0)$ converge hacia $N(X, 0)$. Es decir, cuando el grado de incertidumbre sobre la situación de X es lo bastante pequeña, todos los equilibrios de Nash del juego suavizado se aproximan a la solución de negociación de Nash regular del problema de negociación $(X, 0)$.

Esta conclusión fue esgrimida por Nash como justificación para usar la solución de negociación de Nash como una convención para elegir un equilibrio de Nash en el juego (no suavizado) de demandas de Nash. Su razonamiento era que cualquier otra convención es necesariamente inestable porque, aunque una convención alternativa puede ser un instrumento que funciona bien para seleccionar un equilibrio de Nash cuando nadie tiene dudas acerca del conjunto de factibles X, la menor sombra de duda generará un juego para el que la convención ni siquiera será capaz de elegir un equilibrio de Nash. Si estas dudas son endémicas, entonces sólo podemos esperar que sobreviva como convención seleccionadora de equilibrios la solución de negociación de Nash, porque es la única convención estable cuando estas dudas están presentes.

7.5. Negociación previa al juego

Las secciones anteriores sobre la selección de equilibrios suponen que los jugadores no tienen la oportunidad de negociar antes del juego. Todos los puntos de acuerdo entre los jugadores se suponen tácitos. En esta sección los jugadores se comunicarán y podrán hablarse antes de practicar el juego. Con frecuencia estas negociaciones previas al juego se denominan «charla» que tiene lugar «en el café» el día antes de practicar el juego. En estas charlas, los jugadores pueden reescribir los libros de teoría de juegos, o inventar convenciones nuevas. Incluso el hecho de que puedan observar conjuntamente como se tira una moneda llegará a ser significativo.

Filo 7.5.1 ⟶

Por supuesto, la negociación previa al juego es, estrictamente hablando, negociación. El programa de Nash, que hemos descrito brevemente en la Sección 5.7.1, requiere que en una situación de convenio todos los trucos de la negociación sean modelizados explícitamente como jugadas de un juego de negociación formal. Si este ambicioso programa se llevara hasta el final, cada jugador debería enfrentarse al problema de escoger una gran estrategia para un juego mayor. Esto incorporaría una estrategia para conducir las negociaciones, y además una estrategia para desarrollar el juego original que dependería del curso que tomaran las negociaciones. Puesto que el juego mayor tendría que ser analizado tácitamente, se asume que los juegos tácitos deben ser considerados más fundamentales que los juegos vocales[29].

[29] Me gusta utilizar la palabra *lucha* [*contest*, en el original] para referirme a juegos que tienen que ser analizados sin ningún punto de acuerdo común entre los jugadores, ya sean vocales o no. Estos juegos son incluso más importantes que los juegos llamados tácitos en el texto.

Esto es, si la teoría de juegos fuera estudiada rigurosamente hasta sus últimas consecuencias, la teoría de los juegos vocales saldría como una consecuencia de la teoría de los juegos tácitos. Sin embargo, estas cuestiones tan profundas son irrelevantes para las consideraciones elementales a que se limita la presente sección.

7.5.1. Compromiso y cooperación

Es fácil llegar a confundirse sobre lo que se puede o no se puede hacer en negociaciones previas al juego. Recordemos de la Sección 5.7 que, en la teoría de juegos *cooperativa*, cualquier acuerdo alcanzado en negociaciones previas al juego se supone que es *vinculante* para las partes. Tiene el estatus de un contrato legal. Un jugador no puede acordar antes del juego que jugará la estrategia *s*, y más tarde rastreramente cambiar a otra cosa más ventajosa. El acuerdo de un jugador a jugar *s* le impone un *compromiso*. Este término no se usa de manera informal en teoría de juegos. Cuando un jugador ha adquirido un compromiso, la vía a una reconsideración queda cerrada. Para bien o para mal, un jugador comprometido es el que *no tiene otra opción* que la de cumplir su compromiso.

Sin embargo, el estudio de los equilibrios de Nash, que es el principal objeto de estudio de este capítulo, pertenece muy claramente a la teoría de juegos no *cooperativa*. En la teoría de juegos no cooperativa, nada de lo que ocurre en una negociación previa al juego obliga para nada a nadie. Si los jugadores cumplen sus compromisos, no es porque *deban* cumplirlos, sino porque creen que es ventajoso para ellos el hacerlo.

Esta sección pretende dejar claro por qué estas distinciones son importantes. En las Secciones 7.5.4 y 7.5.5, se dan ejemplos que ilustran las ideas expuestas. Empezaremos rápidamente con lo que dijimos en el Capítulo 5 sobre teoría de juegos cooperativos.

Regiones de pagos cooperativos. La posibilidad de adquirir compromisos, o de llegar a contratos vinculantes, puede ser realmente muy útil. Por ejemplo, si los jugadores tienen la habilidad de poner por escrito contratos vinculantes durante las negociaciones previas al juego, entonces no necesitan limitarse a considerar los equilibrios de Nash del juego que jugarán el día siguiente. Pueden acordar implementar cualquier par de pagos en la *región de pagos cooperativa* del juego. La Sección 5.3 explica por qué esta es simplemente la clausura convexa de los pares de pagos en la forma estratégica del juego[30].

Como ejemplo, la Figura 7.14(b) muestra la región de pagos cooperativa del dilema del prisionero. Es la clausura convexa de los pares de pagos (3, 3), (0, 6), (6, 0) y (3, 3) que aparecen en la forma estratégica del dilema del prisionero que aparece en la Figura 7.14(a).

[30] Para no complicar las cosas, excluimos por el momento la posibilidad de libre eliminación o de «utilidad transferible».

Recordemos que *halcón* domina fuertemente a *paloma* en el dilema del prisionero. Así, el único equilibrio de Nash para el juego es (*halcón*, *halcón*). Este proporciona el resultado (1, 1). Los jugadores que pueden llegar a acuerdos vinculantes pueden por lo tanto conseguir mucho más que los que están obligados a limitarse a escoger equilibrios de Nash. Por ejemplo, pueden escoger el resultado (3, 3) simplemente firmando un acuerdo por el que jugarán (*paloma*, *paloma*). (Alternativamente, podrían ponerse de acuerdo en tirar una moneda al aire y jugar (*halcón*, *paloma*) si sale cara y (*paloma*, *halcón*) si sale cruz.) Cuando llega el momento de jugar según el acuerdo, ninguno de los jugadores *querrá* jugar *paloma*, porque está fuertemente dominada por *halcón*. Pero en teoría de juegos cooperativa los acuerdos *deben* ser respetados.

Econ 7.5.2 →

Teoría de la amenaza de Nash. Se puede preguntar: ¿en cuál de todos los posibles resultados en la región de pagos cooperativos se pondrán de acuerdo? Esta cuestión nos lleva al campo de la teoría de la negociación considerada en el Capítulo 5. Se podría, por ejemplo, intentar responder a la pregunta por medio de alguna versión de la solución de negociación de Nash. Entre los problemas que entonces se plantean está el de la situación del punto de desacuerdo *d*.

En un contexto en el que los jugadores pueden comprometerse ilimitadamente, como habitualmente se supone en la teoría de juegos cooperativa, Nash ofrece una respuesta convincente. En este contexto, el jugador I se encontraría en graves dificultades si retrasara el compromiso. La jugadora II entraría primero y se encargaría de ejecutar el juego de una manera muy negativa para el jugador I, excepto si él se aviniera a firmar un contrato en los términos que ella propone. Entonces él se encontraría en una situación de «lo toma o lo deja», sin margen de maniobra[31].

Puesto que ninguno de los jugadores se puede permitir un retraso, las negociaciones previas entre jugadores racionales en este contexto se precipitan en el primer instante del período de negociación. Con el espíritu del programa de Nash, Nash intentó modelizar la situación haciendo que los jugadores se comprometieran simultáneamente de una vez por todas a una amenaza de la forma: «si usted no firma un acuerdo que me concede mi demanda *D*, yo llevaré a cabo la amenaza *T* en el juego».

Este esquema de la teoría de la amenaza de Nash es colateral al objetivo principal de la sección, y por ello sólo haremos observar que la relevancia de la solución de negociación de Nash *regular* en un texto de compromiso ilimitado se puede justificar apelando a la sección precedente sobre el juego de demandas de Nash, donde se suponía que los jugadores simultáneamente intercambiaban demandas no negociables. Las amenazas se hacen significa-

[31] Si usted se siente tentado a responder que el jugador I no debería someterse a este chantaje, incluso cuando le perjudica ser desafiante, reléase la Sección 5.8.1 sobre el juego del ultimátum. Esta conducta no es racional, excepto si, siendo duro frente al chantaje, se consigue un pago al labrarse una reputación.

tivas cuando no se da un punto de desacuerdo. Los cálculos para determinar el resultado final fueron descritos en la Sección 6.9.

En el caso del dilema del prisionero, las cosas resultan ser particularmente simples. Cada jugador pide un pago de 3 y amenaza jugar *halcón* si su petición no es satisfecha. En consecuencia, los jugadores acuerdan jugar (*paloma, paloma*) u otra combinación estratégica que conduce al resultado (3, 3).

7.5.2. Amenazas increíbles y promesas

Un acuerdo entre dos partes vinculadas legalmente no es una cosa significativa. Pero debemos tener presente dos cosas. En primer lugar, que las cosas sobre las que se pueden firmar contratos así, pertenecen a un ámbito limitado. En segundo lugar, que estos contratos no obligan en sentido estricto. Obligan sólo en la medida en que cada parte prefiere no incurrir en las penalizaciones que se pueden derivar de no cumplir el contrato. Sin embargo, en muchos casos no compensa a una parte denunciar a la otra ante la ley, incluso cuando ésta no ha cumplido sus compromisos legales. En cualquier caso, la teoría de juegos cooperativa tiene un campo de aplicación muy amplio.

Por otra parte, las hipótesis integradas en la teoría de las amenazas de Nash sobre el poder de los jugadores para comprometerse unilateralmente, casi nunca se cumplen. La siguiente historia, que va de secuestro[32], se usa a menudo para ilustrar qué difícil es en la práctica convencer a otra persona de que lo que usted *dice* que es un compromiso es *de hecho* un compromiso.

John ha secuestrado a Mary. El rescate ha sido pagado y ahora John está considerando dejar a Mary en libertad. No quiere matarla. De hecho, le gustaría dejarla en libertad, si pudiera estar seguro de que ella no revelaría su identidad al encontrarse en libertad. Mary no quiere que la maten, y promete fervientemente que no dirá nada si la deja en libertad. ¿Pero qué vale su promesa? Ella necesita convencer a John de que se compromete a no decir nada. Si ella tuviera algunos documentos comprometedores que la hacen culpable de algún delito de consideración, podría dejarlos con John como garantía de su buena conducta. Pero es casi seguro que Mary no puede utilizar algo así. Sus promesas, aunque sean proferidas con mucha seriedad, sonarán increíbles a los oídos de John. El, simplemente, no la creerá.

Lo mismo ocurre con las amenazas increíbles. Consideremos, por ejemplo, la discusión del equilibrio subjuego-perfecto de la Sección 4.6.3. La jugadora II puede amenazar con jugar L después de que el jugador I ha jugado r. Su objetivo al hacer esta amenaza en una negociación previa al juego sería chantajear al jugador I para firmar un acuerdo sobre el equilibrio de Nash (l, RL). Pero, excepto si dispone de algún método para convencer al jugador I de que su amenaza tiene el estatus de un compromiso, él considerará que la amenaza es mera retórica. El sabe que, si ella es racional, no cumplirá su amenaza cuando él juegue r, porque sólo conseguiría un pago de 1 en lugar del pago de 2 que conseguiría jugando R. Por esta razón, la justificación de la idea de equilibrio subjuego-perfecto se expresa con frecuencia diciendo que los jugadores sólo aceptan amenazas que son *creíbles*. Estas son amenazas que, de cumplirse, redundarían en beneficio de un jugador racional, si tuviera que cumplirlas.

[32] Para esta historia y otros cuentos ejemplares de naturaleza similar, véase de nuevo *Strategy of Conflict*, de Schelling.

Filo 7.5.3 →

Esto no significa que *nunca* sea posible adquirir compromisos. Sin embargo, los especialistas en teoría de juegos habitualmente prefieren integrar cualquier oportunidad de adquirir compromisos que los jugadores puedan tener en la estructura formal del juego. El juego así ampliado se analiza entonces usando un concepto de equilibrio, como el de subjuego-perfecto, que no da por supuestas las posibilidades de compromisos. Por otra parte, el hecho de que la defensa de Nash, de la solución de negociación de Nash sea incorrecta según los planteamientos actuales, tampoco implica que no tenga valor alguno. Tiene otras justificaciones más poderosas. Una de ellas fue estudiada en la Sección 5.8.4.

7.5.3. Palabras

En la teoría de juegos no cooperativos, los jugadores no pueden adquirir compromisos en una negociación previa al juego. Tampoco pueden acordar nada que les obligue. Los intercambios previos al juego quedan reservados a meras «palabras». Nada de lo que uno diga le impone obligaciones futuras. Si un jugador escoge cumplir un acuerdo alcanzado, será porque es óptimo para él. Los únicos acuerdos que se cumplirán son los que se *auto-regulan*, en el sentido de que nadie los abandona porque nadie gana nada abandonándolos. Los únicos acuerdos valiosos que se pueden obtener con las «palabras» previas son acuerdos para coordinarse en un *equilibrio*. Un acuerdo sobre cualquier otra cosa está condenado al fracaso, porque necesariamente habrá por lo menos un jugador con incentivos para hacer trampas y nadie podrá impedírselo. Por esta razón, los economistas modernos han aprendido a limitarse a considerar lo que llaman *acuerdos compatibles con los incentivos*. Añadamos que la idea esencial ya había sido claramente enunciada por el filósofo Thomas Hobbes en una fecha tan lejana como 1661. Expresando la idea dramáticamente, Hobbes escribió, «pactos sin espadas son sólo palabras».

Filo 7.5.5 →

Por decir estas cosas, los especialistas en teoría de juegos son con frecuencia acusados de tener una visión simplista de la naturaleza humana. Se argumenta en su contra que las personas se guían por algo más que por estrechos intereses personales: también atienden a requerimientos morales. Tal vez el interés personal lleve a un individuo a hacer trampas, pero podemos contar con que los individuos cumplirán con frecuencia su palabra porque sienten la obligación moral de hacerlo.

Estas acusaciones olvidan un aspecto esencial. La teoría de juegos es *neutral* en cuestiones morales. *No* está comprometida con la idea de que «el fin justifica los medios)[33], ni con cualquier otro principio maquiavélico. Los que afirman lo contrario están simplemente equivocados.

Cuando los especialistas en teoría de juegos describen a los jugadores como «racionales», sólo quieren decir que adoptan decisiones de forma *consistente*. Con las hipótesis moralmente neutras sobre la conducta consistente hechas en el Capítulo 3, resulta que una persona consistente se puede caracterizar como aquella que actúa como si quisiera maximizar el valor esperado de una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern. En el Capítulo 4 llamamos pagos a estos valores esperados. Pero no hay nada en la teoría que diga que los jugadores deben perseguir objetivos egoístas. Tampoco hay ninguna razón para que gente generosa que se guía por imperativos morales sea inconsistente. Ambos grupos de personas se comportarán como si buscaran un pago máximo, aunque los resultados que proporcionan un pago elevado a unos no serán los mismos que los que dan pagos elevados a los otros. La teoría de juegos, que considera dadas las aspiraciones del jugador, se limita a aconsejar sobre la mejor manera de conseguir aquello que interesa al jugador o la jugadora, sea esto lo que sea.

El marco habitual para discutir estos problemas es el dilema del prisionero, al que dedicaremos la subsección próxima. Howard Tucker no se podía imaginar que este simple juego que inventó generaría tan cuantiosa literatura. Sin embargo, para alguien que comprende la teoría de juegos, poco más hay que decir.

7.5.4. El dilema del prisionero

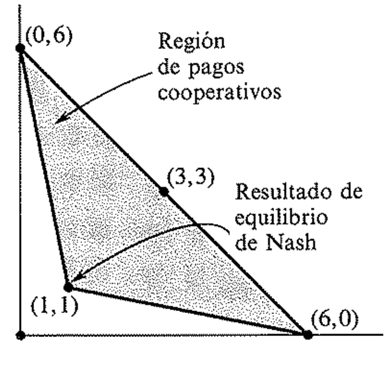
Una versión del dilema del prisionero fue introducida en la Sección 7.1.3. El juego bimatricial se reproduce en la Figura 7.14(a). Su región de pagos cooperativos se muestra en la Figura 7.14(b).

Supongamos que una charla de café conduce a que ambos jugadores prometen jugar *paloma* en el dilema del prisionero. La teoría de juegos dice que es irracional que cualquiera de los dos jugadores cumpla su promesa porque *halcón* domina fuertemente a *paloma*. Pero si ambos siguen las recomendaciones de la teoría de juegos y rompen sus promesas, resulta que a ambos les va peor de lo que les hubiera ido si ambos las hubieran cumplido. El resultado (1, 1) que se obtiene al jugar (*halcón, halcón*) es claramente el peor resultado posible del juego. Muchos autores han proclamado por ello que no sólo es inmoral, sino estúpido ser racional en el dilema del prisionero.

[33] De hecho, las formulaciones en teoría de juegos hacen los «fines» inseparables de los «medios» con que se alcanzan. Cada nodo terminal en una forma extensiva está completamente determinada por el juego que conduce hasta él.

	Paloma	*Halcón*
Paloma	3 3	6 0
Halcón	0 6	1 1

(a)



(b)

Figura 7.14. El dilema del prisionero.

La falacia de los gemelos. Quienes proclaman que el romper la promesa en el dilema del prisionero es un acto estúpido con frecuencia son víctimas de la «falacia de los gemelos» en alguna de sus versiones. La falacia se adapta particularmente bien al dilema del prisionero, que es un juego simétrico. Suponiendo que los jugadores no usan estrategias mixtas y que nada externo interviene para romper la simetría, es razonable concluir que ambos jugadores elegirán la misma estrategia pura. El resultado final será o bien (*halcón, halcón*) o bien (*paloma, paloma*). Ambos jugadores prefieren esta última a la primera. Luego, la falacia concluye, la racionalidad exige escoger la última.

La falacia es un lugar común en contextos mucho mayores, más importantes que el dilema del prisionero. Aparece habitualmente acompañada de la pregunta ¿«Que ocurriría si todos nos comportáramos así?»[34].

Esta pregunta desvía la atención sólo hacia lo que ocurre cuando todo el mundo hace lo mismo. Ya que casi siempre es peor para todos que todo el mundo actúe «egoístamente» en lugar de «generosamente», la conclusión equivocada es que la conducta «egoísta» no tiene sentido.

Dicho brevemente, es falso que los jugadores racionales van a restringir su atención a la diagonal principal de la tabla de pagos indicada en la Figura 7,15(a). Esto sólo tendría sentido si los dos jugadores no razonaran *independientemente*. Si el jugador I pudiera contar con que la jugadora II razonará *exactamente* como lo hace él, entonces sería como si, simplemente por escogerla él mismo, pudiera forzarla a escoger una estrategia cualquiera

[34] El filósofo Spinoza introdujo su versión de esta falacia al escribir, «¿Qué ocurriría si un hombre no corriera el peligro presente de morir por traidor?... Si la razón pudiera recomendar esto, lo recomendaría a todos los hombres». Y concluía implícitamente que sólo sus resultados equivalentes a (*halcón, halcón*) y (*paloma, paloma*) deben ser tomados en consideración. El famoso «imperativo categórico» de Kant dice que cada uno debe *actuar sólo de acuerdo con principios de los que se pueda desear que lleguen a ser leyes universales.* ¿Qué significa esto para el dilema del prisionero? Nadie parece saberlo con seguridad. ¿Qué piensa usted?

(a)

	Paloma	*Halcón*
Paloma	3, 3	
Halcón		1, 1

(b)

	Paloma
Paloma	3, 3

(c)

	Paloma	*Halcón*
Paloma	3, 3	0, $6-x$
Halcón	$6-x$, 0	$1-x$, $1-x$

Figura 7.15. Juegos que no son el dilema del prisionero.

que a él le parece conveniente. Esta conclusión tal vez se puede justificar en el caso en que ambos jugadores son una pareja ideal de gemelos que son tan indistinguibles que podrían ser la misma persona. Esta hipótesis reduciría el dilema del prisionero a un juego de un solo jugador; en éste, cualquier especialista recomendaría sin dudarlo que se juegue *paloma*. Pero dos jugadores racionales no son un par de gemelos así. Si razonan de la misma forma en circunstancias idénticas, no es porque no tengan otra alternativa que pensar idénticamente; es porque lo que es racional pensar es lo mismo en ambos casos[35].

En el dilema del prisionero es racional jugar *halcón* porque éste domina fuertemente a *paloma*. Un jugador racional I que sabe que su oponente es racional sabe, por tanto, que ella jugará *halcón*. El sabe que él también jugará halcón porque él también es racional. En un impulso momentáneo y fantasioso le puede pasar por la cabeza jugar *paloma*. Si se sintiera muy fantasioso, podría incluso contemplar la posibilidad de que su oponente está experimentando simultáneamente una fantasía idéntica. Pero esto únicamente reforzaría su convicción de que *halcón* es una buena idea, ya que el uso de *paloma* por la jugadora II hace aún más atractivo para él el uso de *halcón*.

Moralidad. ¿Qué hacer de la denuncia de que la teoría de juegos es inmoral porque aboga por la ruptura de promesas de charla de café? Esta crítica parece muy poco razonable a un especialista en teoría de juegos. Si un teórico de la ética desea demostrar que hay «leyes naturales» de la conducta humana que deben ser respetadas sin mirar sus consecuencias, entonces el especialista en teoría de juegos estará encantado en poner los instrumentos de su profesión a su disposición. Estas «leyes naturales» pueden ser incorporadas a las reglas del juego que se estudia. Sin embargo, si una de las reglas es que nunca se debe romper una promesa, entonces los jugadores

[35] Un jugador no puede razonar: Yo soy racional, luego que yo adopte el argumento *A* le convierte en un argumento racional. Por tanto mi oponente hará lo mismo que haga yo. Esto pone el carro delante del caballo. Un argumento no es racional porque es aceptado por una persona racional. Por el contrario, una persona es racional porque él o ella sólo acepta argumentos racionales.

no podrán jugar el dilema del prisionero tras una charla de café en la que han prometido usar *paloma*. El juego que entonces jugarán se muestra en la Figura 7.15(b). La posibilidad de jugar *halcón* ha sido eliminada porque su uso es incompatible con la «ley natural» postulada. Procediendo de esta forma, negamos la posibilidad de hacer preceder el dilema del prisionero por una mera «charla de café». Las meras charlas son simplemente imposibles en esta situación.

Consideraciones similares se aplican a aquellos que se preocupan en negar que los individuos sólo buscan sus estrechos y egoístas objetivos personales. Aducen que los jugadores pueden llegar a preocuparse por el bienestar de sus oponentes, o que pueden querer cumplir sus promesas por sentido de la solidaridad con su grupo, o porque sufrirían remordimientos de conciencia. Estos jugadores tampoco jugarán el dilema del prisionero. Jugarán otro juego con pagos distintos. La Figura 7.15(c) muestra una posibilidad. Se deriva del dilema del prisionero suponiendo que los jugadores en el café se han hecho la promesa de jugar *paloma*, y no quieren romperla porque no les gusta romper promesas. Esta disposición a no romper promesas se refleja en los pagos de la tabla. No es imposible jugar *halcón* para estos jugadores, pero conduce a perder x útiles. Si $x > 3$, *halcón* no domina a *paloma* en el nuevo juego. Por el contrario, *paloma* domina ahora a *halcón*. Luego jugar racionalmente conduce al resultado (*paloma*, *paloma*). Como muchos autores han observado, una situación en la que todo el mundo saldrá ganando es aquella en que es conocimiento común que a todo el mundo le gusta cumplir sus promesas. (Análogamente, tanto John como Mary saldrían ganando, en la historia del secuestro de la Sección 7.5.2, si fuera conocimiento común que Mary sufre problemas mentales gravísimos si no cumple una promesa.) Pero obsérvese que en esta historia no se juega el dilema del prisionero después de hacer promesas. Una vez más, se ha inventado una historia que hace imposible la charla de café. La promesa hecha no es una mera charla, porque romperla cuesta por lo menos tres útiles.

En resumen, la respuesta de los especialistas en teoría de juegos a quienes les critican en este contexto es más o menos la siguiente. Tal vez usted sepa cómo plantear correctamente un problema social. Si es así, le ayudará, en la tarea de convencer a otros, saber deducir lo que usted cree que es cierto del análisis de un juego apropiado dentro de la teoría de juegos. Pero asegúrese de que escoge el juego correcto. Por muy ciertas que sean sus conclusiones, nada va a ganar si las obtiene con un análisis equivocado a partir de un juego equivocado[36]. El crítico puede responder que la victoria del especialista en el debate es, en el mejor de los casos, pírrica, ya que se consigue al precio de reducir las proposiciones de la teoría

[36] En mi opinión, el dilema del prisionero casi nunca es un paradigma adecuado para los problemas de cooperación que, según dicen, ejemplariza. El dilema del prisionero repetido, como se estudia en el Capítulo 8, es mucho más útil en este papel. Pero si se insistimos en limitarnos a buscar el paradigma adecuado entre los juegos de jugada única, entonces es mucho más recomendable algo parecido al juego de demandas de Nash.

de juegos al estatus de «meras» tautologías. Pero una acusación así no molesta en absoluto a un especialista en teoría de juegos. Nada le puede gustar más a un especialista en teoría de juegos que el que sus proposiciones tengan derecho al estatus de tautologías, como teoremas matemáticos propiamente dichos.

7.5.5. Colusión en el duopolio de Cournot

Econ 7.6 ⟶

A las empresas que buscan maximizar beneficios no les gusta la competencia, ya sea perfecta o imperfecta. Prefieren reunirse en acogedores carteles cuyos miembros no toman decisiones económicas independientemente, sino que se *colusionan* para evitar la disminución de beneficios que comporta la competencia. Estas colusiones pueden adoptar muchas formas. En su forma más cruda, puede consistir en un acuerdo para fijar los precios, o para asignar a cada miembro del cartel una parte del mercado negociada. En su forma más sutil, puede que no haya ningún acuerdo explícito. En su lugar, las empresas pueden haber llegado a un acuerdo, gestado lentamente durante años, para no apretarse demasiado unas a otras. Por ahora sólo consideraremos acuerdos colusivos no sutiles. Para estudiar configuraciones más sutiles, necesitamos la teoría de juegos repetidos introducida en el siguiente capítulo.

Una de las ventajas de estudiar la negociación previa al juego en el contexto de un oligopolio es que la mayoría de la gente no tiene ningún problema en dar por supuesto que los escrúpulos morales no cuentan para nada en las decisiones de las empresas comerciales. Este prejuicio se incorpora a la discusión del juego del duopolio de Cournot que damos a continuación al suponer, como hemos hecho antes, que cada empresa sólo se preocupa de maximizar beneficios. La defensa de esta hipótesis es particularmente fácil cuando se estudia la colusión. Incluso cuando los acuerdos colusores no son ilegales, es difícilmente compatible con una conducta recta el entrar en una conspiración cuyo objetivo es exprimir al consumidor. De hecho, en la vida real los ejecutivos parecen disfrutar escogiendo habitaciones de hotel llenas de humo a altas horas de la noche, como gansters de película, para escenario de sus negociaciones.

Empezaremos por hallar la región de pagos cooperativos Z del juego del duopolio de Cournot. Esta es fácil de calcular, porque el dinero que se puede sacar a los consumidores es la cantidad $\tilde{\pi}$ que obtiene un monopolio que maximice beneficios. Como muestra la Figura 7.6, este nivel de beneficios se consigue cuando la producción del monopolista es $\tilde{q} = 1/2(M - c)$. Por tanto, un par de duopolistas en colusión maximizarán la tarta que comparten asegurándose de que su producción satisface $q_1 + q_2 = \tilde{q}$. El beneficio total que consiguen entre ellos satisfará $\pi_1 + \pi_2 = \tilde{\pi}$. En este contexto es perfectamente razonable suponer que la «utilidad transferible» y la libre eliminación son posibles. La Figura 7.16(a) muestra la región de pagos cooperativos Z. La Figura 7.16(b), que hay que comparar con la Figura 7.5, no muestra pares de beneficios (π_1, π_2), sino pares de producciones (q_1, q_2).

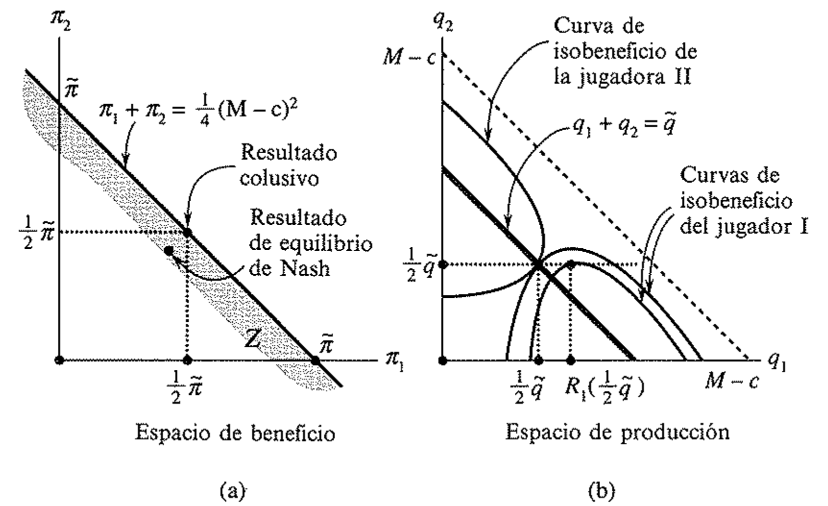


Figura 7.16. Colusión en el duopolio de Cournot.

La recta $q_1 + q_2 = \tilde{q}$ de acuerdos de producción Pareto-eficientes ha sido señalada[37].

¿Qué par de beneficios de Z se obtendría, si los duopolistas negocian en el supuesto de que su acuerdo es vinculante? Esto dependerá de las circunstancias en las que negocian. Puesto que toda la situación es simétrica, el resultado más probable es que se dividirán el mercado al 50 %[38], de manera que ambos producen $1/2\tilde{q}$ y obtienen un beneficio de $1/2\tilde{\pi}$.

Lo importante en este ejemplo, sin embargo, es que cualquiera de estos acuerdos colusivos es inherentemente inestable. Las palabras no cuestan nada cuando los ejecutivos se encuentran en habitaciones de hotel llenas de humo. Los acuerdos conseguidos *no* obligarán. A veces los acuerdos son abiertamente ilegales. Se puede anticipar, por consiguiente, que los acuerdos no se cumplirán si alguna de las empresas tiene incentivos para no cumplirlos. La Figura 7.16(b) indica que ninguna de las empresas tiene incentivos para respetar un acuerdo sobre el par de producciones $(1/2\tilde{q}, 1/2\tilde{q})$. El jugador I

[37] Obsérvese que las líneas de isobeneficio son tangentes a esta recta. Los economistas que saben acerca de la eficiencia de Pareto en la caja de Edgeworth ya conocen este fenómeno. Los demás deberían preguntarse por qué un par de producciones en el que se cortan dos curvas de isobeneficio no pueden ser Pareto-eficientes.

[38] Este sería el resultado, por ejemplo, si se usara la solución de negociación de Nash regular con el punto de desacuerdo situado en el par de beneficios que cada uno recibiría si usaran el único equilibrio de Nash que se obtiene cuando el juego del duopolio de Cournot se analiza sin colusión. Se obtendría el mismo resultado si se aplicara la teoría de las amenazas de Nash. Para un resultado asimétrico, sería necesario introducir alguna asimetría en el método de negociación. Tal vez, por ejemplo, sería apropiado colocar el punto de desacuerdo d en el par de beneficios que ambos reciben en el modelo de Stackelberg.

tiene incentivos para desviarse a $R_1(1/2\tilde{q})$, que es su respuesta óptima a la elección de $1/2\tilde{q}$ por la jugadora II. La jugadora II tiene los mismos incentivos para desviarse. El único acuerdo en el que ninguno tiene incentivos para deviarse es el par $(2/3\tilde{q}, 2/3\tilde{q})$. Pero este es exactamente el equilibrio de Nash del juego del duopolio de Cournot no colusivo, para el cual no es necesaria colusión alguna.

Por supuesto, el hecho de que los acuerdos colusivos son inherentemente inestables en el juego del duopolio de Cournot de una jugada no implica que lo mismo es cierto cuando el juego se juega *con repetición*. Sin embargo, para esta historia debemos esperar hasta la Sección 8.3.3.

7.6. Aleatorización previa al juego

La sección anterior ha tratado de lo que *no se puede* conseguir por medio de una charla previa al juego. La presente sección ofrece algunos ejemplos simples de lo que *sí se puede* conseguir, si las circunstancias son favorables.

7.6.1. Tirar monedas

Tirar una moneda es un método tradicional de resolver problemas de coordinación. Por ejemplo, así es como se decide habitualmente quién empieza en juegos deportivos. Incluso la Biblia menciona favorablemente el «echarlo a suertes».

Para ver cómo la observación conjunta de un suceso al azar puede ayudar en la selección de equilibrios, consideremos la variante del gallina que muestra la Figura 7.17(a). Su región de pagos cooperativos aparece en la Figura 7.18(a) El juego tiene tres equilibrios de Nash: (*paloma, halcón*), (*halcón, paloma*) y un equilibrio mixto en el que cada jugador usa *paloma* y *halcón* con la misma probabilidad.

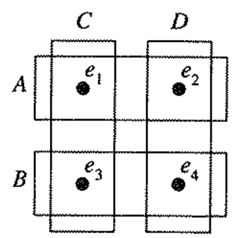
Si son posibles los acuerdos vinculantes, los jugadores pueden ponerse de acuerdo sobre el resultado (2, 2). Sin la posibilidad de hacer acuerdos vinculantes, los jugadores deben enfrentarse a un problema de selección de

	Paloma	*Halcón*
Paloma	2 / 2	3 / 0
Halcón	0 / 3	−1 / −1

(a)

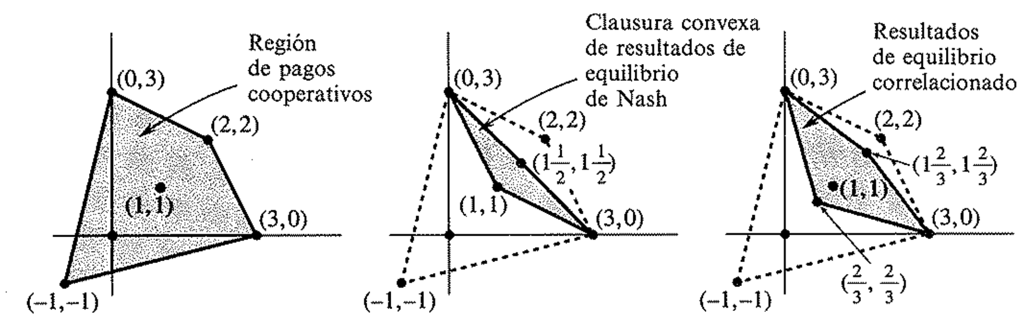
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	0

(b)



(c)

Figura 7.17. Una segunda versión del gallina.



(a) (b) (c)

Figura 7.18. Regiones de pagos para el gallina.

equilibrios. Como hemos visto anteriormente al estudiar el gallina, estos problemas de selección pueden no ser fáciles de resolver cuando no se dispone de una convención obvia que permita romper la simetría. Pero si se aceptan las charlas de café, los jugadores pueden inventarse una convención propia.

Por ejemplo, pueden romper la simetría observando conjuntamente el lanzamiento de una moneda justa. Antes del lanzamiento, acuerdan jugar (*paloma, halcón*) si sale cara, y (*halcón, paloma*) si sale cruz. Cada uno valorará la lotería acordada por 1 1/2 útiles. El resultado (1 1/2, 1 1/2) no es tan bueno como (2, 2), pero es mejor que (1, 1) que se obtiene al usar el equilibrio mixto de Nash.

El conjunto de todos los resultados que se pueden obtener de esta forma se indica en la Figura 7.18(b). Este conjunto es la clausura convexa (Sección 5.2.2) de los tres resultados que son equilibrios de Nash: (0, 3), (3, 0) y (1, 1). Por ejemplo, para obtener el resultado

$$(1, 1\ 3/4) = 1/4\,(0, 3) + 1/4\,(1, 1) + 1/2\,(3, 0),$$

los jugadores pueden observar conjuntamente el lanzamiento de dos monedas justas independientes. Entonces juegan (*paloma, halcón*) si el resultado es cara-cara, y el equilibrio mixto de Nash si el resultado es cara-cruz. En los demás casos, juegan (*halcón, paloma*).

Obsérvese que este acuerdo se *autorregula* a condición de que los jugadores no tengan oportunidad de intentar renegociar el acuerdo *después* de observar el resultado del lanzamiento[39]. La observación de cara-cara, por ejemplo, establece (*paloma, halcón*) como un punto focal. El jugador I desearía que se hubiera observado cruz-cara o cruz-cruz, pero no le quedará otra opción que aguantarse el disgusto. Dado que se ha observado cara-cara,

[39] Esto no significa que los intentos de renegociar hechos por un jugador desilusionado conseguirán necesariamente desplazar el punto focal establecido por el lanzamiento, pero entonces las cosas se hacen mucho más confusas.

él esperará que la jugadora II respetará el acuerdo y jugará *halcón*. Si lo hace, es óptimo para el jugador I jugar *paloma*.

7.6.2. Equilibrios correlacionados

Incluso si se permiten charlas de café, puede no ser fácil encontrar un acontecimiento aleatorio y observable conjuntamente que tiene lugar cuando los jugadores ya no tienen oportunidad de discutir nada más. Incluso será más difícil organizar las cosas de manera que se pueda utilizar el concepto de Aumann de *equilibrio correlacionado*. Sin embargo, si las circunstancias son favorables, se puede disponer de todos los resultados en el conjunto que aparece en la Figura 7.18(c). Este conjunto incluye el resultado (1 2/3, 1 2/3), que es una mejora neta sobre el resultado (1 1/2, 1 1/2) obtenido al usar cada uno de los equilibrios de Nash (*paloma, halcón*) y (*halcón, paloma*) con la misma probabilidad.

Supongamos que durante la charla de café los jugadores pueden contratar un árbitro y el coste es mínimo. Sus instrucciones son que el árbitro ha de usar un mecanismo aleatorio para seleccionar una de las casillas en la tabla de pagos del gallina según las probabilidades que aparecen en la Figura 7.17(b). El árbitro *no* informará a ninguno de los jugadores de qué casilla ha sido seleccionada. Pero el árbitro comunica al jugador I (y sólo a él) la fila en la que se encuentra la casilla, y a la jugadora II (y sólo a ella) la columna en la que se encuentra la casilla. El acuerdo de los jugadores es que harán lo que les diga el árbitro. Si respetan el acuerdo, el resultado es que (*paloma, paloma*), (*paloma, halcón*) y (*halcón, paloma*) son jugados con probabilidad 1/3. Luego el acuerdo corresponde al resultado

$$(1\ 2/3,\ 1\ 2/3) = 1/3(2, 2) + 1/3(0, 3) + 1/3(3, 0).$$

Lo que es importante es que el acuerdo se *autorregula*. Es óptimo para cada jugador respetar el acuerdo[40]. El concepto de probabilidad condicional introducido en la Sección 2.1.4 es necesario para explicar por qué esto es cierto.

Por ejemplo, en el espacio de sucesos $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de la Figura 7.17(c), la probabilidad de que se dé el suceso A condicionada por el conocimiento de que el suceso C ya ha ocurrido, viene dada por

$$\text{prob}(A|C) = \frac{\text{prob}(A \cap C)}{\text{prob}(C)} = \frac{\text{prob}(e_1)}{\text{prob}(e_1) + \text{prob}(e_2)}$$

[40] En el supuesto que no se puede optar a la renegociación, y que los jugadores no disponen de oportunidades de averiguar otras cosas sobre el suceso aleatorio organizado por el árbitro que las que el jugador ha de saber.

Supongamos ahora que el árbitro le dice a la jugadora II que use *paloma*. Esta calculará

$$\text{prob(I oye } \textit{paloma} | \text{II oye } \textit{paloma}) = \frac{1/3}{1/3 + 1/3)} = 1/2,$$

$$\text{prob(I oye } \textit{halcón}\ | \text{II oye } \textit{paloma}) = \frac{1/3}{1/3 + 1/3} = 1/2.$$

Su pago esperado por cumplir el acuerdo de jugar *paloma* cuando se le dice que lo haga es, por tanto, $1/2 \times 2 + 1/2 \times 0 = 1$. Su pago esperado por hacer trampa con el acuerdo y jugar *halcón* cuando se le dice que juegue *paloma* es $1/2 \times 3 + 1/2 \times (-1) = 1$. Por tanto, ella no pierde nada por respetar el acuerdo cuando se le dice que juegue *paloma*.

¿Qué pasa si el árbitro le dice que juegue *halcón*? Ella calculará

$$\text{prob(I oye } \textit{paloma} | \text{II oye } \textit{halcón}) = \frac{1/3}{1/3 + 0)} = 1,$$

$$\text{prob(I oye } \textit{halcón} | \text{II oye } \textit{halcón}) = \frac{0}{1/3 + 0} = 0.$$

Luego vuelve a ser óptimo para ella respetar el acuerdo y jugar halcón, porque $1 \times 3 + 0 \times (-1) = 3 > 2 = 1 \times 2 + 0 \times 0$.

Ya que la situación es simétrica, exactamente las mismas consideraciones mostrarán que el jugador II tampoco ganará nada desviándose del acuerdo. El resultado es un ejemplo de lo que Aumann llama un equilibrio correlacionado.

7.7. ¿Cuándo existen equilibrios de Nash?

Los equilibrios de Nash se dan allí donde se cortan las curvas de reacción de los jugadores. Hasta ahora nos hemos preocupado principalmente con lo que debíamos hacer cuando las curvas se cortan más de una vez. Pero supongamos que las curvas de reacción no se cortan. Es tentador responder imitando al autor de aquellos versos populares:

Ayer en la escalera
encontré a un hombre que no estaba allí.
Hoy tampoco estaba allí.
¡Cómo me gustaría que estuviera!

Sin embargo, que pueda darse el caso que no existan equilibrios de Nash, es un problema que debe ser tomado en serio. Los juegos infinitos con frecuencia no tienen equilibrios de Nash, incluso admitiendo estrategias infinitas. Afortunadamente, Nash acompañó su definición de equilibrio con una demostración de que este problema no se puede dar nunca en un juego finito.

Mates 7.9 ⟶

Estrategias y pagos. La prueba que daremos ahora esquemáticamente no sólo funciona para juegos finitos. Funciona para cualquier juego en el que el jugador I escoge sus estrategias en un conjunto P y la jugadora II escoge sus estrategias en un conjunto Q, a condición de que estos conjuntos y las funciones de pagos $\Pi_1 : P \times Q \to \mathbb{R}$ y $\Pi_2 : P \times Q \to \mathbb{R}$ satisfagan determinadas condiciones simples. La prueba también funciona muy bien para el caso en que hay muchos jugadores. Pero como es norma en este libro, el caso de muchos jugadores no es considerado para no complicar los cálculos algebraicos.

La notación introducida más arriba la hemos encontrado previamente para juegos finitos en la Sección 6.4.4. Pero será útil revisar lo que significa observando lo que estos objetos matemáticos son en el caso de un juego bimatricial 2×2 de los considerados en la Sección 7.1.3.

Una estrategia mixta $(1 - p, p)^{\top}$ en un juego bimatricial 2×2 queda determinada eligiendo un número real p del intervalo $I = [0, 1]$. En juegos bimatriciales 2×2, es por tanto posible tomar $I = P = Q$. Como hemos explicado en la Sección 6.4.4, las funciones de pagos se pueden expresar en términos de las matrices de pagos 2×2 de los jugadores, A y B, descritas en la Sección 6.4.4. Si el jugador I escoge p y la jugadora II escoge q, entonces el pago esperado del jugador I es

$$\Pi_1(p, q) = [1 - p \quad p]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - q \\ q \end{bmatrix}.$$

Así, por ejemplo, en la versión del gallina dada en la Sección 7.1.3,

$$\Pi_1(p, q) = (1 - q) + p(1 - 2q).$$

Esta conclusión ilustra que, para cada valor fijo de q, $\Pi_1(p, q)$ es una función afín[41] de p. Las funciones afines no sólo son siempre continuas, sino que son también simultáneamente convexas y cóncavas.

En lo que sigue, las cosas importantes sobre los conjuntos de estrategias y las funciones de pagos son las siguientes:

[41] Como se ha explicado en la Sección 3.4.3, el gráfico de una función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una recta. Estas funciones con frecuencia se llaman «lineales», aunque este uso no es completamente ortodoxo. El texto induce una pequeña confusión en este aspecto. La razón es que la notación usada difiere de la de la Sección 6.4.4. En la Sección 6.4.4 p no designa un número real, sino el *vector* que aparece aquí arriba como $(1 - p, p)^{\top}$. Con la antigua notación, $\Pi_1(p, q) = p^{\top}Aq$, y $\Pi_1(p, q)$ es realmente una función lineal de p cuando q se mantiene constante.

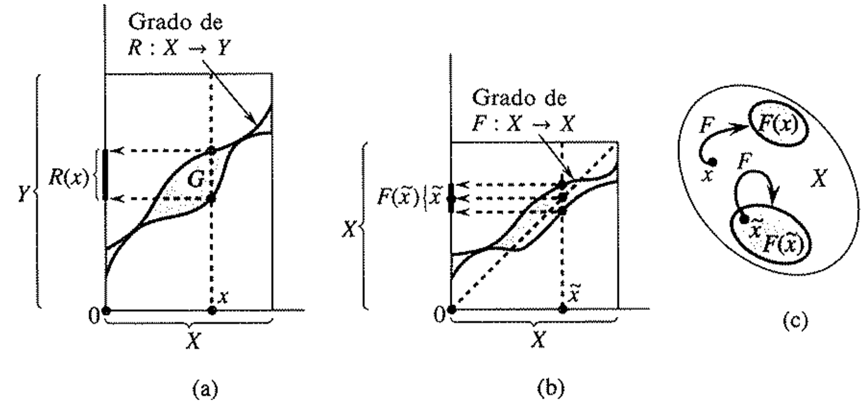


Figura 7.19. Correspondencias que se comportan bien y puntos fijos.

- El conjunto de estrategias de cada jugador debe ser convexo y compacto[42]. Esto es automáticamente cierto para los conjuntos de estrategias P y Q de un juego finito.
- La función de pagos de cada jugador debe ser continua. También debe ser cóncava cuando las estrategias de los demás jugadores se mantienen constantes. Las razones por las que estas condiciones se cumplen automáticamente en un juego finito se indicaron anteriormente.

Estas propiedades son necesarias para asegurar que las correspondencias de respuesta óptima de los jugadores, $R_2 : P \to Q$ y $R_1 : Q \to P$, se comportan bien. Recordemos que estos objetos fueron introducidos en la Sección 7.1.1.

Puntos fijos. Para que una correspondencia $R : X \to Y$ se comporte bien en el sentido que aquí interesa, debe satisfacer las siguientes propiedades, cuando X e Y son conjuntos convexos y compactos:

- Para cada $x \in X$, el conjunto $R(x)$ es convexo y no vacío.
- El grafo G de $R : X \to Y$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

La Figura 7.19(a) ilustra el caso en que ambos X e Y son intervalos compactos y representa el gráfico G de una correspondencia $R : X \to Y$ que se comporta bien.

La Figura 7.19(b) ilustra una correspondencia $F : X \to X$ que se comporta bien y que aplica X *en sí mismo.* El teorema del punto fijo de Kakutani dice que estas correspondencias tienen necesariamente por lo menos un punto fijo. Este es un punto x con la propiedad

$$\tilde{x} \in F(\tilde{x})$$

[42] Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado. Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos frontera. Así, el intervalo compacto $[0, 1]$ es cerrado porque contiene sus puntos frontera 0 y 1.

Como muestra la Figura 7.19(b), es evidente que $F : X \to X$ debe tener un punto fijo $\tilde{x}$ cuando X es un intervalo compacto. Sin embargo, esto mismo está lejos de ser evidente cuando X es un conjunto convexo, no vacío y compacto de $\mathbb{R}^n$. Pero esto es lo que dice el teorema del punto fijo de Kakutani. Volveremos sobre este tema en la próxima sección. Por ahora daremos el teorema por supuesto. La Figura 7.19(c) ilustra la conclusión del teorema de Kakutani cuando X es un conjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 7.7.1 (Nash). Si se admiten estrategias mixtas, todo juego finito tiene por lo menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Damos una versión esquemática de la prueba para el caso de dos jugadores. El primer paso es comprobar que, en el caso finito, las correspondencias de respuesta óptima $R_2 : P \to Q$ y $R_1 : Q \to P$ se comportan bien. Las propiedades de los conjuntos de estrategias y de las funciones de pagos que aseguran esta conclusión han sido listadas arriba; aunque no es muy difícil, omitimos el álgebra.

El segundo paso de la demostración es construir una correspondencia $F : P \times Q \to P \times Q$ a la que se puede aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani. Para cada (p, q) en $P \times Q$, $F(p, q)$ se define como un conjunto de $P \times Q$. Más exactamente,

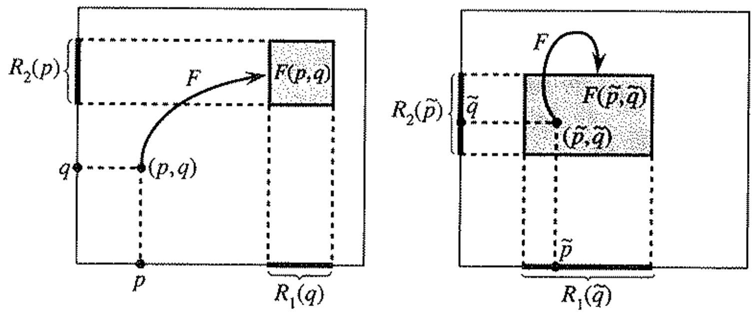
$$F(p, q) = R_1(q) \times R_2(p).$$

Esta definición es ilustrada en la Figura 7.20(a) para el caso del juego bimatricial 2×2 en que $P = Q = I$.

El tercer paso es deducir que F se comporta bien pensando que esto es cierto para R_1 y R_2. De nuevo omitimos el álgebra, aunque tampoco es muy difícil.

El cuarto paso consiste en aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani. Este demuestra que existe un punto fijo $(\tilde{p}, \tilde{q})$ que satisface

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) \in F(\tilde{p}, \tilde{q}) = R_1(\tilde{q}) \times R_2(\tilde{p}).$$



(a) (b)

Figura 7.20. La correspondencia F del teorema de Nash.

La situación es ilustrada en la Figura 7.20(b).

El paso final es observar que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un equilibrio de Nash. La estrategia mixta $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a $\tilde{q}$ porque $\tilde{p} \in R_1(\tilde{q})$. La estrategia mixta $\tilde{q}$ es una respuesta óptima a $\tilde{p}$ porque $\tilde{q} \in R_2(\tilde{p})$. □

7.8. La hexagonación de Brouwer*

Fun 7.9 ⟶

Los teoremas del punto fijo, que se usan profusamente en muchas disciplinas, son particularmente importantes para los economistas a causa de su preocupación por los equilibrios de los sistemas económicos. La prueba del teorema de Nash dada en la sección anterior muestra el método arquetípico con el que demuestran la existencia de estos equilibrios.

El teorema del punto fijo de Brouwer es enunciado a continuación. Este es el gran patriarca de la familia de estos teoremas. Incluso es más simple que el teorema de Kakutani.

Teorema 7.8.1 (Brouwer). Supongamos que X es un conjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Si la función $f : X \to X$ es continua, entonces existe un punto fijo $\tilde{x}$que satisface

$$\tilde{x} = f(\tilde{x})$$

Habitualmente, el teorema de Brouwer se demuestra recurriendo a un resultado combinatorio llamado el lema de Sperner. Sin embargo, David Gale ha demostrado que el lema de Sperner se puede sustituir por un recurso al hecho de que el juego de los hexágonos no puede terminar en empate, como se vio en la Sección 1.6.1. Desde el punto de vista matemático, el razonamiento sólo es curioso, pero es demasiado apasionante para no ocuparse de él en un libro de teoría de juegos, especialmente porque la versión de los hexágonos que hay que usar fue inventada por el propio Nash. En cualquier caso, la demostración del teorema de Brouwer nos dará una oportunidad de discutir brevemente la compacidad y continuidad.

7.8.1. Continuidad y compacidad

Aunque continuidad y compacidad son conceptos matemáticos profundos, no es necesario saber mucho acerca de ellos para evitar que su uso en un texto de teoría económica intimide.

Mates 7.8.2 ⟶

Continuidad. Hay que subrayar, en primer lugar, que la discusión se centra ahora en *funciones* en lugar de en *correspondencias*, como ocurría en la

* El título original de esta sección, *Hexing Brouwer*, contiene un juego de palabras intraducible. Además de la referencia al juego de lo hexágonos, que es fundamental para demostrar aquí el teorema de Brouwer, el verbo *to hex* también significa encantar o embrujar. (*N. del T.*)

sección anterior. En lo que sigue, X e Y serán subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Una función $f : X \to Y$ asigna un único *elemento* y del conjunto Y a cada elemento x del conjunto X. El elemento de y asignado por f a x es designado por $f(x)$.

Como la mayoría de conceptos matemáticos realmente importantes, la noción de función va acompañada de un impresionante cantidad de terminologías y notaciones alternativas. El lenguaje que un autor escoge para discutir una función depende del uso que quiera dar a la idea. Aquí, tal vez la manera más útil de pensar una función es verla como una especie de proceso que actúa sobre x y lo transforma en $f(x)$. Esta manera de pensar a veces se identifica diciendo que una función es un *operador*, una *transformación* o una *aplicación*.

Por ejemplo, al discutir el teorema de Brouwer uno se puede imaginar X como un depósito lleno de agua. Una función continua $f : X \to X$ se puede considerar como una acción de agitar el agua. Después de que el agua ha sido agitada, una gota que se encontraba situada en el punto x habrá sido desplazada a un nuevo punto $f(x)$ dentro del depósito. El teorema de Brouwer se puede leer entonces como la (en absoluto obvia) proposición según la cual en cualquier movimiento de agitación del agua siempre hay por lo menos una gota que vuelve a su posición inicial[43].

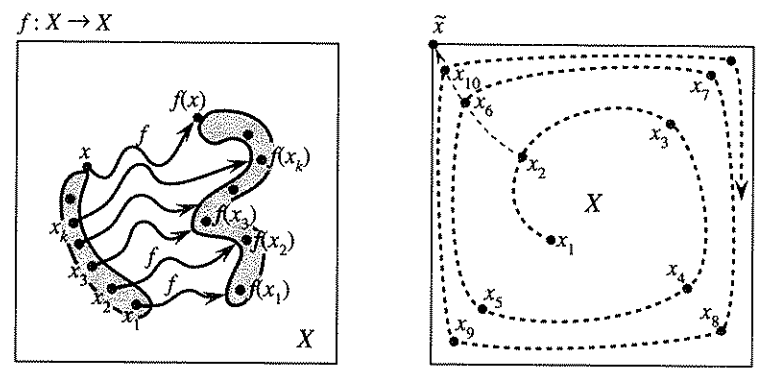
Una función $f : X \to Y$ es continua si siempre es cierto que $x_k \to x$ (cuando $k \to \infty$) implica que $f(x_k) \to f(x)$ (cuando $k \to \infty$)[44]. Esta definición prohíbe discontinuidades como la creada por Moisés al dividir las aguas del Mar Rojo. Si el agua es removida de acuerdo con un proceso continuo, las gotas que están proximas al principio todavía estarán próximas al final. Nuestra definición de continuidad se centra en un punto x que se supone está próximo[45] al conjunto $S = \{x_1, x_2, ...\}$. Después de que el agua ha sido removida, la condición de continuidad puede ser interpretada como diciendo que la gota de agua que empezó en x debe estar próxima al final al conjunto de gotas que inicialmente se encontraban en S. La Figura 7.21(a) proporciona una representación esquemática de la idea.

Cuando X e Y son intervalos de números reales, es fácil decir si la función es continua con sólo mirar su gráfico. Si el gráfico se puede dibujar sin tener que levantar el lápiz del papel, entonces la función es continua. Las

[43] Esta metáfora, por otra parte, ayuda a entender por qué el teorema de Brouwer se limita a conjuntos convexos. Imaginemos la cámara de un neumático llena de agua. Hagamos girar el agua unos grados alrededor del eje de la rueda. Esta rotación define una función continua que obviamente no tiene puntos fijos. Pero el espacio dentro de la cámara no es convexo por culpa de la cavidad central.

[44] Decir que $y_k \to y$ cuando $k \to \infty$ significa que la distancia $\|y_k - y\|$ se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando k suficientemente grande. Esto puede parecer muy simple, si es la primera vez que se enfrenta a la idea. Queda usted advertido, sin embargo, ¡de que es una noción que ha deshecho las ilusiones de muchos aspirantes a licenciados en matemáticas!

[45] De hecho, es un punto frontera del conjunto S. Los franceses llaman a x un *point d'adhérence* de S. Esto expresa muy bien la idea de que x de alguna forma está «enganchado» al conjunto S.



(a) (b)

Figura 7.21. Continuidad y compacidad.

cosas no son tan claras en el caso multidimensional. Afortunadamente, para el teorema de Nash sólo necesitamos la proposición, muy fácil, de que las funciones afines son siempre continuas.

Compacidad. Hemos explicado más de una vez que un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado. Esto facilita saber si un conjunto es compacto o no. Pero no ayuda a entender por qué los conjuntos compactos son tan útiles. La razón es que cualquier sucesión de puntos escogida en un conjunto compacto necesariamente contiene una subsucesión convergente. La importancia de esta proposición[46] no es fácil de apreciar si no se ha visto cómo se utiliza repetidamente en la demostración de teoremas importantes. Su utilización en el siguiente párrafo, para probar uno de los pasos que preparan el teorema de Brouwer, es típica.

Al probar el teorema de Brouwer, veremos que, para cada número natural k, se puede encontrar un vector x_k en el conjunto compacto X que satisface

$$\|x_k - f(x_k)\| < 1/k \tag{7.4}$$

A partir de aquí se puede deducir la existencia de un punto $\tilde{x}$ que satisface $\tilde{x} = f(\tilde{x})$, siempre que la función $f : X \to X$ sea continua. ¿Cómo se hace esto?

El primer paso es comprobar que la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x - f(x)\|$ es continua. Si $x_k \to \tilde{x}$ cuando $k \to \infty$, entonces se seguirá que $g(x_k) \to g(\tilde{x})$ cuando $k \to \infty$. Pero sabemos que $g(x_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Entonces sería $g(\tilde{x}) = 0$ y habríamos obtenido el resultado buscado.

[46] Que es una versión de un teorema no trivial atribuido conjuntamente a los matemáticos Bolzano y Weierstrass.

Desgraciadamente no existe garantía alguna de que la sucesión x_1, x_2, x_3, ... converge. Si X no fuera compacto éste podría ser un obstáculo insuperable. Pero si X es compacto, que la sucesión no converja, como aparece en la Figura 7.2(b), se soluciona de un plumazo. Simplemente abandonamos la sucesión original y la sustituimos por una subsucesión convergente. En la Figura 7.21(b) la subsucesión convergente dibujada empieza con los términos x_2, x_6, x_{10}, ...

Sólo mencionaremos otras dos consecuencias de las muchas que se derivan de esta técnica. La primera es que las funciones continuas necesariamente alcanzan un máximo y un mínimo en un conjunto compacto. A los economistas les gusta este resultado particularmente, porque siempre están maximizando o minimizando una cosa u otra.

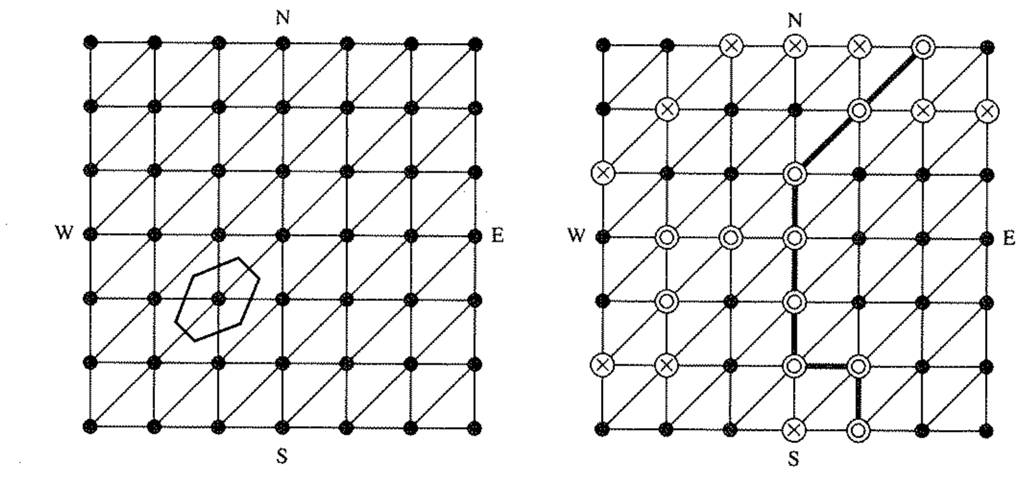
El segundo hecho es que una función es continua sobre un conjunto compacto si y sólo si su gráfico es cerrado. Este hecho es mencionado para explicar intuitivamente por qué el teorema de Kakutani puede ser considerado una consecuencia del de Brouwer. Dada una correspondencia $F : X \to X$ que se comporta bien, podemos imaginar que la usamos para construir una función $f : X \to X$ que satisface $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$. (Lo más fácil sería hacer $f(x)$ el centro de gravedad, o centroide, del conjunto convexo y no vacío $F(X)$.) Si la función $f : X \to X$ así construida es continua, se demuestra la existencia de un $\tilde{x}$ tal que $\tilde{x} = f(\tilde{x})$ aplicándole el teorema de Brouwer. Puesto que $f(\tilde{x}) \in F(\tilde{x})$, la conclusión del teorema de Kakutani se sigue inmediatamente. Por supuesto, si la correspondencia original $F : X \to X$ no fuera continua (en algún sentido general apropiado para correspondencias), no cabría abrigar ninguna esperanza de que $f : X \to X$ fuera continua. Sin embargo, las correspondencias que se comportan bien satisfacen esta condición generalizada. En particular, tienen gráficos cerrados.

7.8.2. La demostración del teorema de Brouwer

La presente demostración esquemática se limita al caso bidimensional. Además, tomaremos el conjunto X igual al cuadrado unidad $I^2 = [0, 1] \times \times [0, 1]$. La segunda restrición se puede superar fácilmente[47]. Para superar la primera es necesario modificar el razonamiento de la Sección 1.6.1 para demostrar que los hexágonos n-dimensionales no pueden terminar en empate. No es difícil, pero es tedioso.

La versión de los hexágonos inventada por Nash queda explicada en el Ejercicio 1.10.13. El tablero se reproduce en la Figura 7.22(a). El hexágono sobrepuesto al tablero debe servir para clarificar por qué el juego de los

[47] Si $g : X \to I^2$ es un homeomorfismo, se obtiene el teorema de Brouwer considerando la función continua $F : I^2 \to I^2$ definida por $F = g \circ f \circ g^{-1}$. Un homeomorfismo es algo que conserva las propiedades topológicas de un conjunto. Aquí, la propiedad topológica importante de I^2 es que no tiene agujeros. Matemáticamente, un homeomorfismo es una función continua que tiene una inversa también continua.



(a) (b)

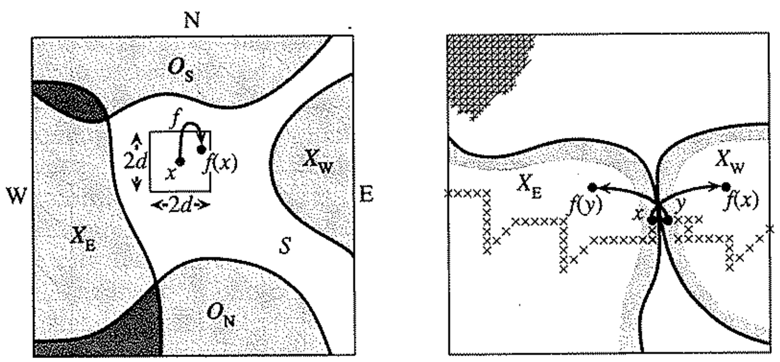
Figura 7.22. Los hexágonos de Nash.

hexágonos de Nash es realmente el mismo que el de la versión más convencional estudiada en la Sección 1.6. El tablero de la Figura 7.22(b) muestra una situación ganadora para el jugador I en los hexágonos de Nash. Sus círculos marcan todos los nodos de un camino que une N y S. El objetivo de la jugadora II es marcar con cruces todos los nodos de un camino que una W y E. Puesto que el juego es equivalente a los hexágonos normales, no puede terminar en empate. Incluso se puede decir más: si todos los nodos del tablero están marcados con un círculo o un cuadrado, entonces o bien el jugador I ha ganado o bien lo ha hecho la jugadora II[48].

Escojamos un $d > 0$. Sea O_N el conjunto de todos los x de I^2 que f desplaza a una distancia mayor que d hacia el Norte. Sea X_E el conjunto de todos los x de I^2 que f desplaza a una distancia mayor que d hacia el Este. Análogamente definimos los conjuntos O_S y X_W. La Figura 7.23(a) muestra el aspecto que pueden tener estos conjuntos. El conjunto no sombreado, S, del diagrama es el conjunto de todos los x de I^2 que *no* pertenecen a ninguno de los cuatro conjuntos O_N, O_S, X_E y X_W.

Si S no es un conjunto vacío, entonces debe existir por lo menos un x de I^2 que f no desplaza muy lejos en ninguna dirección. De hecho, $f(x)$ debe encontrarse en un cuadrado de lado $2d$ centrado en x. Por tanto, el punto x es «casi» fijo. Si un punto fijo aproximado como éste se puede encontrar para cualquier número positivo d por pequeño que sea, entonces el resultado (7.4) de la sección precedente siempre se cumple. Pero hemos visto que la compacidad de X y la continuidad de f implican en este caso la existencia

[48] Que *ambos jugadores no pueden haber ganado* se puede usar para probar el teorema de la curva de Jordan, ¡pero esto es otra historia!



(a) (b)

Figura 7.23. La demostración del teorema de Brouwer.

de un punto fijo exacto. Luego el problema ha quedado reducido a demostrar que S nunca es vacío. Lo probaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que S es vacío para algún $d > 0$. Entonces cada x en I^2 pertenecería a uno de los dos conjuntos $O = O_N \cup O_S$ o $X = X_E \cup X_W$. Recubramos I^2 con un entramado hexagonal de dimensiones reducidas, como se muestra en la Figura 7.23(b). Cada nodo en este entramado se marca con un círculo o una cruz según que pertenezca al conjunto O o al conjunto X. (Si pertenece a ambos conjuntos, márquese al azar.) Uno de los jugadores debe haber ganado el juego de los hexágonos definido de esta forma. Supongamos que el ganador es la jugadora II.

Un nodo en el extremo occidental del camino ganador de la jugadora II debe pertenecer a X_E. Un nodo en el extremo oriental de este mismo camino debe estar en X_W. Por tanto, en algún punto intermedio debe existir un par de nodos adyacentes, x e y, uno de los cuales pertenece a X_W y el otro a X_E.

Esto implica que f desplaza un punto x por lo menos d hacia el Oeste, y simultáneamente desplaza el punto adyacente y hacia el Este. Ya que la distancia entre x e y se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando la dimensión del entramado hexagonal suficientemente pequeña, esto contradice la hipótesis de que f no tiene discontinuidades[49]

[49] La expresión formal de este razonamiento tiene que basarse en la compacidad. El texto establece que, para cada número real k suficientemente grande, se pueden hallar x_k e y_k tales que $\|x_k - y_k\| < 1/k$ pero $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geqslant d$. Si $x_k \to \xi$ cuando $k \leftarrow \infty$, entonces se sigue que $y_k \to \xi$ cuando $k \to \infty$. Además, puesto que f es continua, $f(x_k) \to f(\xi)$ cuando $k \to \infty$ y $f(y_k) \to$ $\to f(\xi)$ cuando $k \to \infty$. Pero esto implica que $0 \geqslant \|f(\xi) - f(\xi)\| \geqslant d$. Para obtener esta contradicción hay que suponer que la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ converge; pero podría no ser así. Sin embargo, la compacidad de X salva la situación. Siempre existirá por lo menos una *subsucesión* que convergirá.

	Box	*Ball*
Box	2, 1	0, 0
Ball	0, 0	1, 2

Batalla de los sexos

(a)

	Box	*Ball*
Box	−2, −1	0, 0
Ball	0, 0	−1, −2

(b)

Figura 7.24. Juegos para el Ejercicio 7.9.2.

7.9. Ejercicios

1. Hallar las correspondencias de respuesta óptima para el juego bimatricial de la Figura 7.7(a). Dibujar curvas de reacción según el método de la Figura 7.2. Explicar por qué el juego tiene un único equilibrio de Nash y determinarlo. Comprobar que este puede ser localizado teniendo en cuenta que la estrategia de equilibrio de Nash de cada jugador debe dejar indiferente al otro jugador respecto a las estrategias puras que él o ella puede usar con probabilidad positiva.
2. Hallar las correspondencias de respuesta óptima para los juegos bimatriciales de la Figura 7.24[50]. Dibujar las curvas de reacción según el método de la Figura 7.2. Determinar todos los equilibrios de Nash en ambos juegos.
3. Demostrar que la correspondencia de respuesta óptima para un juego bimatricial permanece invariable si se añade una constante a cada uno de los pagos del jugador I en una columna. Mostrar que lo mismo es cierto cuando la constante se añade a todos los pagos de una fila de la jugadora II. Usar este hecho para demostrar que las dos versiones del gallina que aparecen en este capítulo tienen necesariamente los mismos equilibrios de Nash[51].

[50] El primero de ellos es otro juego muy conocido que recibe el nombre de «batalla de los sexos». Aunque es anterior al movimiento feminista, por lo menos trata a ambos jugadores simétricamente. Una pareja de recién casados en su luna de miel quedan separados en una gran ciudad que no conocen. Cada uno debe decidir independientemente del otro a dónde dirigirse por la noche con la esperanza de reunirse. Durante el desayuno eliminaron todos los posibles espectáculos para la velada, excepto un combate de boxeo y una función de ballet. Se supone que las preferencias sobre estos dos espectáculos responden a los estereotipos tradicionales.

[51] A veces se dice que una vez determinadas las correspondencias de respuesta óptima de un juego, la estructura restante del juego puede ser abandonada como irrelevante. Si es así, entonces que un equilibrio de Nash Pareto-domine a los otros no puede ser un hecho significativo para seleccionar un equilibrio. Por ejemplo, en la batalla de los sexos de la Figura 7.24(a), se puede conseguir que (*box*, *box*) Pareto-domine a (*ball*, *ball*) añadiendo 2 a cada uno de los pagos del jugador I en la columna 1 y a cada uno de los pagos de la jugadora II en la fila 1. Esto no altera las correspondencias de respuesta óptima.

	A	B
A	−4, 2, 2	0, 0, 0
B	0, 0, 0	−8, 4, 4

El jugador III elige A

	A	B
A	−6, 3, 3	0, 0, 0
B	0, 0, 0	−2, 1, 1

El jugador III elige B

Figura 7.25. El juego de tres jugadores del Ejercicio 7.9.6.

4. Explicar por qué una estrategia mixta es una respuesta óptima a algo si y sólo si cada una de las estrategias puras a las que asigna probabilidad positiva es una respuesta óptima a la misma cosa.

Mates

5. Consideremos el juego bimatricial de la Figura 6.22(a). Cada una de las estrategias mixtas $(1 - p, p)^{\mathrm{T}}$ del jugador I queda determinada por un número real p que satisface $0 \leqslant p \leqslant 1$. Cada una de las estrategias mixtas de la jugadora II queda determinada por un par (q, r) de números reales que satisfacen $0 \leqslant q$, $0 \leqslant r$ y $q + r \leqslant 1$.
   a) Para cada (q, r), hallar el conjunto $R_1(q, r)$ de todas las respuestas óptimas del jugador I. Dibujar esquemáticamente el gráfico tridimensional $p = R_1(q, r)$. (El plano $7q - 6r = 1$ es relevante.)
   b) Para cada p, hallar el conjunto $R_2(p)$ de las respuestas óptimas a p de la jugadora II. Dibujar esquemáticamente el gráfico tridimensional $(q, r) = R_2(p)$. (Los valores $p = 1/2$ y $p = 2/3$ son relevantes.)
   c) ¿Dónde se cortan los graficos de respuesta óptima? ¿Cuál es el único equilibrio de Nash? ¿Qué gana cada jugador cuando este se juega?
   d) El juego estudiado aquí es el juego de desacuerdo de la Sección 6.9. ¿Qué gana cada jugador si la solución de negociación de Nash regular se usa con la hipótesis de que si no se puede alcanzar un acuerdo, se jugará el equilibrio de Nash en el juego del desacuerdo?[52].
6. Consideremos el juego de tres jugadores, suma cero y jugadas simultáneas de la Figura 7.25 en el cual cada jugador escoge entre A y B.
   a) Hallar los dos equilibrios de Nash con estrategias puras.
   b) Hallar el equilibrio de Nash con estrategias mixtas.

[52] En oposición a la hipótesis de la Sección 6.9, por la que los jugadores se ven obligados a cumplir las amenazas a las que se habían comprometido anteriormente. La hipótesis del Ejercicio 7.9.5 tiene sentido cuando estos compromisos son imposibles.

   c) Supongamos que es conocimiento común antes de empezar el juego que los jugadores I y II pueden llegar a un acuerdo vinculante sobre qué jugar. ¿A qué acuerdo predice usted que llegarían? ¿Redundaría en beneficio de la jugadora II cumplir el acuerdo, si ella fuera liberada de la obligación de hacerlo sin que los demás jugadores se enteraran? ¿Qué pasaría si los jugadores I y II fueran librados de sus obligaciones sin que el jugador III se enterara?
7. Explicar por qué una estrategia de equilibrio de Nash nunca requiere usar una estrategia fuertemente dominada con probabilidad positiva. Dar un ejemplo de un juego en el que una estrategia de equilibrio de Nash esta débilmente dominada. Explicar por qué cada juego finito tiene por lo menos un equilibrio de Nash en el que ninguna estrategia débilmente dominada es usada con probabilidad positiva[53].

Mates

8. ¿Por qué un juego bimatricial es «simétrico» si las matrices de pagos satisfacen $A = B^{\mathrm{T}}$? Demostrar que un juego bimatricial simétrico tiene necesariamente un equilibrio de Nash simétrico.

Mates

9. Una estrategia *completamente mixta* asigna probabilidad positiva a cada una de las estrategias puras de un jugador. Si la matriz de pagos de cada jugador en un juego bimatricial es no singular, demostrar que el juego puede tener a lo sumo un equilibrio de Nash en el que ambos jugadores usan estrategias completamente mixtas.

Mates

10. Sea $\Pi_i : P \times Q \to \mathbb{R}$ la función de pagos del jugador i en un juego bimatricial en el que el conjunto de estrategias mixtas del jugador I es P y el conjunto de estrategias mixtas de la jugadora II es Q. Demostrar que para cualquier equilibrio de Nash (p, q),

$$\max_{p \in P} \min_{q \in Q} \Pi_1(p, q) \leqslant \min_{q \in Q} \max_{p \in P} \Pi_1(p, q) \leqslant \Pi_1(\tilde{p}, \tilde{q}).$$

¿Cuál es la desigualdad correspondiente para la función de pagos de la jugadora II? ¿Por qué las dos desigualdades implican que ninguno de los dos jugadores puede conseguir menos que su nivel de seguridad en un equilibrio de Nash? ¿Se le ocurre alguna manera de entender por qué esto debe ser verdad sin hacer ningún cálculo?

11. Recordemos del Ejercicio 7.9.1 que el juego bimatricial de la Figura 7.7(a) tiene un único equilibrio de Nash. Demostrar que al jugar este equilibrio de Nash los jugadores sólo obtienen sus niveles de seguridad. Demostrar, sin embargo, que la estrategia de seguridad del jugador I no coincide con su estrategia del equilibrio de Nash.

[53] Para la última pregunta, empezar por aplicar el teorema de Nash sobre la existencia de equilibrios de Nash en juegos finitos al juego obtenido al eliminar todas las estrategias débilmente dominadas.

Econon 12. Dibujar esquemáticamente las regiones de pagos cooperativos para el dilema del prisionero[54] y el gallina dados en la Figura 7.3. Si los jugadores negocian un acuerdo vinculante usando la teoría de amenazas de Nash de la Sección 6.9, decidir en cada juego qué resultados de sus regiones de pagos cooperativos se elegirán. Hallar las amenazas que los jugadores harán sobre la estrategia mixta que usarán en el juego, si se rompen las negociaciones.

Econ 13. En la Sección 7.2.1 todas las empresas fabrican el mismo producto a un precio unitario c. Considérese ahora el caso en que los bienes producidos se diferencian. El jugador I puede continuar produciendo *widgets* al precio unitario de c_1, pero la jugadora II ahora produce *wowsers* al coste unitario de c_2. Si se producen q_1 *widgets* y q_2 *wowsers*, los precios respectivos de ambos productos quedan determinados por las ecuaciones de demanda $p_1 = M - 2q_1 - q_2$ y $p_2 = M - q_1 - 2q_2$. Adaptar el modelo del duopolio de Cournot a esta nueva situación y hallar:

a) Las curvas de reacción de los jugadores.
b) Las cantidades producidas en equilibrio y los precios a que se venden los productos.
c) Los beneficios en el equilibrio.

Econ 14. Repetir el Ejercicio 7.9.13 con las ecuaciones de demanda $p_1 = M - 2q_1 + q_2$ y $p_2 = M + q_1 - 2q_2$. Comentar qué cambios son necesarios en la valoración de los productos por los consumidores para obtener estas nuevas ecuaciones de demanda.

Econ 15. En el modelo del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1 es conocimiento común que ambos jugadores tienen un precio unitario c. Supongamos que esto continúa siendo cierto del coste unitario de la jugadora II, pero que el coste unitario del jugador I sólo lo conoce él mismo, de manera que la jugadora II se ve obligado a conjeturarlo al tomar una decisión sobre la producción. Supongamos que es conocimiento común que la jugadora II tiene la seguridad de que el precio unitario del jugador I pertenece al conjunto $C = \{c_1, c_2, ..., c_k\}$ y que asigna probabilidad r_i a cada c_i. Debemos suponer que ambos jugadores quieren maximizar el beneficio *esperado*.

Modelizar esta situación como un juego introduciendo una jugada al azar inicial que selecciona el precio unitario del jugador I. El jugador I conoce el resultado de esta jugada al azar, pero la jugadora II no. A continuación se juega el juego de jugadas simultáneas de Cournot.

[54] Puede hacer trampa y copiarse esta región de pagos de la Figura 7.14, pero no se copie la otra región de pagos cooperativos de la Figura 7.18, porque ésta se deriva de una versión distinta del gallina.

a) Dibujar esquemáticamente un árbol del juego para esta situación. Prestar atención a dónde se colocan los conjuntos de información.
b) Explicar por qué una estrategia pura q_2 para la jugadora II es simplemente un número en el intervalo $[0, M]$, pero una estrategia pura para el jugador I es una función $q_1 : C \to [0, M]$[55].
c) Si el jugador I produce $q_1(c_i)$ *widgets* al saber que su precio unitario es c_i, ¿cuál será el beneficio esperado de la jugadora II si produce q_2 *widgets*?
d) Si la jugadora II produce q_2 *widgets*, ¿cuál sería la producción óptima del jugador I después de saber que su coste unitario es c_i? Pero el jugador I ha de elegir una estrategia pura antes de conocer su coste unitario. ¿Cuál es su respuesta óptima al uso por la jugadora II de la estrategia pura q_2?
e) ¿Qué es un equilibrio de Nash en este juego? ¿Cuánto produce la jugadora II en equilibrio? ¿Cuánto produce el jugador I si su coste unitario es c_i?

Econ 16. Consideremos el juego de n jugadores del oligopolio de Cournot de la Sección 7.2.1.

a) Supongamos que el juego se modifica de manera que cada empresa ha de pagar un coste fijo de F, independientemente de la cantidad que produce, para poder entrar en la industria del *widget*. Demostrar que no se modifica la conducta de nadie, a condición de que el coste fijo F sea menor que el beneficio de cada jugador en equilibrio.
b) Si el coste fijo sobrepasa el beneficio en equilibrio, entonces por lo menos una empresa hubiera salido ganando no entrando en la industria del *widget*. Suponiendo que no hay más barreras de entrada que el pago del coste fijo F, determinar el número de empresas que terminarán produciendo *widgets*. ¿Qué ocurre cuando $F \to 0$?

Econ 17. En el modelo del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1, las empresas deciden independientemente cuántos *widgets* producirán, y entonces el precio de venta de cada *widget* queda determinado por la ecuación de demanda. El modelo de Bertrand de la competencia imperfecta es muy distinto. En el modelo de Bertrand, las empresas deciden independientemente el precio de venta de los *widgets*[56]. La empresa que fija un precio menor satisface toda la

[55] En la Sección 7.2.2, una estrategia pura también es una función.
[56] A las empresas *no* se les permite reducir el precio si resulta que no le salen compradores. Esto es raramente una hipótesis realista. Tampoco se hace más realista cuando el modelo se explica en términos de las «conjeturas de Bertrand» que hacen los jugadores. En este caso, los jugadores pueden modificar los precios si quieren, pero cada empresa conjetura que una modificación en su precio no conduce a que las otras empresas modifiquen los suyos.

demanda a este precio. La empresa con el precio más alto no vende ni un *widget*[57]. Si las demás cosas son como en la Sección 7.2.1, demostrar que el único equilibrio de Nash exige que ambas empresas vendan *widgets* al coste unitario c de producción. ¿Cuáles serán entonces sus beneficios? ¿Qué relación guarda esta conclusión con la competencia perfecta? ¿Cómo cambian las cosas si las empresas no tienen los mismos costes de producción?

Econon

18. Los Ejercicios 7.9.13 y 7.9.14 tratan del modelo del duopolio de Cournot con productos diferenciados. Repetir estos ejercicios en el caso del duopolio de Bertrand.

19. Los consumidores de *widgets* se encuentran situados con densidad uniforme[58] ρ a lo largo de una calle de longitud l. Cada consumidor necesita a lo sumo un *widget*. Cada consumidor comprará el *widget* que necesita allí donde se lo vendan más barato[59]. Al contar los costes, no sólo considera el precio de venta, sino también los gastos de transporte. A un consumidor le cuesta tx^2 dólares el trasladarse una distancia x y volver.

    Dos empresas de *widgets* quieren abrir puntos de venta en la calle. Cada empresa escoge independientemente dónde situar su punto de venta. Cuando ya han sido abiertos, entran en una competición de Bertrand. Anuncian simultáneamente los precios a los que venderán y atienden a este precio cualquier pedido que les llega. El coste unitario para las empresas continúa siendo c dólares. No hay costes fijos.

    a) Supongamos que el jugador I sitúa su punto de venta a la distancia x del extremo occidental de la calle y la segunda jugadora lo coloca a la distancia X del extremo oriental de la calle. Si la jugadora II adopta el precio P, determinar el número de compradores que conseguirá el jugador I si adopta el precio p. ¿Cuáles serán sus beneficios?

    b) Cuando x y X ya han sido elegidos, el subjuego que se obtiene es un juego de jugadas simultáneas en el que las estrategias puras para los jugadores I y II son sus precios p y P. Hallar el único equilibrio de Nash de este subjuego para todos los valores de x y X. ¿Qué beneficios conseguirán los jugadores jugando este equilibrio de Nash?

    c) Ahora consideremos el juego de jugadas simultáneas en el que se eligen las ubicaciones x y X. Daremos por supuesto que se jugará un equilibrio de Nash en el juego de fijar precios que viene a continuación. ¿Cuál es el único equilibrio de Nash?

[57] Supóngase que la demanda se divide por igual entre las empresas, si ambas fijan el mismo precio.

[58] Esto significa que hay ρx consumidores en cada segmento de longitud x de la calle.

[59] Su precio de reserva para un *widget* es tan alto, que no es necesario considerarlo.

    d) Discutir la importancia de la idea de equilibrio subjuego-perfecto para el análisis precedente.

    e) ¿Dónde se sitúan las empresas en equilibrio? ¿Qué precios fijan? ¿Qué beneficios obtienen?

Econ

20. En la historia de la Sección 7.2.1, todos los consumidores pagan lo mismo por un *widget*. A veces, sin embargo, una empresa puede discriminar entre consumidores y cargarles a unos un precio mayor que a otros. Un monopolista perfectamente discriminador[60] es aquel que puede vender cada *widget* al precio máximo que su comprador estaría dispuesto a pagar por él.

    Supongamos que se gastan A dólares comprando *widgets* cuando todos los *widgets* se venden a P dólares. El *excedente del consumidor* es entonces $(B - A)$ dólares, donde B es la cantidad que se gastaría comprando *widgets* si un monopolista perfectamente discriminador vendiera los mismos *widgets* a los mismos consumidores. Si la ecuación de demanda es $p = M - q$, explicar por qué el excedente del consumidor es el área encerrada por las rectas $q = 0$, $p = P$ y $p + q = M$. Comprobar que los valores dados en la Secciones 7.2.1 y 7.2.1 para los excedentes del consumidor son correctos.

21. Analizar el juego del líder y el seguidor de la Figura 7.7(a) como en la Sección 7.2.2, salvo que ahora la jugadora II será el líder y el jugador I el seguidor. ¿Cuál es el «equilibrio de Stackelberg»?

Econ

22. El juego de demandas de Nash de la Sección 7.4 es un juego de jugadas simultáneas. ¿Cuál sería el resultado si el jugador I actuara como líder y jugara primero, y la jugadora II actuara como seguidora y jugara en segundo lugar? ¿Cómo se relaciona esta situación con el juego del ultimátum de la Sección 5.8.1?

Econ

23. Analizar de nuevo el modelo del oligopolio con n jugadores de la Sección 7.2.1, pero sin la hipótesis de que los jugadores juegan simultáneamente. Supongamos por el contrario que juegan a seguir el líder. Primero, el jugador I escoge la cantidad q_1 que él producirá. En segundo lugar, la jugadora II escoge su cantidad q_2. Después, el jugador III escoge q_3, conociendo q_1 y q_2. Y así sucesivamente.

    ¿Cuál es el «equilibrio de Stackelberg» para este juego? Demostrar que el resultado de equilibrio se aproxima a la competencia perfecta cuando $n \to \infty$.

Econ

24. Analizar el modelo del oligopolio con n jugadores de la Sección 7.2.1, pero sin suponer que todos los jugadores juegan simultáneamente. Supongamos, por el contrario, que el jugador I escoge la cantidad q_1 en primer lugar. Tras observar su elección, los restantes jugadores escogen simultáneamente las cantidades a producir. ¿Qué ocurre cuando $n \to \infty$?

[60] Esta es discriminación por el precio «de primer grado». Los economistas también consideran discriminaciones de segundo y tercer grados.

Econ 25. En el juego de ubicaciones del Ejercicio 7.9.19, demostrar que la conclusión no varía cuando una empresa hace de líder y se ubica en un punto en primer lugar, suponiendo que no cambia nada más.

Econ 26. n granjeros pueden producir sin costes tanto trigo como quieran. Supongamos que el k-ésimo granjero produce W_k, de forma que la cantidad total producida es $W = W_1 + W_2 + ... + W_n$. El precio al que se vende queda determinado por la ecuación de demanda $p = e^{-W}$.

a) Demostrar que la estrategia de producir una unidad de trigo domina fuertemente todas las demás estrategias de un granjero que quiere maximizar beneficios. Comprobar que el uso de esta estrategia proporciona a un granjero un beneficio de e^{-n}.

b) Explicar por qué el mejor de los acuerdos que tratan por igual a todos los granjeros requiere que cada uno sólo produzca $1/n$ unidades de trigo. Comprobar que el beneficio de un granjero sería entonces $1/en$. ¿Por qué es necesario que este acuerdo sea obligatorio, si ha de ser respetado por granjeros que quieren maximizar beneficios?

c) Comprobar que xe^{-x} tiene un valor máximo cuando $x = 1$. Deducir que todos los granjeros obtendrían un beneficio mayor si todos respetaran el acuerdo, en lugar de producir cada uno una unidad e inundar así el mercado.

d) Los especialistas en ciencia política llaman a esta situación la «tragedia del prado comunal»[61]. ¿Por qué es este juego de n jugadores una generalización del dilema del prisionero?

27. Un problema que los especialistas en ciencia política consideran relacionado con la «tragedia del prado comunal» discutido en el Ejercicio 7.9.26 se refiere a las razones por las que la gente vota. Supongamos que 100 personas viven en un pueblo, de las cuales 51 votan por el candidato conservador y 49 por el liberal. Los votantes consiguen un pago de $+10$ si su candidato es elegido y un pago de -10 si lo es el de la oposición. Pero ir a votar es un estorbo que les cuesta un útil. Los que se quedan en casa y no votan se ahorran este coste, pero obtienen la misma recompensa, o castigo, que los que asumen el coste de votar.

a) ¿Por qué no es un equilibrio de Nash que todo el mundo vote?

b) ¿Por qué no es un equilibrio de Nash que nadie vote?

c) Hallar un equilibrio de Nash en el que todos los conservadores usan la misma estrategia y todos los liberales usan la misma estrategia[62]. ¿Cuál es el número esperado de votantes cuando se usa este equilibrio de Nash?

[61] [En el original, «tragedy of the commons»; nota del traductor.] La historia contada habitualmente trata de unos campesinos que pueden llevar, cada uno, tantos animales como quieran a pastar a un pedazo de tierra que comparten con los demás. El resultado es que el prado compartido acaba destrozado por sobreuso. Por supuesto, en el Ejercicio 7.9.26 no es ninguna tragedia para el consumidor que el mercado resulte inundado de trigo.

28. En la Inglaterra victoriana una dama y un caballero se acercan a una puerta giratoria, entonces acabadas de inventar. En la variante del gallina en que se encuentran, existen dos equilibrios de Nash con estrategias puras: la dama puede esperar a que el caballero pase primero, o el caballero puede esperar para dejar pasar a la dama. ¿Cuál de estos equilibrios es focal?

29. La batalla de los sexos aparece en la Figura 7.24(a).

a) Dibujar esquemáticamente un diagrama que muestre la región de pagos cooperativos de la batalla de los sexos suponiendo que no se admiten ni la libre eliminación ni utilidades transferibles. Comprobar que el resultado (3/2, 3/2) es factible si son posibles acuerdos vinculantes previos al juego.

b) Dibujar esquemáticamente un diagrama que muestre la clausura convexa de los equilibrios de Nash de la batalla de los sexos. ¿Por qué un acuerdo no vinculante alcanzado en una charla de café previa al juego puede conducir al resultado (3/2, 3/2)?

c) Dibujar esquemáticamente un diagrama que muestre la región de pagos no cooperativos de la batalla de los sexos. Este es el conjunto de resultados que se pueden obtener cuando los jugadores escogen estrategias de forma totalmente independiente. La coordinación previa al juego queda por tanto excluida[63]. Comprobar que la región de pagos no cooperativos no es convexa. Si ambos jugadores usan independientemente la estrategia mixta que asigna probabilidad 1/2 a cada estrategia pura, se obtiene el resultado 3/4, 3/4). Demostrar que este resultado es un punto Pareto-eficiente de la región de pagos no cooperativos. En particular, el punto (3/2, 3/2) no es un resultado que se pueda alcanzar cuando los jugadores se ven forzados a elegir independientemente.

d) Supongamos que los jugadores no tienen la oportunidad de realizar una negociación previa al juego en la batalla de los sexos, pero que se usa la misma convención que en el Ejercicio 7.9.28 para seleccionar un equilibrio. ¿Cuál será el resultado?

[62] Si acuden un mismo número de conservadores y liberales a votar, el candidato se escoge lanzando una moneda al aire.

[63] Esto es más difícil de lo que parece a primera vista. Una manera de proceder es considerar primero los resultados que son posibles si el jugador I usa la estrategia mixta $(1 - p, p)^T$. Cuando $p = 0$, se trata del segmento que une (2, 1) y (0, 0). Cuando $p = 1$, se trata del segmento que une (0, 0) y (1, 2). Cuando $p = 1/2$, se trata del segmento que une $a = 1/2\,(2, 1) + (1/2\,(0, 0)$ y $b = 1/2\,(0, 0) + 1/2\,(1, 2)$. El punto a se encuentra situado a mitad de camino entre (2, 1) y (0, 0). El punto b se encuentra situado a mitad de camino entre (0, 0) y (1, 2). Después de trazar estos segmentos para $p = 0, 1/10, 2/10, ..., 1$, se reconocerá la forma de la región de pagos no cooperativos. ¡Se recomienda el uso de papel cuadriculado!

e) Supongamos no sólo que los jugadores no tienen oportunidad para una negociación previa al juego en la batalla de los sexos, sinó también que no disponen de convención alguna para romper la simetría. ¿Por qué esto deja el equilibrio de Nash mixto como la única posible recomendación que puede hacer un libro de teoría de juegos? El equilibrio de Nash mixto requiere que el jugador I use su primera estrategia pura con probabilidad 2/3 y que la jugadora II use su segunda estrategia pura con la misma probabilidad. Comprobar que el resultado que se obtiene es (2/3, 2/3).

f) Demostrar que el nivel de seguridad de cada jugador en la batalla de los sexos es 2/3, pero que las estrategias de seguridad de los jugadores no coinciden con las estrategias del equilibrio mixto. La estrategia de seguridad del jugador I le exige usar su primera estrategia pura con probabilidad1/3, y la estrategia de seguridad de la jugadora II le exige usar su segunda estrategia pura con probabilidad 1/3.

30. El juego de la Figura 7.24(b) se puede llamar la batalla de los sexos australiana, porque sus regiones de pagos cooperativos y no cooperativos son versiones «cabeza abajo» de los de la batalla de los sexos. Para cada una de las preguntas sobre la batalla de los sexos en el Ejercicio 7.9.29, contestar una pregunta análoga para su prima australiana.

31. Supongamos que antes de jugar la batalla de los sexos el jugador I tiene la oportunidad de comprometerse a jugar una de sus estrategias puras. Si adquiere el compromiso, tiene la obligación de respetarlo cuando la batalla de los sexos se juegue posteriormente. Si decide no adquirir compromiso alguno, la batalla de los sexos se juega de la forma habitual. Dibujar la forma extensiva de un juego en el que se modeliza esta oportunidad de comprometerse como un movimiento de apertura del jugador I. Supongamos que la jugadora II conoce la elección del jugador I en su jugada de apertura cuando se juega posteriormente. Analizar el juego así construido.

¿Cuál sería la diferencia en la forma extensiva si la jugadora II no conociera qué elige el jugador I en su jugada de apertura? Afecta esto al análisis del juego?

32. Supongamos que los pagos en la batalla de los sexos de la Figura 7.24(a) son en dólares, y que ambos jugadores son neutrales al riesgo respecto al dinero. Antes de jugar la batalla de los sexos, el jugador I puede amenazar primero a la jugadora II. El se puede comprometer a jugar cualquier estrategia mixta en la batalla de los sexos, si la jugadora II no le paga una determinada cantidad de dinero. La jugadora II puede pagar o negarse. Si se niega, el jugador I tiene la obligación de llevar a cabo su amenaza. Si ella paga, él no puede continuar el chantaje con otra amenaza, pero puede comprometerse a jugar una de sus estrategias puras, como en el Ejercicio 7.9.31. ¿Cuál será la amenaza[64] del jugador I y cuánto pedirá? ¿Por qué la jugadora II pagará?

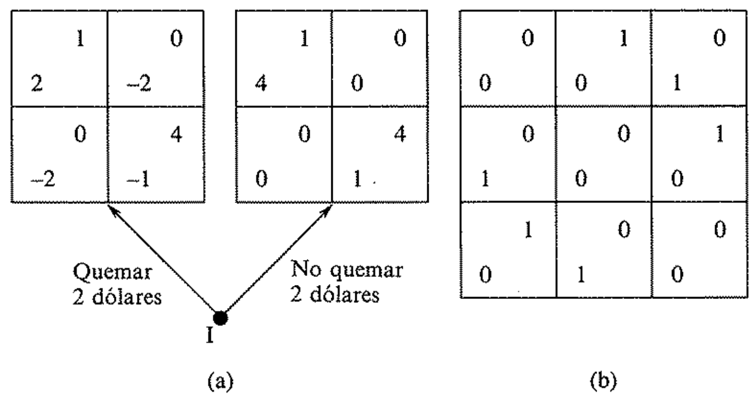


Figura 7.26. Los juegos de los Ejercicios 7.9.34 y 7.9.40.

Filo

33. Cuando la batalla de los sexos se juega tácitamente sin una convención que rompa la simetría, un libro de teoría de juegos que recomiende algo ha de recomendar necesariamente el equilibrio mixto. En el Ejercicio 7.9.29 se observó que ambos jugadores sólo consiguen su nivel de seguridad cuando se usa este equilibrio mixto. Pero se pueden *asegurar* su nivel de seguridad desviándose de la recomendación del libro y jugando sus estrategias de seguridad. Se puede contrarrestar esta objeción observando que un jugador consigue más con la estrategia del equilibrio mixto que con la estrategia de seguridad, si el oponente se pasa a la estrategia de seguridad. Comprobar que esto es cierto para la batalla de los sexos, pero falso para la versión australiana del Ejercicio 7.9.30.

Analizar la solidez de una recomendación en favor del equilibrio mixto en estas circunstancias. Revisar el Ejercicio 7.9.11 y comentar la proposición según la cual, cuando un juego bimatricial tiene un único equilibrio de Nash, éste ha de ser el que un libro de teoría de juegos debería recomendar a los jugadores[65].

Filo

34. El jugador I y la jugadora II son neutrales al riesgo respecto al dinero. Han de jugar la versión de la batalla de los sexos dada en la Figura 7.24(a) en la que los pagos representan cantidades en dólares y cada 2 es sustituido por un 4. La única iniciativa previa al juego

[64] Si la jugadora II adopta una actitud desafiante, la peor consecuencia posible es que obtiene su nivel de seguridad. ¿Por qué el teorema del minimax de Von Neumann es relevante para esta conclusión?

[65] Como se ha dicho en la Sección 7.1.4, el consejo que uno puede ofrecer no siempre resultará muy útil al jugador.

permitida es que el jugador I se saque dos dólares del bolsillo, y elija entre quemarlos o no quemarlos. La jugadora II observa esto pasivamente. La Figura 7.26(a) es un esquema para el juego así extendido en el que la iniciativa previa al juego ha sido incorporada como una jugada formal.

a) Escribir la forma estratégica 4×4 del juego extendido.

b) Hallar todos los equilibrios de Nash con estrategias puras. ¿Cuáles son equilibrios subjuego-perfectos?

c) Usando el método de la eliminación sucesiva de estrategias fuerte y débilmente dominadas, reducir los equilibrios a sólo uno[66].

d) El equilibrio restante debería requerir que el jugador I no quemara el dinero, y que se jugara el equilibrio más favorable a él en la batalla de los sexos que se obtiene como subjuego. Se dice a menudo que nunca hay que selecionar los equilibrios que no sobreviven la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. Este ejemplo, le hace desconfiar de este principio?[67].

Econ 35. La Sección 7.5.5 analiza el comportamiento colusivo en el juego del duopolio de Cournot.

a) Supongamos que se pueden alcanzar acuerdos vinculantes, y que la alternativa a un acuerdo es que se juega el juego del duopolio de Cournot no colusivo. ¿Cuál es el conjunto de negociación (Sección 5.4.3) para el problema de negociación así obtenido?

b) Supongamos que podemos confiar en que el jugador I cumplirá los acuerdos a los que se haya comprometido, pero que la jugadora II no los respetará, si tiene un incentivo para hacerlo. En este caso, ¿qué acuerdo Pareto-eficiente es compatible con incentivos?

Econ 36. Supongamos que las empresas en la versión del juego del duopolio de Cournot del Ejercicio 7.9.13 intentan coludir.

a) ¿Cuál es la región de pagos cooperativos? (Supondremos «utilidad transferible» y libre eliminación.)

[66] No se preocupe si elimina un equilibrio subjuego-perfecto. Este es un juego de información imperfecta porque los jugadores juegan simultáneamente en los subjuegos de la batalla de los sexos.

[67] Este ejemplo presenta la idea controvertida de la ¡inducción hacia adelante!, propuesta por Kohlberg y Mertens. Esta supone que las acciones de un jugador en los primeros momentos del juego «señala» el equilibrio que el jugador persigue. Al evaluar el mecanismo de selección de equilibrios que el ejemplo ofrece, pregúntese que pensaría usted de un oponente que ostentosamente quema dos dólares antes de sentarse a jugar la batalla de los sexos con usted. Existen situaciones en las que puede valer la pena hacer público su desprecio por el dinero, pero aquí esta conducta no puede ser racional, si el método de selección de equilibrios es válido. Sin embargo, durante la eliminación reiterada de estrategias dominadas usada para defender el equilibrio seleccionado tenemos que proceder como si esta exhibición de irracionalidad fuera irrelevante. Como sabemos por el Ejercicio 4.8.21, la justificación de estas eliminaciones requiere hipótesis bastante fuertes sobre lo que los jugadores saben acerca de la racionalidad del otro.

b) Si es posible llegar a acuerdos vinculantes, determinar el par de beneficios que resultará si se usa la solución de negociación de Nash con poderes de negociación $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$, y si el punto de desacuerdo d se sitúa en el par de beneficios obtenidos cuando se usa el único equilibrio de Nash del juego no colusivo. ¿Cuál será la producción de cada empresa bajo esta situación colusiva?

c) Si los acuerdos no son vinculantes para el jugador I, ¿qué haría él?

Econ 37. Supongamos que amenazas y acuerdos vinculantes son posibles en la versión colusiva del duopolio de Cournot estudiada en la Sección 7.5.5. Es obvio que si los jugadores usan la teoría de las amenazas de Nash descrita en la Sección 6.9, entonces el acuerdo colusivo al que llegarán es que cada uno produce la mitad de la producción del monopolista. ¿Por qué es así? No es muy evidente qué amenazas harán las empresas cuando empiecen las negociaciones.

a) Si se usa la solución de negociación de Nash en la Figura 7.16(a) con el punto de desacuerdo $d = (\pi_1, \pi_2)$, ¿qué acuerdo se alcanzará?

b) Deducir que la selección de amenazas en la teoría de las amenazas de Nash se reduce a un juego de suma cero en el que el jugador I busca maximizar $\pi_1 - \pi_2$.

c) Expresar $\pi_1 - \pi_2$ en términos de las producciones q_1 y q_2. Calcular a partir de aquí el nivel de seguridad del jugador I en el juego de suma cero.

d) Explicar por qué cada jugador abrirá las negociaciones amenazando con producir la producción del monopolista si las negociaciones fracasaran.

38. La Sección 7.6.2 analiza el concepto de equilibrio correlacionado para la variante del gallina dado en la Figura 7.17(a). Supongamos que la matriz de la Figura 7.17(b) es sustituida por una matriz cuyas casillas son las probabilidades p_{ij}. Si se repite la historia de la Sección 7.6.2 con esta nueva matriz de probabilidades, demostrar que el resultado es un equilibrio correlacionado si y sólo si cada probabilidad de la diagonal principal de la nueva matriz no supera a ninguna de las probabilidades que no están en la diagonal principal.

Mates 39. El Ejercicio 7.9.38 caracteriza todos los equilibrios correlacionados para la variante del gallina dada en la Figura 7.17(a). Expresar las cuatro desigualdades obtenidas en el Ejercicio 7.9.38 en términos de p_{11}, p_{12} y p_{21} pensando que las probabilidades deben sumar 1. Escribir las otras desigualdades que estas tres cantidades deben satisfacer por el simple hecho de que, juntamente con p_{22}, constituyen un sistema de probabilidades. El sistema de desigualdades así construido define un conjunto convexo de $\mathbb{R}^3$. Hallar los puntos extremos de este conjunto.

40. Demostrar que el juego bimatricial de la Figura 7.26(b) tiene un único equilibrio de Nash en el que ambos jugadores usan cada estrategia pura con probabilidad 1/3. Demostrar que los jugadores consiguen más si pueden usar un equilibrio correlacionado en el que se asigna una probabilidad 1/6 a cada casilla fuera de la diagonal principal. Dibujar la región de pagos cooperativos (Sección 5.3) para este juego. Explicar por qué el resultado del equilibrio correlacionado hallado es un punto Pareto-eficiente de esta región.

Mates 41. La producción de una empresa consiste en un paquete de mercancías escogido de un conjunto de producción Y compacto y estrictamente convexo de $\mathbb{R}^n$. El paquete de productos es escogido para maximizar el beneficio $p^\top y$, donde p es el vector de precios[68]. Puesto que Y es *estrictamente* convexo, siempre existe una única producción que maximiza beneficios, $y = s(p)$ para cada vector de precios p. La función $s : \mathbb{R}^n_+ \to Y$ es la función de oferta de la empresa. Contestar las preguntas entre paréntesis en la siguiente «prueba» de que la función de oferta es continua y señalar un error en el argumento. ¿Qué puede hacerse para arreglarlo?[69].

Sea $p_k \to p$ cuando $k \to \infty$. Escribamos $y_k = s(p_k)$. Entonces, para cada z en Y, $p_k{}^\top z \leqslant p_k{}^\top y_k$. (¿Por qué?) Si $y_k \to y$ cuando $k \to \infty$, se sigue que, para cualquier z en Y, $p^\top z \leqslant p^\top y$. (¿Por qué?) De aquí, $y = s(p)$. (¿Por qué?) Luego, $s(p_k) \to s(p)$ cuando $k \to y$, por tanto, s es continua.

Mates 42. Los equilibrios de la teoría económica no siempre son los equilibrios de algún juego. Puede ser, por ejemplo, que el conjunto de estrategias del i-ésimo jugador es S_i, pero que alguna restricción impida escoger libremente entre todas las estrategias de S_i. Con frecuencia el subconjunto T_i al que debe limitarse este jugador depende del vector s de *todas* las elecciones de los jugadores[70]. Esto es, $T_i = G_i(s)$, donde $G_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to S_i$.

a) Usar el teorema del punto fijo de Kakutani para dar el esquema de una demostración de que existe por lo menos un $\tilde{s}$ tal que $\tilde{s}_i \in G_i(\tilde{s})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Hacer una lista de los resultados matemáticos que la demostración da por supuestos.

b) Completar el razonamiento para obtener una versión del «teorema del equilibrio social» de Debreu. Este afirma que se puede encontrar un $\tilde{s}$ para el cual no sólo es cierto que se cumple *a*), sino que $\tilde{s}_i$ es la elección *óptima* del jugador i en el conjunto $G_i(\tilde{s})$.

---

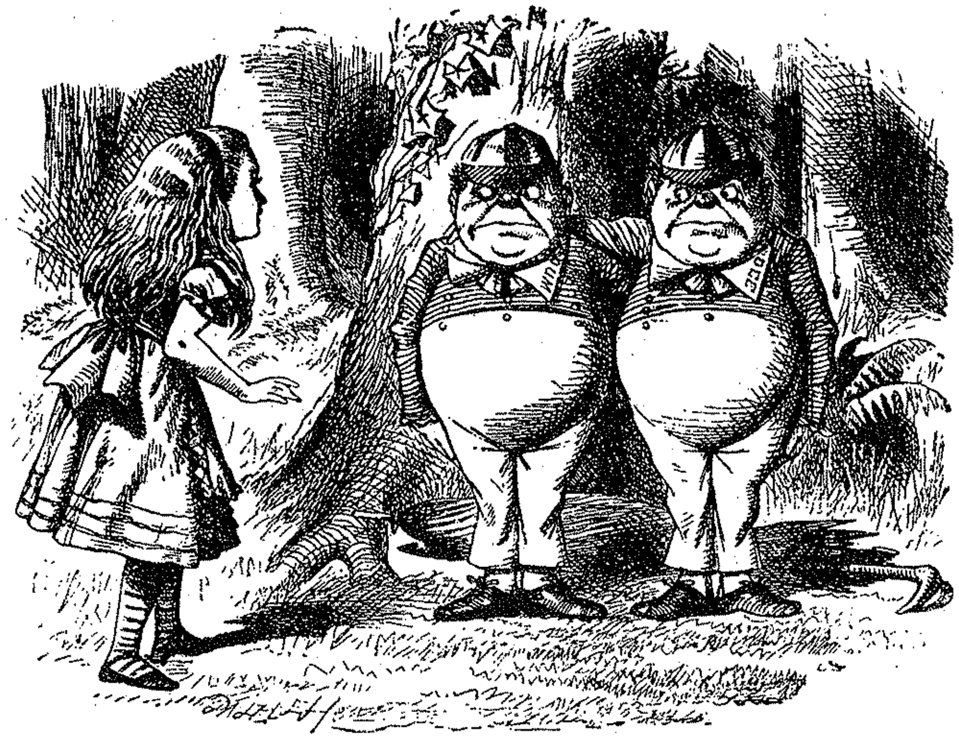
[68] Algunas de las coordenadas de y pueden ser negativas y representar *inputs*. Por tanto no estamos asumiendo que la producción no tiene costes.

[69] Una sucesión $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de puntos en un conjunto compacto Y converge hacia y si y sólo si todas sus subsucesiones convergentes convergen hacia y. (*¿Demostración?*)

[70] Una situación así se da, por ejemplo, en una economía de simple intercambio. La actividad económica en una economía así se limita al intercambio de los bienes inicialmente en posesión de los jugadores. Se puede considerar que cada jugador vende su dotación de bienes a los precios del momento. La suma conseguida impone así una *restricción presupuestaria* en lo que el jugador puede comprar con el dinero. Sin embargo, los precios del momento quedan determinados por la oferta y la demanda en el conjunto del mercado. Esto es, dependen de cómo *todos* eligen gastarse el dinero. Lo que cada jugador *puede* elegir es, por tanto, una función de lo que cualquiera *efectivamente* elige.

CAPITULO

8



Repetirse

8.1. Reciprocidad

Los especialistas en teoría de juegos hablan de juegos *de una sola vez* cuando desean subrayar que la recomendación que están dando sólo vale cuando el juego se va a jugar una y solamente una vez. Pero en la vida real, la gente raramente juega un juego una sola vez. Los juegos habitualmente se juegan una y otra vez. De aquí que los juegos con repetición sean de gran importancia en la práctica.

En este capítulo sólo prestaremos atención a una de las múltiples cuestiones que surgen en el estudio de los juegos repetidos[1]. Como aprendimos en el Capítulo 7, los jugadores racionales han de privarse de los frutos de la cooperación en juegos de una sola vez, como el dilema del prisionero, salvo que dispongan de algún medio para *obligar a respetar* acuerdos previos al juego. Podríamos decir que los jugadores racionales necesitan un policía que les ayude a cooperar en juegos de una sola vez. Sin embargo, esta dificultad suele desaparecer cuando el juego se repite muchas veces. Entonces se puede obtener un acuerdo cooperativo como un resultado de *equilibrio* en la situación así extendida.

La razón es muy simple. En un juego de una sola vez sin policía, las promesas previas al juego se pueden romper con impunidad. Pero si el jugador I falta a su palabra en un juego *repetido*, entonces la jugadora II tiene la oportunidad de castigarle posteriormente por su mala conducta. A veces, basta con que la jugadora II amenace con retirarse del acuerdo previo. En estas circunstancias, el jugador I escogerá no romper el acuerdo porque los beneficios futuros que se derivarán de la relación continuada con la jugadora II pesan más que las ventajas momentáneas que se pueden obtener rompiendo por una vez el acuerdo. Si la jugadora II también concluye que le interesa ser honesto por la misma razón, entonces los dos jugadores no necesitarán ayuda alguna para entenderse. La policía no es necesaria porque cada jugador vigila la conducta del otro.

Todo el mundo entiende que estos arreglos que se *autorregulan*, o que son *compatibles con los incentivos*, son muy importantes en la vida real. La idea esencial involucrada aquí queda resumida en la frase «ayuda y te ayudarán»*. La gente presta un servicio a los demás esperando recibir algo a cambio. Si el servicio que una persona presta no tiene una compensación que le satisface, el servicio dejará de ser prestado. A veces, se prestará un contraservicio en su lugar. Muchos autores piensan que este tipo de reciprocidad es la fuerza que cohesiona las sociedades humanas. Es indudablemente cierto que una mayoría de las relaciones entre seres humanos se sostienen sobre un acuerdo mutuo respetado generalmente. Nos gusta decirnos que

---

[1] «Reputación» es una de las cuestiones importantes que dejaremos de lado. Puede ser estúpido ponerse duro en juegos de una sola vez, pero puede tener mucho sentido hacerlo si la situación ha de repetirse. La razón es que una reputación de duro puede ser un activo muy valioso en juegos futuros.

* «I'll scratch your back if you'll scratch mine», en el original. (*N. del T.*)

ayudamos al vecino porque tenemos buen corazón. No es una casualidad, sin embargo, que lo que nuestros corazones bendicen a menudo coincide con lo que nuestras cabezas recomendarían, si tuvieran la oportunidad.

Todos mantenemos una red compleja de entendimientos recíprocos con los que nos rodean. Pero, como ocurre con el montar en bicicleta, el hecho básico de hacerlo no implica que entendamos cómo lo hacemos. La teoría de juegos puede ofrecer alguna luz sobre el mecanismo de los acuerdos autorregulados. ¿Cómo funcionan? ¿Por qué perduran? ¿Qué resultados se pueden mantener de esta forma?

8.2. La repetición de un juego de suma cero

Mates

Al investigar cualquier problema nuevo, casi siempre conviene considerar en primer lugar casos muy simples. Por lo tanto, empezaremos el estudio de juegos repetidos observando qué ocurre cuando un juego de suma cero con dos jugadores se juega dos veces. Esto significa que para intentar entender en profundidad la naturaleza de los acuerdos que se autorregulan tendremos que esperar un poco. No hay campo para ningún tipo de acuerdo entre dos jugadores en una situación de suma cero porque los intereses de los jugadores son diametralmente opuestos. Sin embargo, esto nos da libertad para concentrarnos en los problemas técnicos planteados por el estudio de juegos repetidos. Es particularmente importante no confundirse acerca de cómo son las estrategias puras en juegos repetidos.

Consideremos el simple juego Z de suma cero y con dos jugadores de la Figura 8.1(a). Recordemos que la matriz sólo muestra los pagos del jugador I. Las estrategias de seguridad de los jugadores en el juego son $(1 - p, p)^{\top} = (1/2, 1/2)^{\top}$ y $(1 - q, q)^{\top} = (1/2, 1/2)^{\top}$. El valor del juego es $v = 1/2$.

Supongamos que los mismos jugadores juegan *dos veces* Z. Entonces decimos que Z es una *etapa del juego* repetido[2] Z^2. En la presente sección, supondremos que los pagos en el juego repetido Z^2 se obtienen simplemente sumando los pagos de cada etapa. Por ejemplo, si en la primera etapa se usa el par de estrategias (s_1, t_2) y en la segunda se usa el par (s_2, t_2), entonces suponemos que el jugador I consigue $0 + 1 = 1$ en el juego repetido Z^2.

Es tentador, pero profundamente erróneo, pensar que la forma estratégica de Z^2 se puede identificar con el juego matricial M de la Figura 8.1(b). Si $0 \leqslant p \leqslant 1/2$, es fácil comprobar que la estrategia mixta $(1/2 - p, p, p, 1/2 - p)^{\top}$ asegura al jugador I un pago esperado de $+1$ en el juego con matriz M. Análogamente, $(1/2 - q, q, q, 1/2 - q)^{\top}$ asegura -1 a la jugadora II, siempre que $0 \leqslant q \leqslant 1/2$. Entonces, por ejemplo, $(0, 1/2, 1/2, 0)^{\top}$ es una estrategia de seguridad para el jugador I en M.

Supongamos, sin embargo, que el jugador I tuviera que lanzar una

[2] Si todas las etapas no son iguales, hablaremos de *superjuego*.

	t_1	t_2
s_1	1	0
s_2	0	1

Z

(a)

	t_1t_1	t_1t_2	t_2t_1	t_2t_2
s_1s_1	2	1	1	0
s_1s_2	1	2	0	1
s_2s_1	1	0	2	1
s_2s_2	0	1	1	2

M

(b)

Figura 8.1. Dos juegos de suma cero.

moneda al aire para decidirse a jugar entre s_1s_2 y s_2s_1. Supongamos que la jugadora II sabe o adivina que esto es lo que está haciendo el jugador I. Entonces, si el jugador I usa s_i en la etapa uno, la jugadora II debería usar t_i en la etapa dos, y obtendrá 0 en ella. Su pago esperado será entonces $-1/2 + +0 = -1/2$. El jugador I sólo obtiene $+1/2$, que es menos que la cantidad supuestamente segura $+1$.

La razón de esta anomalía es que las estrategias puras para M ignoran el hecho de que los jugadores desean que su conducta en la segunda etapa dependa de lo que ocurrió en la primera. Por tanto, una estrategia pura para Z^2 es más complicada que para M.

Sea $S = \{s_1, s_2\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador I en la etapa Z. Estas estrategias puras serán llamadas acciones para no confundirlas con las estrategias puras de Z^2. El conjunto de acciones de la jugadora II en la etapa Z es $T = \{t_1, t_2\}$. En la segunda etapa, los jugadores recordarán lo que ocurrió en la primera. Por tanto, debemos considerar cuatro posibles *historias* del juego. Estas son los cuatro elementos del conjunto $H = S \times T$. Por ejemplo, la historia $h_{12} = (s_1, t_2)$ significa que en la primera etapa el jugador I usó la acción s_1 y la jugadora II usó la acción t_2.

Una estrategia pura para el jugador I en el juego Z^2 es un par (s, f) en el que s es una acción de S a usar en la primera etapa y $f : H \to S$ es una *función*. Si la jugadora II usa la acción t en la primera etapa, entonces la historia del juego en la segunda etapa será $h = (s, t)$, y el jugador I elegirá una acción $f(h) = f(s, t)$ en la segunda etapa.

Existen 16 funciones posibles $f : H \to S$, que aparecen en forma de tablas en la Figura 8.2(a). Por ejemplo, $f_{1212}(h_{21}) = s_1$ y $f_{2221}(h_{11}) = s_2$. Puesto que el jugador I puede escoger s entre dos opciones y f entre 16 opciones, tiene 2×16 opciones en Z^2. La situación para la jugadora II es la misma. Por tanto, la forma estratégica de Z^2 se representa por una matriz 32×32 y es mucho más complicada que la matriz 4×4 del juego M.

$f_{1111} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_1	s_1	s_1

$f_{1112} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_1	s_1	s_2

$f_{1121} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_1	s_2	s_1

$f_{1122} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_1	s_2	s_2

$f_{1211} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_2	s_1	s_1

$f_{1212} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_2	s_1	s_2

$f_{1221} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_2	s_2	s_1

$f_{1222} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_1	s_2	s_2	s_2

$f_{2111} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_1	s_1	s_1

$f_{2112} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_1	s_1	s_2

$f_{2121} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_1	s_2	s_1

$f_{2122} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_1	s_2	s_2

$f_{2211} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_2	s_1	s_1

$f_{2212} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_2	s_1	s_2

$f_{2221} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_2	s_2	s_1

$f_{2222} : H \to S$

h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
s_2	s_2	s_2	s_2

(a)

$G_{11} : S \to T$

s_1	s_2
t_1	t_1

$G_{12} : S \to T$

s_1	s_2
t_1	t_2

$G_{21} : S \to T$

s_1	s_2
t_2	t_1

$G_{22} : S \to T$

s_1	s_2
t_2	t_2

(b)

Figura 8.2. Algunas funciones.

La forma estratégica 32×32 del juego repetido Z^2 aparece en la Figura 8.3(a). No es tan horrible como parece a primera vista, porque cada fila y cada columna están repetidas cuatro veces. Si cada columna o fila distinta se escribe una sola vez, entonces se obtiene la matriz 8×8 de la Figura 8.3(b). Esta matriz 8×8 es una forma estratégica *reducida* de Z^2 en la que sólo se han incluido aquellas estrategias puras en las que la conducta de un jugador en la segunda etapa está condicionada solamente por lo que el *oponente* hizo en la primera[3]. Una estrategia pura para una jugadora II que ignora lo que él mismo hizo en la etapa uno es un par (t, G) en el que t es una acción de T y $G : S \to T$ es una función. Si el jugador I usa la acción s en la primera etapa, entonces la jugadora II usará la acción t en la primera

[3] Si la jugadora II planea usar la acción t_2 en la etapa uno, no le ayudará mucho decir qué haría en la etapa dos, si descubre que en realidad ha usado la acción t_1 en la etapa uno.

<table>
<tr><th></th><th>(t_1, g_{1111})</th><th>(t_1, g_{1112})</th><th>(t_1, g_{1121})</th><th>(t_1, g_{1122})</th><th>(t_1, g_{1211})</th><th>(t_1, g_{1212})</th><th>(t_1, g_{1221})</th><th>(t_1, g_{1222})</th><th>(t_1, g_{2111})</th><th>(t_1, g_{2112})</th><th>(t_1, g_{2121})</th><th>(t_1, g_{2122})</th><th>(t_1, g_{2211})</th><th>(t_1, g_{2212})</th><th>(t_1, g_{2221})</th><th>(t_1, g_{2222})</th><th>(t_2, g_{1111})</th><th>(t_2, g_{1112})</th><th>(t_2, g_{1121})</th><th>(t_2, g_{1122})</th><th>(t_2, g_{1211})</th><th>(t_2, g_{1212})</th><th>(t_2, g_{1221})</th><th>(t_2, g_{1222})</th><th>(t_2, g_{2111})</th><th>(t_2, g_{2112})</th><th>(t_2, g_{2121})</th><th>(t_2, g_{2122})</th><th>(t_2, g_{2211})</th><th>(t_2, g_{2212})</th><th>(t_2, g_{2221})</th><th>(t_2, g_{2222})</th></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1111})</td><td rowspan="8" colspan="8">2</td><td rowspan="8" colspan="8">1</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1112})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1121})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1122})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1211})</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1212})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1221})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{1222})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2111})</td><td rowspan="8" colspan="8">1</td><td rowspan="8" colspan="8">2</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2112})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2121})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2122})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2211})</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td><td rowspan="4" colspan="4">0</td><td rowspan="4" colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2212})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2221})</td></tr>
<tr><td>(s_1, f_{2222})</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1111})</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1112})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1121})</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1122})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1211})</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1212})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1221})</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{1222})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2111})</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2112})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2121})</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2122})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2211})</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2212})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2221})</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(s_2, f_{2222})</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

(a)

	(t_1, G_{11})	(t_1, G_{12})	(t_1, G_{21})	(t_1, G_{22})	(t_2, G_{11})	(t_2, G_{12})	(t_2, G_{21})	(t_2, G_{22})
(s_1, F_{11})	2	2	1	1	1	1	0	0
(s_1, F_{12})	2	2	1	1	0	0	1	1
(s_1, F_{21})	1	1	2	2	1	1	0	0
(s_1, F_{22})	1	1	2	2	0	0	1	1
(s_2, F_{11})	1	0	1	0	2	1	2	1
(s_2, F_{12})	1	0	1	0	1	2	1	2
(s_2, F_{21})	0	1	0	1	2	1	2	1
(s_2, F_{22})	0	1	0	1	1	2	1	2

(b)

Figura 8.3. Algunas matrices grandes.

etapa y la acción $G(s)$ en la segunda etapa. Las cuatro funciones posibles $G : S \to T$ aparecen en las tablas de la Figura 8.2(b)[4].

Las simetrías en el juego de suma cero de la Figura 8.3(b) hacen que sea fácil resolverlo. Por ejemplo, una estrategia de seguridad para el jugador I es usar cada una de sus estrategias puras con probabilidad 1/8. Entonces obtiene un pago esperado de 1, haga lo que haga la jugadora II. Este, análogamente, se asegura un pago esperado de -1 jugando cada una de sus estrategias puras con probabilidad 1/8.

Estas no son las únicas estrategias de seguridad. La elección de (s_1, F_{12}), (s_1, F_{21}), (s_2, F_{12}) y (s_2, F_{21}), cada una con probabilidad 1/4, también lo es. Y también lo es la elección de (s_1, F_{11}), (s_1, F_{22}), (s_2, F_{11}) y (s_2, F_{22}), cada una con probabilidad 1/4.

Esta última estrategia de seguridad es la que a uno se le ocurre de forma natural. Obsérvese que, puesto que el jugador I sólo usa F_{11} y F_{22}, éste ignora lo que hace la jugadora II. De hecho, la estrategia de seguridad puede ser obtenida por el jugador I eligiendo en la primera etapa entre las acciones s_1 y s_2 con probabilidad 1/2, y entonces haciendo lo mismo *independientemente* en la segunda etapa. Esto asegura que la jugadora II no puede deducir nada sobre lo que el jugador I hará en la segunda etapa a partir de lo que hizo en la primera.

Esta conclusión no debería sorprendernos. Es obvio que jugadores racionales que han de jugar una sucesión de juegos de suma cero con dos jugadores actuarán de forma que el juego ya jugado no ayude al oponente a predecir su juego futuro. Esto es así porque lo que es bueno para uno es necesariamente malo para el otro en un juego de suma cero con dos jugadores. Entonces, ¿qué hemos aprendido en esta sección?

Un aspecto útil de la discusión ha sido que hemos podido explicar completamente cómo se puede reducir una forma estratégica a algo más simple eliminando filas o columnas duplicadas. Evitamos entrar en los detalles del proceso cuando usamos previamente este mismo recurso al discutir el duelo (Sección 4.1.2) y la ruleta rusa (Sección 4.7).

Sin embargo, lo más importante es que hemos clarificado la noción de estrategia pura en un juego repetido. En general, una estrategia pura para un juego repetido no sólo da una acción para cada etapa del juego. Da una acción para la primera etapa del juego, pero también, para cada etapa posterior, una función que elige una acción en esta etapa dependiendo de la

[4] Consideremos $G_{21} : S \to T$. Si la jugadora II usa esta función y el jugador I usa s_1 en la etapa uno, entonces la jugadora II usará $t_2 = G_{21}(s_1)$ en la etapa dos sin tener en cuenta lo que ella misma hizo en la etapa uno. Así, para ambas historias $h_{11} = (s_1, t_1)$ y $h_{12} = (s_1, t_2)$, ella planea jugar t_2 en la etapa dos. Si el jugador I usa s_2 en la etapa uno, la jugadora II usará $t_1 = G_{21}(s_2)$ en la etapa dos, sin tener en cuenta lo que hizo en la etapa uno. Así, para ambas historias $h_{21} = (s_2, t_1)$ y $h_{22} = (s_2, t_2)$, ella planea jugar t_1 en la etapa dos. Por tanto, la función $G_{21} : S \to T$ corresponde a $g_{2211} : H \to T$. Continuando así hasta el final, se puede comprobar que la matriz de la Figura 8.3(b) se obtiene a partir de la de arriba tomando la 1.ª, 6.ª, 11.ª, 16.ª, 17.ª, 22.ª, 27.ª y 32.ª filas, y la 1.ª, 4.ª, 13.ª, 16.ª, 17.ª, 20.ª, 29.ª y 32.ª columnas.

historia del juego hasta ese momento. Un juego repetido con muchas etapas tendrá, por tanto, un conjunto muy complicado de estrategias puras.

8.3. La repetición del dilema del prisionero

El dilema del prisionero (Secciones 7.1.3 y 7.5.4) es reproducido en la Figura 8.4(a). En esta sección estudiaremos el juego que se obtiene al repetirlo n veces. Si $n = 10$, cada jugador dispone de $2^{349.525}$ estrategias puras (Ejercicio 8.6.3). Este es un número inimaginablemente grande. El juego repetido, incluso cuando n es relativamente pequeño, tiene una forma estratégica enorme. Sin embargo, es fácil de analizar. Hay un único equilibrio subjuego-perfecto en el que cada jugador siempre escoge *halcón*.

La razón es inmediata. Antes de llegar a la última etapa del juego repetido, es posible que un jugador no llegue a escoger *halcón* por miedo a que el oponente se tome el desquite en etapas sucesivas del juego. Pero en la etapa final, no hay desquite posterior posible. Puesto que *halcón* domina a *paloma* en el dilema del prisionero, ambos jugadores escogerán *halcón* en la n-ésima y última etapa, cualquiera que haya sido la historia previa del juego.

Consideremos ahora la penúltima etapa. Ambos jugadores saben que, independientemente de su elección en esta etapa, jugarán (*halcón, halcón*) en la última etapa. Por tanto, nadie puede ser castigado por jugar *halcón* en la penúltima etapa porque el peor castigo que el oponente puede inflingir en la ultima etapa es jugar *halcón*. Pero el oponente ya está planeando jugar *halcón* en la última etapa pase lo que pase, independientemente de lo que ocurra previamente. Ambos jugadores usarán, pues, *halcón* en la etapa anterior a la última. El mismo argumento se puede aplicar a la etapa anterior a la penúltima, y así sucesivamente.

Una versión más formal de este razonamiento será la demostración del siguiente mini-teorema.

Teorema 8.3.1. El dilema del prisionero repetido finitamente tiene un único equilibrio subjuego-perfecto en el que ambos jugadores siempre usan *halcón*.

Mates 8.3.1 ⟶

Demostración. Sea $P(n)$ la proposición que afirma que el teorema es cierto para el dilema del prisionero n veces repetido. Entonces $P(1)$ es verdad por las razones dadas en la Sección 7.1.3. Para demostrar el teorema por el principio de inducción, es necesario demostrar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para cada $n = 1, 2, \ldots$

Para ello, supongamos que $P(n)$ se cumple para algún particular valor de n y consideremos el dilema del prisionero repetido $n + 1$ veces. Supongamos que hemos alcanzado la última etapa después de una historia de juego h. Si el jugador I había conseguido un pago x_k en la etapa k-ésima, habrá acumulado un pago total de $x(h) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ cuando llegue el

	Paloma	Halcón
Paloma	3 3	6 0
Halcón	0 6	1 1

(a)

$3 + y(h)$ $3 + x(h)$	$6 + y(h)$ $0 + x(h)$
$0 + y(h)$ $6 + x(h)$	$1 + y(h)$ $1 + x(h)$

(b)

Figura 8.4. El dilema del prisionero.

momento de jugar la $(n + 1)$-ésima y final etapa. Análogamente, la jugadora II habrá acumulado un pago de $y(h)$.

Por tanto, el juego que se jugará en la etapa $(n + 1)$-ésima es el ilustrado en la Figura 8.4(b). Puesto que *halcón* domina fuertemente a *paloma* en este juego, tiene el único equilibrio de Nash (*halcón, halcón*). De hecho, el juego de la Figura 8.4(b) es *estratégicamente idéntico* al dilema del prisionero de la Figura 8.4(a). La nueva función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern obtenida añadiendo $x(h)$ a cada uno de los pagos del jugador I describe precisamente las *mismas* preferencias que la antigua función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern (Sección 3.5).

Los equilibrios subjuego-perfectos se hallan usando el algoritmo de Zermelo (Sección 1.8.2). El juego de la Figura 8.4(b) es uno de los subjuegos menores del prisionero del dilema repetido $n + 1$ veces. El algoritmo de Zermelo requiere que cada uno de estos subjuegos menores sea sustituido por un nodo terminal marcado con el par de pagos que se obtiene al jugar un equilibrio de Nash en el subjuego. Puesto que (*halcón, halcón*) es el único equilibrio de Nash de la Figura 8.4(b), el par de pagos requerido es $(1 + x(h), 1 + y(h))$.

El nuevo juego obtenido por medio de esta reducción es precisamente igual al dilema del prisionero repetido n veces, exceptuando que 1 ha sido añadido a cada pago[5]. Por tanto, es estratégicamente equivalente al dilema del prisionero repetido n veces. Puesto que suponemos $P(n)$, ambos jugadores siempre usarán *halcón* en el nuevo juego. Ya sabemos que jugarán *halcón* en la última etapa del dilema del prisionero repetido $n + 1$ veces. Se sigue que ellos *siempre* juegan *halcón* en el dilema del prisionero repetido $n + 1$ veces. Luego $P(n + 1)$ ha quedado demostrada.

El razonamiento prueba que $P(1)$ se cumple y que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ para todos los $n = 1, 2, \dots$ Que $P(n)$ es siempre verdad, se sigue entonces del principio de inducción (Sección 1.7). □

[5] No a los pagos del juego-etapa, sino a los pagos del dilema del prisionero repetido n veces y entendido como un todo.

8.3.1. ¿Estúpidos racionales?

Filo 8.3.2 ⟶

Vimos en la Sección 7.5.4 que algunos autores sostienen que es estúpido ser racional en el dilema del prisionero de una sola vez. Normalmente, estos autores suponen equivocadamente que las hipótesis sobre racionalidad que hacen los especialistas en teoría de juegos para recomendar *halcón* son las mismas en el juego repetido finitamente que en el juego de una sola vez. Esta valoración incorrecta les lleva a concentrar sus ataques en el dilema del prisionero repetido, donde el fracaso en cooperar de dos jugadores racionales que se relacionan continuamente es ciertamente antiintuitivo.

Ya que *halcón* domina fuertemente a *paloma*, para un jugador racional en el dilema del prisionero de una sola vez es mejor escoger *halcón*, independientemente de lo que sepa sobre la racionalidad de su oponente. Este no es ni mucho menos el caso en el dilema del prisionero repetido. La cuestión de lo que los jugadores racionales necesitan saber o creer para justificar un razonamiento por inducción hacia atrás fue discutida en la Sección 1.8.3 y también en la 4.6.3. Dicho brevemente, no basta con que los jugadores sean racionales. Ni siquiera basta con que sea conocimiento común que los jugadores son racionales, que es pedir mucho más. También hay que suponer que lo que ellos piensan sobre estas cosas lo tienen tan perfectamente asumido, que nada de lo que ocurra en el juego puede hacerles cambiar de opinión. Por mucho que un jugador se comporte irracionalmente, su oponente continuará atribuyendo su conducta a alguna influencia pasajera que cree que no persistirá en el futuro. Si la racionalidad de un jugador era conocimiento común antes del juego, continúa siendo conocimiento común durante el juego *con independencia de lo que ocurra*[6].

Por supuesto, en la vida real estas suposiciones idealizantes casi nunca son realistas. En particular, *cuando nos acercamos al final de un largo juego repetido*, hay que hacer un gran esfuerzo para continuar pensando que es probable que un jugador con una historia continuada de irracionalidad se comportará racionalmente en el futuro. Pero esto *no* implica que el análisis del dilema del prisionero repetido dado en esta sección esté equivocado: implica únicamente que las hipótesis en las que el análisis se basa son demasiado simples. Cuando el *mismo* método de análisis se aplica con hipótesis más realistas, se obtienen conclusiones distintas. En particular se obtienen equilibrios que requieren jugar *paloma*.

Los especialistas en teoría de juegos han considerado varias maneras de hacer el modelo más realista. La más popular considera que las repeticiones del dilema del prisionero se pueden prolongar indefinidamente. En un juego así, *cualquier* historia del juego será necesariamente *corta* comparada con la longitud potencial del juego. Las desviaciones de la racionalidad durante

[6] De hecho, sólo deben cumplirse sentencias de la forma «[Todo el mundo sabe que]^N todo el mundo es racional» para valores de N lo bastante grandes. Cuán grandes deben ser, se discute en el Ejercicio 4.8.21.

una historia tan corta no le costarán mucho a quien se desvía, comparado con lo que puede ganar en el futuro. La hipótesis de que un jugador se comportará racionalmente en el futuro, a pesar de haberse comportado irracionalmente en el pasado, deja así de parecer tan poco plausible.

Se podría objetar que se ha eliminado una inverosimilidad sólo gracias a la introducción de otra. Es imposible, ¿no?, que un juego en la vida real pueda continuar para siempre. Sin embargo, juegos de horizonte potencialmente infinito suelen ser más realistas que los que tienen un horizonte finito. Cuando la gente interacciona en la vida real, raramente saben por anticipado cuánto van a durar sus relaciones. Saben que finalmente se terminarán, porque nadie esperar vivir para siempre, pero casi nunca pueden estar seguros de la fecha *exacta* en que dejarán de verse.

La manera más simple de modelizar esta incertidumbre en el caso del dilema del prisionero repetido es introduciendo una jugada al azar después de cada repetición para decidir si el juego continúa o no. Consideremos, por ejemplo, el caso en que la probabilidad de que cualquier etapa alcanzada sea la última es 1/3. Se podría, por ejemplo, tirar un dado bien equilibrado después de cada etapa, y continuar sólo si no ha salido ni un 5 ni un 6.

Este modelo no tiene un horizonte finito. Cualquiera que sea N, no existe la seguridad de que el juego termine en la etapa N o antes. La probabilidad de que continuará por lo menos hasta la etapa N-ésima es $(2/3)^{N-1}$. Esta es la probabilidad de que ningún 5 ni ningún 6 aparecerán en $N - 1$ tiradas del dado. Es cierto que $(2/3)^N \to 0$ cuando $N \to \infty$, y de aquí que la probabilidad de que el juego continúe realmente para siempre es cero. Pero continúa siendo un juego de horizonte infinito. Lo estudiaremos en la subsección siguiente.

8.3.2. Un ejemplo de horizonte infinito

La cooperación *no* es necesariamente irracional cuando el dilema del prisionero se repite un número *indefinido* de veces. En este ejemplo, estudiaremos el caso en que la probabilidad de que el juego continúe después de una etapa cualquier siempre es 2/3. Por tanto, al empezar el juego la probabilidad de alcanzar la etapa N-ésima es $(2/3)^{N-1}$.

Consideremos la estrategia s que requiere jugar *paloma* siempre que el oponente corresponde jugando también *paloma*[7] Si el oponente deja de hacerlo alguna vez, entonces la estrategia requiere jugar *halcón* ya para siempre. Cualquier desviación, por tanto, será real y verdaderamente castigada. Sin embargo, si ambos jugadores usan la estrategia s, no habrá ocasión para el castigo. Los jugadores cooperarán para siempre. El pago esperado de cada jugador será

[7] Esta es la llamada estrategia implacable en la siguiente sección.

$$C = 3 + 3(2/3) + \ldots + 3(2/3)^{N-1} + \\ + 3(2/3)^N + 3(2/3)^{N+1} + 3(2/3)^{N+2} + \ldots .$$

¿Puede ganar algo un jugador, si se desvía? Si un jugador se desvía jugando *halcón* por primera vez en la etapa $(N + 1)$-ésima, conseguirá a lo sumo

$$D = 3 + 3(2/3) + \ldots + 3(2/3)^{N-1} + \\ 6(2/3)^N + 1(2/3)^{N+1} + 1(2/3)^{N+2} + \ldots$$

Si $C \geqslant D$, entonces no es beneficioso desviarse. Ahora bien,

$$\begin{aligned} C - D &= (3 - 6)(2/3)^N + (3 - 1)(2/3)^{N+1} + (3 - 1)(2/3)^{N+2} + \ldots \\ &= (2/3)^N \{-3 + 2(2/3 + (2/3)^2 + \ldots)\} \\ &= (2/3)^N \left\{-3 + 2\left(\frac{2/3}{1 - 2/3}\right)\right\} \\ &= (2/3)^N(-3 + 4) = (2/3)^N \geqslant 0. \end{aligned}$$

Puesto que $C \geqslant D$, se sigue que no es beneficioso desviarse, si el oponente mantiene la estrategia s. Luego (s, s) es un equilibrio de Nash que requiere que los jugadores cooperen constantemente en el juego de horizonte infinito.

Esta historia explica por qué la cooperación racional puede ser viable en el dilema del prisionero repetido de horizonte infinito. Es una historia tan buena que merece ser contada una y otra vez, y lo será, porque este capítulo está firmemente decidido a hacer honor a su nombre. La historia ya ha sido contada para el caso de los duopolistas colusivos considerados en la Sección 7.5.5. Esta nueva versión de la historia servirá para dejar claro que hay que esperar una conexión importante entre los resultados que los jugadores podrían alcanzar en el juego de una sola vez, si fueran posibles acuerdos vinculantes, y los resultados que podrían alcanzar usando estrategias de equilibrio, cuando el juego se repite con un horizonte infinito. El capítulo continúa explorando esta cuestión en detalle para una clase particularmente simple de juegos repetidos con horizonte infinito.

8.3.3. Colusión en el duopolio de Cournot repetido

Econ 8.4 ⟶

La Sección 7.5.5 explicaba que es difícil mantener la colusión en un juego del duopolio de Cournot de una sola vez porque los jugadores tienen incentivos para no cumplir un acuerdo. Una respuesta natural es que el juego de una sola vez no es muy realista. En el mundo real, los oligopolistas han de tomar repetidas decisiones de producción sobre largos períodos de tiempo cuya duración es indefinida. Como veremos, esta situación es mucho más favorable al mantenimiento de acuerdos colusivos que el duro ambiente del juego de una sola vez. Para demostrarlo, basta con copiar el razonamiento de la Sección 8.3.2 que demuestra que la cooperación es posible en la versión infinitamente repetida del dilema del prisionero.

En el acuerdo colusivo estudiado en la Sección 7.5.5, las dos empresas acuerdan que su producción total debe ser $\tilde{q}$, igual a la producción de un monopolista que quiere maximizar beneficios. En la versión repetida que estudiaremos ahora, supongamos que acuerdan que el jugador I producirá q_1 en cada período y que la jugadora II producirá q_2, siendo $q_1 + q_2 = \tilde{q}$. Supongamos que la puesta en práctica de este acuerdo proporciona al jugador I un beneficio a en cada período y a la jugadora II un beneficio b. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurre en el juego de una sola vez, ahora las empresas pueden incorporar a su acuerdo una cláusula sobre qué hacer si alguien no lo respeta. La provisión más simple es que, si alguien no cumple, el acuerdo se rompe y ambos juegan las estrategias de equilibrio de Nash del juego de una sola vez en todos los períodos sucesivos. La cuestión que nos interesa es si este acuerdo es compatible con los incentivos. ¿Tienen los jugadores incentivos para no cumplir el acuerdo?

Consideremos lo que el jugador I consigue si respeta el acuerdo. Si su factor de descuento es δ (Sección 5.8.3), con $0 < \delta < 1$, calculará que el flujo de ingresos que recibe si nadie rompe el acuerdo es

$$C = a + a\delta + a\delta^2 + \dots + a\delta^N + \dots$$

Si la jugadora II mantiene el acuerdo pero el jugador I se desvía de él, ¿cuánto conseguirá el jugador I? Supongamos que el jugador I se desvía por primera vez en la etapa $(N + 1)$-ésima. El conseguirá

$$D = a + a\delta + a\delta^2 + \dots + a\delta^{N-1} + B\delta^N + c\delta^{N+1} + c\delta^{N+2} + \dots,$$

donde B es el beneficio que el jugador I obtiene al incumplir el trato en la etapa $N + 1$, y c es el beneficio por período que consigue cada empresa cuando ambas juegan la estrategia de equilibrio de Nash del juego de una sola vez. Los valores exactos[8] de a, B y c no tienen mucho interés porque todo lo que necesitamos para el razonamiento que sigue es que $c < a < B$.

La condición para que no sea provechoso para el jugador I incumplir el acuerdo es que $C \geqslant D$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} C - D &= \delta^N\{(a - B) + (a - c)\delta + (a - c)^2\delta^2 + \dots\} \\ &= \delta^N\{(a - B) + (a - c)\frac{\delta}{1 - \delta}\}. \end{aligned}$$

[8] De hecho, si $q_1 = q_2$, entonces $a = b = 1/8\,(M - c)^2$ y $c = 1/9\,(M - c)^2$. La desviación óptima para el jugador I en la etapa N es $Q_1 = R_1(q_2) = 3/8\,(M - c)$, para el cual el beneficio correspondiente es $B = \{3/8\,(M - c)\}^2$.

El acuerdo es, por tanto, compatible con incentivos para el jugador I si

$$\delta \geqslant \frac{B - a}{B - c}$$

Esta condición se satisface cuando el factor de descuento δ es bastante grande, porque el lado derecho es menor que 1 cuando $c < a < B$. Puesto que una condición similar se cumple para la jugadora II en circunstancias parecidas, se sigue que la colusión es realmente posible en el juego repetido del duopolio de Cournot, siempre que los jugadores no descuenten demasiado el futuro.

Hemos visto que una serie de acuerdos colusivos se pueden sostener como resultados de equilibrio de Nash cuando un duopolio de Cournot se modeliza como un juego repetido con horizonte infinito, siempre que a los jugadores valoren bastante sus futuras fuentes de ingresos. ¿Significa esto que debemos esperar que la colusión sea endémica en situaciones oligopolísticas? Es indudablemente cierto que se han dado muchos casos de colusión descarada, y los casos descubiertos son sólo la punta de un iceberg muy grande. Sin embargo, debemos recordar que el modelo que hemos estado estudiando deja de lado muchas cuestiones importantes. En particular, la noción de un juego repetido introducido en la Sección 8.2 da por supuesto que ambos jugadores saben con seguridad qué acciones adoptó el oponente en todas las etapas previas del juego. Esto facilita a cada jugador el controlar si el otro está cumpliendo el trato. Pero en el mundo real las cosas raramente son tan claras. Se pueden dar sucesos al azar, fuera del control de ambos jugadores, que embrollan la situación. Si el beneficio de la jugadora II no alcanza la cantidad que esperaba, puede ser por culpa del jugador I que no ha cumplido el acuerdo, pero también puede ser también por culpa de algún proceso externo sobre el que él no puede hacer nada. El diseño de acuerdos colusivos compatibles con incentivos cuando se dan estas dificultades de información no es fácil, como veremos al tocar brevemente (en la Sección 11.7) el tema del diseño de mecanismos. No resulta, pues, apropiado sacar conclusiones apresuradas sobre lo que es o no es posible en el mundo real.

8.4. Repeticiones infinitas

Filo 8.4.1 ⟶

Los ejemplos precedentes hacen ver claramente que vale la pena estudiar juegos infinitamente repetidos. Sin embargo, el estudio de estos juegos es difícil técnicamente, y por ello nos limitaremos a considerar algunas situaciones muy simplificadas. Por lo menos tres problemas serán atentamente considerados:

- Como hemos visto en la Sección 8.2, los conjuntos de estrategias en los juegos repetidos son enormes y complicados. Esta dificultad se supera restringiendo la atención a estrategias que se pueden representar por autómatas finitos (Sección 8.4.1).

- Los modelos realistas requieren que los pagos recibidos tarde se descuenten más que los pagos recibidos temprano, como en los modelos de las Secciones 8.3.2 y 8.3.3. Si el factor de descuento es lo bastante pequeño, puede ocurrir que lo que los jugadores hacen al empezar el juego tenga una gran importancia para lo que acaban ganando. Las dificultades matemáticas creadas por estas consideraciones no las afrontamos aquí porque no incluimos descuento en los problemas. Con ello, sólo lo que los jugadores hacen a largo plazo resulta ser importante para lo que acaban ganando.
- Como hemos observado al final de la Sección 8.3.3, el control del juego del oponente puede ser un problema. En particular, surgen problemas cuando se aceptan estrategias mixtas. Supongamos que la jugadora II deba elegir entre dos acciones posibles con igual probabilidad cada vez que le toca jugar, pero el jugador I observa que hasta ahora la jugadora II siempre ha usado la primera acción. ¿Ha de concluir que ella ha incumplido el acuerdo y ha de ser castigada? ¿O debería concederle el beneficio de la duda sobre la base que no es realmente imposible que una moneda siempre de cara? En lugar de enfrentarnos con los problemas estadísticos que plantean estas cuestiones, evitaremos la cuestión del control restringiendo los jugadores al uso de estrategias puras.

8.4.1. Autómatas finitos

Un *autómata finito* es una máquina de calcular idealizada[9]. Cuando una estrategia se puede representar por un autómata finito, se puede pensar que la elección de estrategia por parte de un jugador equivale a la decisión de delegar el acto de jugar a una computadora programada adecuadamente.

Los matemáticos distinguen entre varias clases de autómatas finitos. Los adecuados para jugar juegos repetidos se llaman máquinas de Moore. Cuando las estimula un input adecuado, las máquinas de Moore generan un output. La máquina de Moore escogida por el jugador I tiene como inputs las acciones de la jugadora II para el juego-etapa. Sus outputs serán las acciones del jugador I para el juego-etapa. La máquina responde a lo que la jugadora II hace en la etapa n escogiendo una ación para el jugador I en la etapa $n + 1$. Cualquier otra información que no sea la última acción de la jugadora II ha de ser guardada en la memoria de la máquina[10]. Como

[9] O, si lo prefiere, es el programa que hace funcionar la máquina.

[10] Se pueden reducir las exigencias a la memoria de la máquina incrementando el conjunto de señales que puede aceptar como inputs. Se podría, por ejemplo, permitir que en la máquina entrara no sólo la última acción del oponente, sino también su propia acción última. O se podría, por ejemplo, dejar que la máquina tuviera acceso a un reloj, de manera que pudiera

veremos, un autómata finito sólo puede recordar un número finito de cosas. Por esta razón un autómata finito no puede seguir todas las historias posibles de un juego repetido. Es decir, que al confinar nuestra atención a estrategias que pueden ser representadas por un autómata finito, estamos introduciendo una restricción clara en lo que los jugadores pueden escoger.

Cada configuración de memorias concebible que puede ser sostenida por un autómata finito es un *estado* posible de la máquina. Una descripción detallada de un autómata empezaría con una lista de todos sus estados posibles. Los elementos de esta lista deben constituir un conjunto finito. Uno de estos estados es el *estado inicial*: el estado en el que la máquina se encuentra cuando empieza el juego. Para completar la descripción se necesitan una *función de output* y una *función de transición*. La función de output especifica la acción que tomará la máquina en cada estado. La función de transición le dice a la máquina cómo pasar de un estado a otro después de recibir como input la acción tomada por el oponente.

Sin embargo, para los propósitos de este capítulo será adecuado describir los autómatas finitos gráficamente, como en la Figura 8.5. Esta muestra varios autómatas finitos capaces de jugar el dilema del prisionero repetido. Cada círculo representa un estado posible de la máquina. La letra en el interior del círculo es el output que la máquina ofrece en este estado[11]. Las flechas indican transiciones.

Consideremos, por ejemplo, la máquina de la Figura 8.5(d), que es llamada TIT-FOR-TAT porque siempre hace en la etapa siguiente lo que el oponente hizo por última vez. En particular, si se encuentra en el estado en que producirá H, permanecerá en el mismo estado si recibe H (indicando que el oponente ha jugado *halcón*). Por otra parte, si recibe el input D, cambia al estado en que el output es D. Cada máquina tiene una flecha que viene de ninguna parte. Esta indica el estado inicial de la máquina. Por ejemplo, TIT-FOR-TAT es una máquina amable que empieza jugando *paloma*.

La Figura 8.6(a) muestra qué ocurre cuando TIT-FOR-TAT juega con TWEEDLEDUM. La Figura 8.6(b) muestra qué ocurre cuando TWEEDLEDUM juega con su hermano TWEEDLEDEE. Obsérvese que, en ambos caso, las dos máquinas acaban entrando en un ciclo de estados que continúa para siempre. En la Figura 8.6(a), el ciclo tiene cuatro etapas de longitud y empieza inmediatamente. En la Figura 8.6(b), el ciclo tiene una única etapa de longitud y sólo empieza después de unas jugadas preliminares en las etapas uno, dos y tres.

Dos autómatas finitos *cualesquiera* jugando uno contra el otro en un juego repetido terminarán eventualmente repitiendo un ciclo de estados una y otra vez. Como veremos en la Sección 8.4.2, esto facilita el cálculo de sus pagos totales en un juego repetido.

saber directamente la etapa que el juego ha alcanzado sin tener que seguir esto internamente. O se podría dejar que la máquina tuviera acceso a inputs al azar, con lo que serían posibles estrategias mixtas. Sin embargo, eliminamos todas estas posibilidades para simplificar las cosas.

[11] La letra D significa que hay que jugar *paloma*, y la letra H que hay que jugar *halcón*.

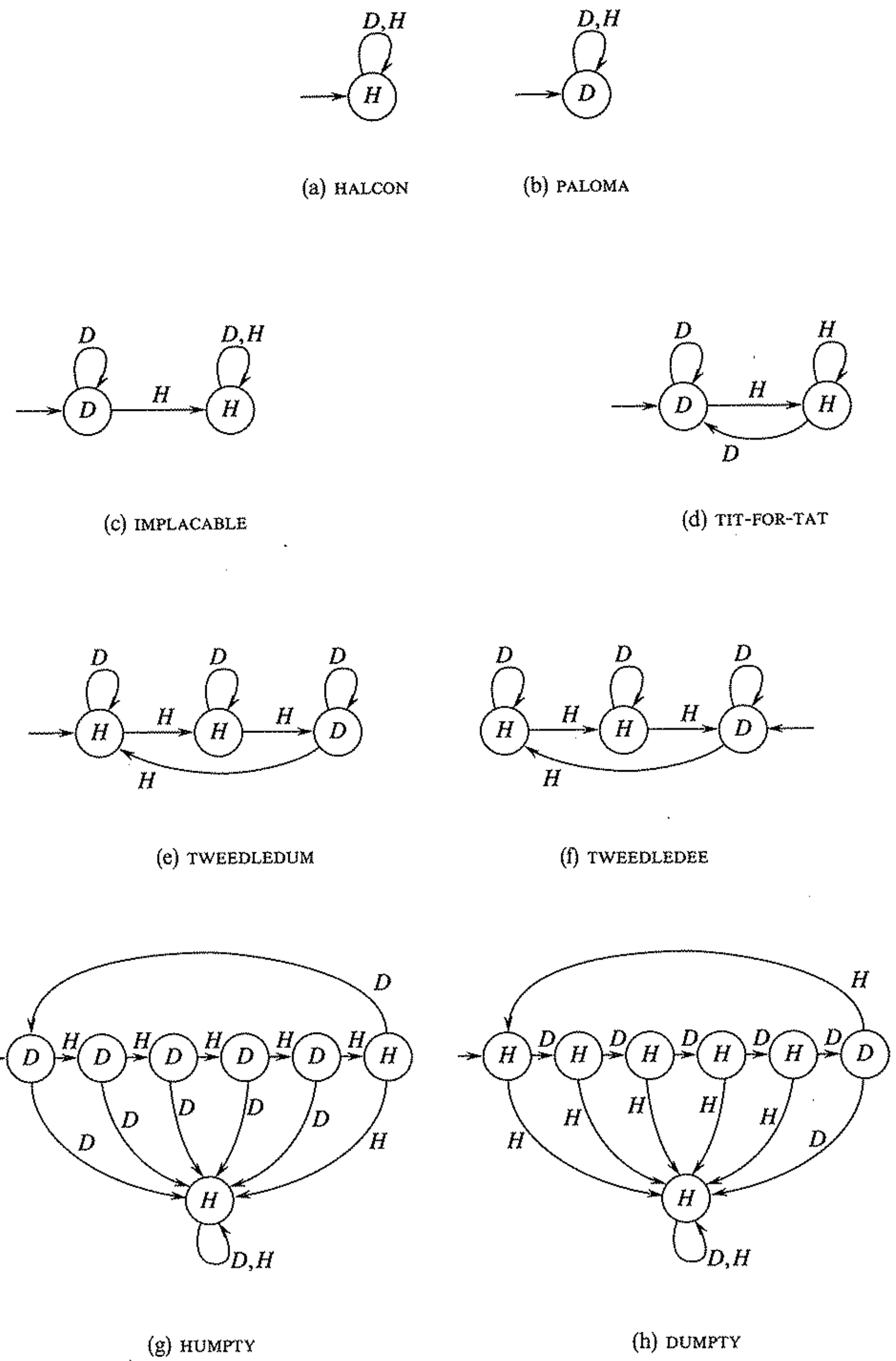


Figura 8.5. Algunos autómatas finitos.

		Ciclo				Ciclo				Ciclo					
I	Pago	0	1	1	6	0	1	1	6	0	1	1	6	0	1
I	TIT-FOR-TAT	*D*	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*
	Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
II	TWEEDLEDUM	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*	*H*	*H*	*D*	*H*	*H*
II	Pago	6	1	1	0	6	1	1	0	6	1	1	0	6	1

(a)

					Ciclo	Ciclo	Ciclo	Ciclo						Ciclo	
I	Pago	6	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
I	TWEEDLEDUM	*H*	*H*	*H*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*
	Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
II	TWEEDLEDEE	*D*	*H*	*H*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*
II	Pago	0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

(b)

Figura 8.6. Guerra de computadoras.

8.4.2. La evaluación del flujo de rentas

Mates 8.4.3 ⟶

Supongamos que el resultado de que el jugador I escoja la estrategia a y la jugadora II escoja la estrategia b en un juego repetido es que en la etapa n-ésima del juego el jugador I usa la acción s_n y la jugadora II usa la acción t_n. Entonces el jugador I conseguirá un pago de $\pi_1(s_n, t_n)$ en la etapa n-ésima. Para determinar su pago total en el juego repetido cuando él usa la estrategia a y la jugadora II usa la estrategia b, debe evaluar el *flujo de rentas*

$$\pi_1(s_1, t_1),\ \pi_1(s_2, t_2),\ \pi_1(s_3, t_3),\ \ldots$$

En economía existen buenas razones para suponer que un agente maximizará la suma descontada de este flujo de rentas. La función de pagos del jugador I, $\pi_1 : S \times T \to \mathbb{R}$, en el juego repetido tomaría entonces la forma

$$\pi_1(a, b) = \pi_1(s_1, t_1) + \delta\pi_1(s_2, t_2) + \delta^2\pi_1(s_3, t_3) + \ldots,$$

donde δ es el *factor de descuento* del jugador I[12]. Por ejemplo, el flujo de rentas del jugador I en la Figura 8.6(a) es 0, 1, 1, 6, 0, 1, 1, 6, 0, ... Este flujo de rentas se puede evaluar como una suma descontada con un factor de descuento δ que satisface $0 < \delta < 1$. Si a es TIT-FOR-TAT y b es TWEEDLEDUM, un jugador I que evaluara de esta forma el flujo de rentas conseguiría un pago en el juego repetido igual a

$$\begin{aligned} U_1(a, b) &= 0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3 + 0 + \delta^5 + \delta^6 + 6\delta^7 + \ldots \\ &= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3) + (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\delta^4 \\ &\qquad + (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\delta^8 + \ldots \\ &= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)(1 + \delta^4 + \delta^8 + \ldots) \\ &= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\left(\frac{1}{1 - \delta^4}\right). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Al considerar juegos *finitamente* repetidos, en este mismo capítulo, calculamos los flujos de rentas con un factor de descuento $\delta = 1$[13]. En el horizonte infinito no podemos simplificar tan elegantemente por qué la serie obtenida cuando $\delta = 1$ normalmente *diverge*. Por ejemplo, $0 + 1 + 1 + 6 + 0 + 1 + 1 + 6 + \ldots$ diverge a ∞. Por tánto, hay que usar un poco la imaginación.

En primer lugar, recordemos de la Sección 3.5.1 que las funciones de utilidad U_1 y $AU_1 + B$ representan las mismas preferencias. Luego U_1 puede ser sustituida por $(1 - \delta)U_1$ sin cambiar la situación estratégica. Podemos entonces tomar el límite cuando $\delta \to 1$. Por ejemplo, en la Ecuación (8.1),

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 1} (1 - \delta)U_1(a, b) &= \lim_{\delta \to 1} (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\left(\frac{1 - \delta}{1 - \delta^4}\right) \\ &= 1/4(0 + 1 + 1 + 6) = 2, \end{aligned}$$

[12] Supongamos, por ejemplo, que un agente económico desea comparar dos flujos de rentas de pagos monetarios. Esto se hace calculando sus valores actualizados. Por ejemplo, si la tasa de interés anual está fijada al r por 100, entonces el *valor actualizado* de un pagaré que promete pagar X dólares dentro de tres años es $\$Y = \$X(1 + r)^3$. Esto es así porque Y dólares es la cantidad que usted debería colocar en un banco ahora para obtener X dólares dentro de tres años. Equivalentemente, Y dólares es la mayor cantidad por la que se puede aspirar a vender el pagaré en estos momentos. Nadie pagaría $\$Z > \$Y$ porque los Z dólares invertidos en un banco darían más de X dólares dentro de tres años.

El valor actual de un *flujo de rentas* $X_0, X_1, X_2, \ldots$, en el que X_t se recibirá dentro de t años, es simplemente $X_0 + \delta X_1 + \delta^2 X_2 + \ldots$, donde $\delta = (1 + r)^{-1}$ es el factor de descuento asociado a la tasa de interés r.

[13] Sin embargo, en la Sección 8.3.3 usamos un factor de descuento $\delta < 1$, y en la Sección 8.3.2 el factor de descuento era $\delta = 2/3$.

que es simplemente lo que el jugador I consigue en promedio cuando los pagos del juego-etapa recorren el ciclo 0, 1, 1, 6, como se indica en la Figura 8.6(a)[14].

Una de las ventajas de trabajar con autómatas finitos es que este truco siempre funciona. Cuando dos autómatas finitos juegan el uno contra el otro en un juego repetido, siempre terminan realizando un ciclo a través de una sucesión de estados. Supondremos que cada uno evalúa el flujo de rentas que obtiene tomando el promedio de los pagos que recibe *en este ciclo*[15]. Esto corresponde al caso $\delta = 1$ en juegos de horizonte finito.

La Figura 8.6(b) proporciona un segundo ejemplo. Cada jugador calcula que su flujo de rentas vale 3 útiles. Obsérvese que el forcejeo por colocarse en posición al iniciarse el juego queda ignorado en esta evaluación. Se supone que los jugadores sólo se preocupan por lo que ocurre a *largo plazo.*

8.4.3. Equilibrios de Nash

¿Qué equilibrios podemos encontrar para el dilema del prisionero infinitamente repetido? Sería agradable poder dar una respuesta elegante en términos de equilibrios que fueran subjuego-perfectos. Sin embargo, y exceptuando los comentarios esquemáticos que daremos en la Sección 8.4.5, restringiremos nuestra atención a los equilibrios de Nash, de modo que las cosas se mantengan razonablemente simples.

En lo que resta de capítulo daremos por supuesto que los jugadores evalúan sus flujos de rentas en términos de los promedios de pagos a largo plazo, como se ha indicado en la Sección 8.4.2. En el caso en que el juego-etapa es el dilema del prisionero de la Figura 8.4(a), la Figura 8.7 muestra la forma estratégica del juego que resultaría si los jugadores tuvieran necesariamente que escoger uno de los autómatas finitos de la Figura 8.5.

Un recuento cuidadoso revelará que esta forma estratégica admite 18 equilibrios de Nash de estrategias puras. *Todos* ellos continúan siendo equilibrios de Nash cuando a los jugadores se les permite elegir un autómata finito para jugar el dilema del prisionero infinitamente repetido. Como veremos, estos 18 equilibrios de Nash son representativos de una enorme clase de

[14] Existen varias maneras de calcular el límite de $(1 - \delta)/(1 - \delta^4)$ cuando $\delta \to 1$. Se puede usar la regla de l'Hôpital, como en la Sección 5.8.6. Alternativamente, se puede recurrir a la fórmula de la progresión geométrica, es decir: $1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 = (1 - \delta^4)/(1 - \delta)$. El límite de $1 + \delta + \delta^2 + \delta^3$ cuando $\delta \to 1$ es obviamente 4.

[15] Puesto que evaluar de esta forma es equivalente a usar una función de utilidad definida por

$$V_1(a, b) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi_1(s_n, t_n)$$

con frecuencia este criterio se conoce como el del límite de los promedios. Nada asegura que el límite de los promedios existe en el caso general. Esta es una de las razones para confinar nuestra atención a estrategias representables por autómatas finitos. El recurso de escribir «lim inf» en lugar de «lim» cuando este último no existe, no es muy satisfactorio.

	HALCON	PALOMA	IMPLACABLE	TIT-FOR-TAT	TWEEDLEDUM	TWEEDLEDEE	HUMPTY	DUMPTY
HALCON	1, 1	6, 0	1, 1	1, 1	$2\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	1, 1	1, 1
PALOMA	0, 6	3, 3	3, 3	3, 3	0, 6	3, 3	1, 1	1, 1
IMPLACABLE	1, 1	3, 3	3, 3	3, 3	$2\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	3, 3	1, 1	1, 1
TIT-FOR-TAT	1, 1	3, 3	3, 3	3, 3	2, 2	3, 3	1, 1	1, 1
TWEEDLEDUM	$\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$	6, 0	$2\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	2, 2	3, 3	3, 3	1, 1	1, 1
TWEEDLEDEE	$\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$	3, 3	3, 3	3, 3	3, 3	3, 3	1, 1	1, 1
HUMPTY	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 5
DUMPTY	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	5, 1	1, 1

Figura 8.7. Una forma estratégica restringida.

otros equilibrios de Nash del juego cuando se puede elegir cualquier autómata finito. Sin embargo, por el momento, sólo examinaremos más detenidamente cuatro de los equilibrios.

Halcón contra Halcón. Si un jugador siempre usa *halcón*, entonces el otro no puede hacer nada mejor que también usar siempre *halcón*. Luego (HALCON, HALCON) es un equilibrio de Nash en el juego repetido.

Esto ilustra un hecho general. Siempre que (s, t) es un equilibrio de Nash del juego de una sola vez, un equilibrio de Nash del juego repetido es, invariablemente, para el jugador I planear que siempre usará s y para la jugadora II planear que siempre usará t. Sin embargo, estos equilibrios en el juego repetido son raramente aquellos en los que vale la pena fijarse.

Implacable contra Implacable. Obsérvese que, cuando el autómata IMPLACABLE juega contra sí mismo, el resultado es cooperación. Ambas máquinas siempre usan la acción *paloma*. Para comprobar que (IMPLACABLE, IMPLACABLE) es un equilibrio de Nash para el juego repetido, es necesario confirmar que IMPLACABLE es una respuesta óptima a sí mismo.

Si esto fuera falso, existiría alguna otra máquina desviada que consigue un pago mayor que 3 al jugar contra IMPLACABLE. DESVIADA no puede jugar siempre *paloma* al jugar con IMPLACABLE. Tarde o temprano tendrá que usar *halcón*. Pero tan pronto como DESVIADA usa *halcón*, IMPLACABLE se venga pasando a un estado en el que ella también juega *halcón*, y acabará usando *halcón* y sólo *halcón*. Lo mejor que DESVIADA puede hacer entoncs es cambiar ella también a jugar *halcón* y sólo *halcón*. Luego DESVIADA conseguirá un pago de 1, que es ciertamente no mejor que 3. Esta contradicción demuestra que no existe una máquina DESVIADA que le vaya mejor que a IMPLACABLE, cuando se trata de jugar contra IMPLACABLE. Se sigue que (IMPLACABLE, IMPLACABLE) es un equilibrio de Nash.

Tit-for-Tat contra Tit-for-Tat. La estrategia IMPLACABLE lleva este nombre porque castiga implacablemente cualquier desviación en la recta conducta. No ofrece al culpable oportunidad de arrepentirse. Cuando ha observado una transgresión, el oponente es condenado para siempre.

La estrategia TIT-FOR-TAT es más generosa. Castiga cualquier transgresión lo bastante como para hacerla improductiva, pero, administrado el castigo, el culpable es aceptado de nuevo entre los buenos, hasta que comete una nueva transgresión.

Obsérvese que cuando TIT-FOR-TAT juega contra sí misma, el resultado es cooperación y ambas máquinas consiguen un pago de 3. Para comprobar que (TIT-FOR-TAT, TIT-FOR-TAT) es un equilibrio de Nash, supongamos que una máquina DESVIADA consigue un pago superior a 3 jugando contra TIT-FOR-TAT. DESVIADA tendría que jugar *halcón* tarde o temprano. Entonces TIT-FOR-TAT contesta en los mismos términos y juega *halcón* hasta que DESVIADA vuelve a jugar *paloma*. Así, como la Figura 8.8 muestra claramente, DESVIADA no consigue nada. Por cada etapa en la que juega *halcón* cuando TIT-FOR-TAT juega *paloma* y consigue un pago de etapa igual a 6, DESVIADA

					Desviación				Penitencia	
I	Pago	3	3	3	6	1	1	1	0	3
I	DESVIADA	*D*	*D*	*D*	*H*	*H*	*H*	*H*	*D*	*D*
	Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
II	TIT-FOR-TAT	*D*	*D*	*D*	*D*	*H*	*H*	*H*	*H*	*D*
II	Pago	3	3	3	0	1	1	1	6	3
						Castigo				

Figura 8.8. Castigo y redención.

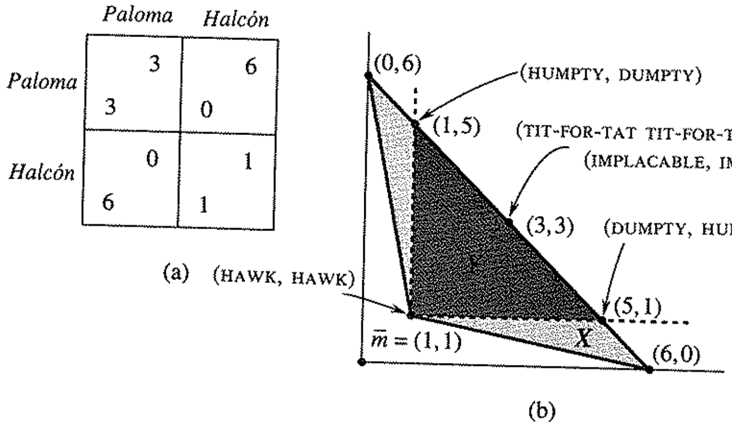


Figura 8.9. Resultados de equilibrio de Nash.

ha de sufrir un pago de etapa compensatorio igual a 0 cuando juega *paloma* para conseguir que TIT-FOR-TAT salga de su fase castigadora.

Humpty contra Dumpty. Cuando HUMPTY juega contra DUMPTY, entran en el ciclo de pares de acciones (D, H), (D, H), (D, H), (D, H), (D, H), (H, D), que repiten una y otra vez. Si alguno de los dos se desviara, el castigo eterno caería sobre él, como en el caso de la estrategia IMPLACABLE. Luego (HUMPTY, DUMPTY) es un equilibrio de Nash.

8.4.4. El teorema folk

La Figura 8.9(a) muestra una vez más el dilema del prisionero de una sola vez. La Figura 8.9(b) ilustra su región de pagos cooperativos X. Todos los resultados de equilibrio de Nash para la versión infinitamente repetida estudiada en la Sección 8.4.3 se muestran en la Figura 8.9(b). Hay muchos más resultados de equilibrio de Nash. Si los marcáramos todos en la Figura 8.9(b), llenarían completamente la región sombreada más oscura de X[16].

Esto es consecuencia de un resultado general conocido como el *teorema folk*[17]. La prueba es fácil, pero necesitamos dedicar un cierto tiempo a prepararla. Esencialmente, lo que hemos de hacer es reformular de modo más general ideas ya introducidas en el dilema del prisionero repetido infinitamente.

[16] Más exactamente, cualquier x de X que cumple $x \geqslant (1, 1)$ es un equilibrio de Nash, si x_1 y x_2 son números racionales. La última condición es necesaria porque sólo estamos considerando estrategias representables por medio de autómatas finitos.

[17] Folk como en folklore. En los primeros años de la teoría de juegos parece que todo el mundo conocía el teorema, pero nadie sabía quien lo había descubierto.

Mates 8.5 ⟶

El juego $G^{\#}$. En lo que sigue, el papel que ha jugado hasta ahora el dilema del prisionero lo desempeñará un juego finito cualquiera G. Este sera el juego-etapa para un juego infinitamente repetido G^{∞}. El conjunto S de estrategias puras del jugador I para el juego de una sola vez G será el conjunto de acciones disponibles para él en cada etapa de G^{∞}. El conjunto T de estrategias puras de la jugadora II para G será el conjunto de acciones de las que ella dispone en cada etapa de G^{∞}.

Como sabemos, las estrategias puras en G^{∞} son muy complicadas. Nos limitaremos, por tanto, a las estrategias que se pueden representar por autómatas finitos. El conjunto de máquinas de Moore con un conjunto de inputs T y un conjunto de outputs S será representado por A. El conjunto de máquinas de Moore con un conjunto de inputs S y un conjunto de outputs T será representado por B. Los conjuntos A y B serán los conjuntos de estrategias puras de un juego $G^{\#}$ que será el objetivo último de nuestro estudio. Podemos considerar la elección de un autómata a de A por el jugador I como la decisión de relegar la responsabilidad de jugar G^{∞} a la máquina a. Análogamente, la elección de b en B por la jugadora II se puede ver como la decisión de relegar la responsabilidad en b.

Para analizar $G^{\#}$, necesitamos introducir funciones de pagos $V_i : A \times B \to \mathbb{R}$. Las definiciones usan las funciones de pagos $\pi_i : S \times T \to \mathbb{R}$ del juego original de una sola vez G.

Si el jugador I elige a en A, y la jugadora II elige b en B, entonces los dos autómatas tarde o temprano entrarán en un ciclo en el que pasarán por la misma sucesión de estados una y otra vez para siempre[18]. La Figura 8.6 da algunos ejemplos. Supongamos que el ciclo tiene una longitud de N etapas y que los pares de acciones por los que las máquinas pasan en el ciclo son (s_1, t_1), (s_2, t_2), ..., (s_n, t_n). El pago del jugador i en $G^{\#}$ se define como

$$V_i(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi_i(s_n, t_n). \tag{8.2}$$

Así, el pago de un jugador en $G^{\#}$ es lo que el jugador consigue en promedio durante el ciclo en el que el juego se estabiliza finalmente. Como se ha explicado en la Sección 8.4.2, la evaluación del flujo de rentas de los jugadores por este método es un intento de evadir las dificultades que surgen con un factor de descuento $\delta = 1$.

Consideremos, por ejemplo, el caso ilustrado por la Figura 8.6(a). El juego de una sola vez G es el dilema del prisionero. El autómata a es

[18] Si a tiene m estados y b tiene n, sólo hay mn pares de estados. Luego, después de a lo sumo mn estados, las máquinas tienen que volver a una situación idéntica a una que ya han experimentado conjuntamente. A partir de ese punto, están condenadas a repetir su conducta pasada.

TIT-FOR-TAT y el autómata b es TWEEDLEDUM. La longitud del ciclo es $N = 4$, y $(s_1, s_2) = (D, H)$, $(s_2, t_2) = (s_3, t_3) = (H, H)$, $(s_4, t_4) = (H, D)$. Así,

$$\begin{aligned}(V_1(a, b), V_2(a, b)) &= 1/4\ \{(0, 6) + (1, 1) + (1, 1) + (6, 0)\}\\ &= 1/4\ (0, 6) + 1/2\ (1, 1) + 1/4\ (6, 0) = (2, 2).\end{aligned}$$

Lema 8.4.1. Cualquier resultado de $G^{\#}$ es necesariamente un punto de la región de pagos cooperativos del juego de una sola vez G.

Demostración. Supongamos que (s, t) es un par de estrategias puras de G. Entonces $(\pi_1(s, t), \pi_2(s, t))$ es el par de pagos que se encuentra en la fila s-ésima y la columna t-ésima de la forma estratégica de G. La región de pagos cooperativos de G es la clausura convexa de todos estos pares de pagos (Sección 5.3). A partir de (8.2),

$$(V_1(a, b), V_2(a, b)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\pi_1(s_n, t_n), \pi_2(s_n, t_n)),$$

y de aquí que el resultado $(V_1(a, b), V_2(a, b))$ del juego $G^{\#}$ es una combinación convexa (Sección 5.2.1) de pares de pagos en la forma estratégica de G. Por tanto pertenece a la región de pagos cooperativos de G. □

Punto de minimax. El *valor maximín* $\underline{m}_i$ del jugador i para el juego de una sola vez G se define a partir de su matriz de pagos M_i, según lo dicho en la Sección 6.2. Este es el nivel de seguridad del jugador i en G, si los jugadores sólo pueden usar estrategias puras (Sección 6.3.1). Es importante subrayar que lo importante aquí no será el valor maximín del jugador i, sino su *valor minimax* $\overline{m}_i$. Siempre es cierto que $\underline{m}_i \leqslant \overline{m}_i$ (Teorema 6.2.1), pero $\underline{m}_i = \overline{m}_i$ si y sólo si la matriz de pagos M_i tiene un punto de silla (Teorema 6.2.2)[19].

El punto de minimax $\overline{m} = (\overline{m}_1, \overline{m}_2)$ para el dilema del prisionero es (1, 1). En este caso especial, (1, 1) también es el punto de maximín $\underline{m}$. El punto de minimax $\overline{m}$ para el juego bimatricial[20] de la Figura 8.10(a) es (3, 2). Su punto de maximín $\underline{m}$ es (2, 2). Como siempre, $\underline{m} \leqslant \overline{m}$. La Figura 8.10(b) muestra la región de pagos cooperativos del juego juntamente con la situación de $\underline{m}$ y $\overline{m}$.

Una reformulación de la definición del valor minimax $\overline{m}_1$ nos ayudará en el siguiente lema. Para cada estrategia pura t en T disponible para la

[19] El teorema del minimax de Von Neumann (Teorema 6.4.4) dice que $\underline{v}_i = \overline{v}_i$. Pero $\underline{v}_i$ y $\overline{v}_i$ son valores maximín y minimax cuando *se aceptan estrategias mixtas*. En esta sección hemos excluido las estrategias mixtas en un intento de hacer las cosas razonablemente simples, pero los resultados serían más elegantes si aceptaramos estrategias mixtas. (Ejercicio 8.6.26.)

[20] Sus matrices de pagos serán conocidas por la Sección 6.2. La matriz de pagos del jugador I es la M de la Figura 6.1. La matriz de pagos de la jugadora II es la traspuesta de la matriz N de la Figura 6.2. (¿Por qué la *traspuesta* de N?)

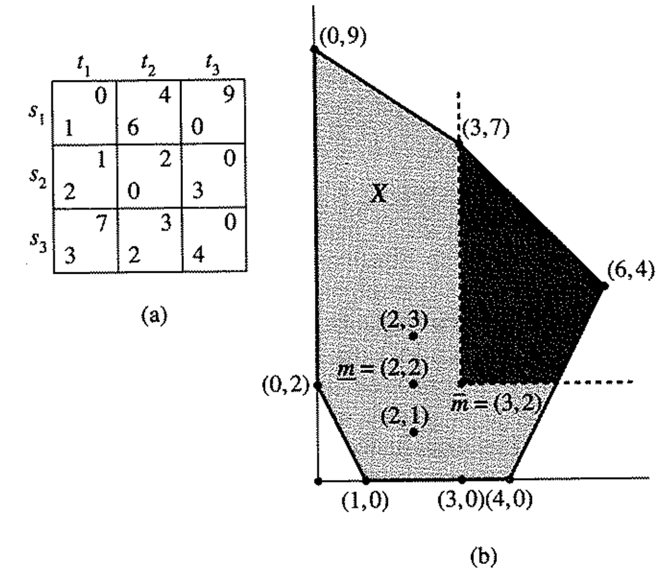


Figura 8.10. Un punto de minimax.

jugadora II, sea $r_1(t)$ una de las respuestas óptimas del jugador I en S (Sección 7.1.1). Entonces

$$\pi_1(r_1(t), t) = \max_{s \in S} \pi_1(s, t).$$

Se sigue que

$$\overline{m}_1 = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi_1(s, t) \min_{t \in T} \pi_1(r_1(t), t). \tag{8.3}$$

Una consecuencia trivial de esta reformulación de la definición es que cualquier equilibrio de Nash (σ, τ) en estrategias puras del juego de una sola vez G necesariamente asigna a cada jugador por lo menos su valor minimax. La razón es simple. Ya que s es una respuesta óptima a τ,

$$\pi_1(\sigma, \tau) = \pi_1(r_1(\tau), \tau) \geqslant \min_{t \in T} \pi_1(r_1(t), t) = \overline{m}_1.$$

Análogamente, que τ sea una respuesta óptima a σ implica que $\pi_2(\sigma, \tau) \geqslant \overline{m}_2$.

El lema siguiente dice algo que es superficialmente muy parecido. Pero recordemos que $G^{\#}$ es un juego muy distinto de G. Las estrategias puras de $G^{\#}$ son autómatas que juegan el juego repetido G^{∞}.

Lema 8.4.2. Cualquier equilibrio de Nash de $G^{\#}$ asigna a cada jugador por lo menos su valor minimax en el juego de una sola vez G.

Demostración. Veremos que si el pago del jugador I, $V_1(a, b)$, es menor que $\overline{m}_1$, entonces el jugador I tiene una respuesta a b mejor que a, y por tanto

(a, b) no puede ser un equilibrio de Nash. La respuesta mejor es fácil de hallar. Tomemos simplemente un autómata de A que da una respuesta mejor que b en cada etapa del juego repetido[21]. Si $\pi_1(s_n, t_n)$ es el peor pago del juego-etapa que c obtiene al jugar b, entonces

$$\begin{aligned} V_1(c, b) &\geqslant \pi_1(s_n, t_n) \\ &= \pi_1(r_1(t_n), t_n) \\ &\geqslant \min_{t \in T} \pi_1(r_1(t), t) = \overline{m}_1. \end{aligned}$$

Nadie dice que c es una respuesta óptima a b, pero es una respuesta mejor que a cuando $V_1(a, b) < \overline{m}_1$. Se sigue que si (a, b) es un equilibrio de Nash para $G^\#$, entonces $V_1(a, b) \geqslant \overline{m}_1$. Análogamente, $V_2(a, b) \geqslant \overline{m}_2$. □

Las conclusiones de los Lemas 8.4.1 y 8.4.2 son ilustradas en dos casos particulares por las Figuras 8.9(b) y 8.10(b). Todas los resultados de equilibrio de Nash con estrategias puras para el juego $G^\#$ pertenecen al conjunto $Y = \{x : x \in X \text{ y } x \geqslant \overline{m}\}$:

En el caso del dilema del prisionero de la Figura 8.10(b), se indican varios resultados de equilibrio de Nash particulares para el juego $G^\#$. Cuando G es el juego de la Figura 8.10(a), hasta ahora no hemos estudiado ningún resultado de equilibrio de Nash para $G^\#$. Un equilibrio es fácil de identificar. Ya que (s_3, t_1) es un resultado de equilibrio de Nash para el juego *de una sola vez* G, la elección de un autómata por el jugador I que siempre juega s_3 y la elección de un autómata por la jugadora II que siempre juega t_1 tiene que ser un equilibrio de Nash. Así, (3, 7) es un resultado de equilibrio de Nash para $G^\#$. Sin embargo, el siguiente teorema demuestra que este resultado de equilibrio de Nash es sólo uno entre muchos otros.

Teorema 8.4.1 (Teorema folk). Sea X la región de pagos cooperativos de un juego de una sola vez G, y sea $\overline{m}$ su punto de minimax. Entonces los resultados que corresponden a equilibrios de Nash en estrategias puras del juego $G^\#$ son densos[22] en el conjunto

$$Y = \{x : x \in X \quad \text{y} \quad x \geqslant \overline{m}\}.$$

---

[21] Si b juega t_1 en la etapa uno, entonces c debería jugar $r_1(t_1)$ en la etapa uno. Después de observar el juego de c, b cambiará de estado y jugará t_2 en la etapa dos. Luego c debería jugar $r_1(t_2)$ en la etapa dos. Y así sucesivamente. Tarde o temprano, b volverá a un estado que ha ocupado previamente. Los dos autómatas entonces empezarán un ciclo. Obsérvese que c no necesita más estados que b.

[22] Por ejemplo, los números racionales son densos en el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales. Cada número real se puede aproximar tanto como se quiera por un número racional. Consideremos, por ejemplo, el número real $\pi = 3.14159...$ Un número racional que aproxima π con un error menor que 0.0005 es 3.142. Un número racional que aproxima π con un error menor que 0.00005 es 3.1416.

Recordemos que un número racional es una fracción m/n en la cual m y $n \neq 0$ son enteros. Los enteros son 0, ±1, ±2, ±3, ...

Mates 8.4.5 ⟶

Demostración. Supongamos que $x_1, x_2, ..., x_K$ son pares de pagos que aparecen en la forma estratégica de G. Sean $q_1, q_2, ..., q_K$ números racionales no negativos que satisfacen $q_1 + q_2 + ... + q_K = 1$. Entonces

$$y = q_1 x_1 + q_2 x_2 + ... + q_K x_K$$

es una combinación convexa de $x_1, x_2, ..., x_K$, y por tanto, pertenece a X. El conjunto de todos estos y es denso en X. La idea de la demostración es ver que, si $y \geqslant \overline{m}$, entonces y es un resultado de equilibrio de Nash de $G^\#$.

Sean $(s_1, t_1), (s_2, t_2), ..., (s_K, t_K)$ los pares de estrategias puras que generan los resultados $x_1, x_2, ..., x_K$ de G. Esto significa que $x_k = (\pi_1(s_k, t_k), \pi_2(s_k, t_k))$ para $k = 1, 2, ..., K$.

Consideremos ahora las fracciones $q_1, q_2, ..., q_K$. Se pueden escribir con un común denominador N de manera que $q_k = n_k/N$ $(k = 1, 2, ..., K)$, donde n_k es un número entero no negativo. Entonces es cierto que

$$n_1 + n_2 + ... + n_K = N.$$

Para obtener el resultado y de $G^\#$, construiremos dos autómatas a y b que realizan un ciclo perpetuo de N pares de acciones. En primer lugar, juegan (s_1, t_1) durante n_1 etapas, después juegan (s_2, t_2) durante n_2 etapas, y así sucesivamente. Finalmente, completan el ciclo jugando (s_K, t_K) durante n_K etapas, tras lo cual el ciclo empieza de nuevo. El pago del jugador i en $G^\#$ es

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} n_k \pi_i(s_k, t_k) = \sum_{k=1}^{K} q_k \pi_i(s_k, t_k),$$

que es la coordenada i-ésima de y. Así, cuando el autómata a juega contra el autómata b, el resultado de $G^\#$ que se obtiene es el par de pagos y.

Como ejemplo, consideremos el caso en que $K = 2$ y $q_1 = 5/6$, $q_2 = 1/6$. El común denominador de las fracciones q_1 y q_2 es $N = 6$, con $n_1 = 5$ y $n_2 = 1$. La Figura 8.11(a) muestra la estructura de los autómatas a y b que aparecen por ahora en este caso particular.

Los autómatas HUMPTY y DUMPTY de la Figura 8.5 proporcionan una versión totalmente detallada del ejemplo considerado. En su caso, el juego de una sola vez G es el dilema del prisionero, para el cual X y $\overline{m}$ son como aparecen en la Figura 8.9(b). Los vectores de pagos x_1 y x_2 son (0, 6) y (6, 0), respectivamente. (Estos están generados por los pares de estrategias puras $(s_1, t_1) = (D, H)$ y $(s_2, t_2) = (H, D)$.) El par de pagos y que se obtiene cuando humpty juega contra dumpty en $G^\#$ viene dado por

$$y = q_1 x_1 + q_2 x_2 = 5/6(0, 6) + 1/6(6, 0) = (1, 5).$$

Obsérvese que y pertenece al conjunto Y de la Figura 8.9(b).

HUMPTY y DUMPTY tienen más estructura que los autómatas incompletos

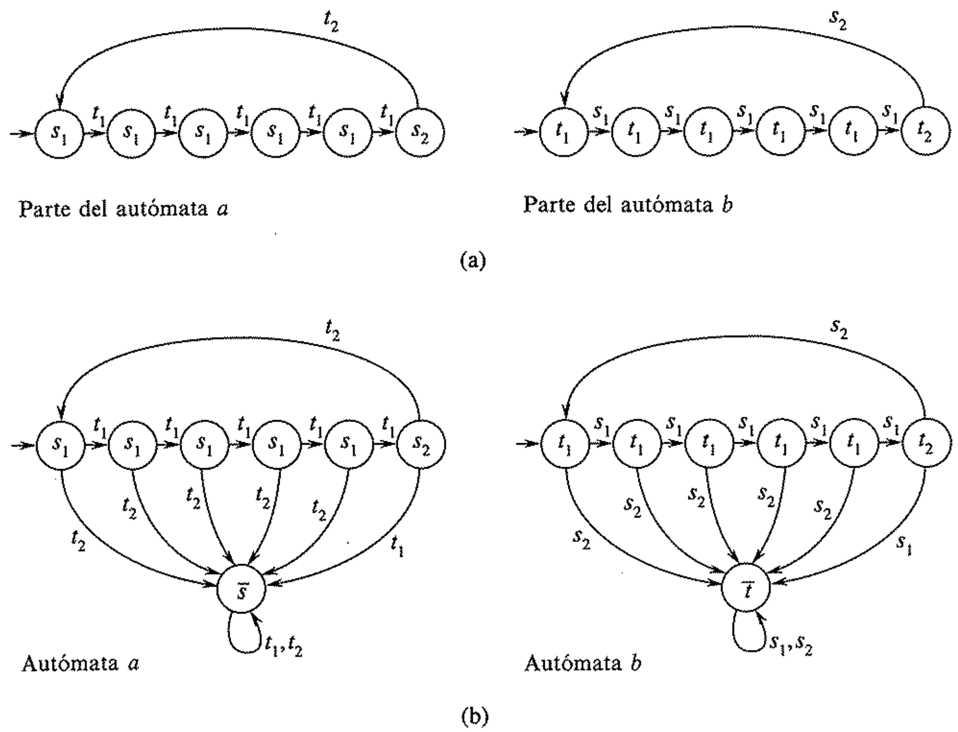


Figura 8.11. Autómatas para el teorema folk.

dibujados en la Figura 8.11(a). Su estructura extra les asegura que cada uno de ellos es una respuesta óptima al otro, de manera que (HUMPTY, DUMPTY) es un equilibrio de Nash para $G^{\#}$. La estructura extra especifica de qué forma hay que castigar al oponente si alguna vez se desvía del ciclo dado, en el que una etapa (H, D) siempre es seguida y precedida de cinco etapas (D, H). En el caso de HUMPTY y DUMPTY, el castigo consiste en el severo expediente de jugar siempre *halcón* después de una desviación del oponente. Ninguno de los dos jugadores puede así ganar sustituyendo HUMPTY o DUMPTY por una máquina DESVIADA por las razones dadas en la Sección 8.4.3.

Para terminar la demostración del teorema folk, falta completar la construcción de a y b. Como en HUMPTY y DUMPTY, hay que encontrar castigos que disuadan a los jugadores de sustituir a o b por una máquina que se desvíe del ciclo de comportamiento que conduce al resultado y en $G^{\#}$.

El aspecto significativo de *halcón*, como castigo en el juego infinitamente repetido del dilema del prisionero, es que *minimaximiza* al oponente. En general, la acción s del jugador I que *minimaximiza* a la jugadora II en G satisface

$$\pi_2(\bar{s}, r_2(\bar{s})) = \min_{s \in S} \pi_2(s, r_2(s)) = \overline{m}_2$$

Así, incluso si la jugadora II da una respuesta óptima $r_2(\bar{s})$ a $\bar{s}$, no consigue más que su valor minimax $\overline{m}_2$.

La idea de acciones $\bar{s}$ y $\bar{t}$ minimaximizadoras para los jugadores I y II en el juego de una sola vez G permite completar la construcción de los autómatas a y b, como ilustra la Figura 8.11(b). Si se da una desviación de la sucesión que sostiene a y, el que se desvía es minimaximizado por su oponente en todas las etapas posteriores.

El jugador I, por ejemplo, no podrá ahora ganar nada sustituyendo a por algún autómata c que se desvía, si $y \geqslant \overline{m}_1$. Si c juega como a, sólo conseguirá y_1. Si se desvía del juego de a, provocará que b se sitúe en fase de castigo y sólo conseguirá $\overline{m}_1$. Análogamente, la jugadora II no puede conseguir más que b, si $y_2 \geqslant \overline{m}_2$.

Esto demuestra el teorema folk. Si $y \geqslant \overline{m}$, tanto a como b son una respuesta óptima al otro. Puesto que el resultado cuando a juega contra b en $G^{\#}$ es y, se sigue que y es un equilibrio de Nash de $G^{\#}$. □

La prueba anterior deja algunos cabos sueltos que hay que atar. La primera cuestión que surge es por qué sólo hemos discutido equilibrios de Nash, mientras que en capítulos anteriores hemos subrayado la importancia de equilibrios subjuego-perfectos. Esta cuestión la consideraremos en la Sección 8.4.5. Por ahora nos concentraremos en una segunda cuestión. ¿Qué ocurre si el punto de minimax $\overline{m}$ no se encuentra por debajo de la frontera de Pareto de X, como en el Ejercicio 8.6.23? Los Lemas 8.4.1 y 8.4.2 nos dicen que en este caso $G^{\#}$ no tiene ningún equilibrio de Nash con estrategias puras. En estos casos, la lección del Capítulo 6 es que deberíamos buscar equilibrios con estrategias mixtas. Entonces el teorema folk continúa cumpliéndose, pero $\bar{v}$ (el punto de minimax de G cuando se permiten estrategias mixtas) sustituye a $\overline{m}$[23].

8.4.5. ¿Quién guarda a los guardianes?

Filo 8.5 ⟶

En capítulos anteriores hemos aireado bastante la idea de que el concepto de equilibrio de Nash es inadecuado. Sin embargo, al discutir el teorema folk sólo hemos considerado equilibrios de Nash. ¿Por qué hemos dejado de lado los equilibrios subjuego-perfectos?

No se trata de que las cuestiones que motivaron que introdujéramos los equilibrios subjuego-perfectos sean aquí irrelevantes. Por el contrario, los problemas planteados en las Secciones 1.8.2, 4.6.3 y 7.5.2 son tan graves en los juegos repetidos como en cualquier otra parte. Por ejemplo, en la sec-

[23] Según el teorema del minimax de Von Neumann (Teorema 6.4.4), $\bar{v} = \underline{v}$. Según el teorema de Nash (Teorema 7.7.1), el juego de una sola vez G siempre tiene un equilibrio de Nash, si se aceptan estrategias mixtas. Si este equilibrio de Nash genera el resultado y, entonces sabemos por el Ejercicio 7.9.10 que $\bar{v} \leqslant y \in X$. Se sigue que el conjunto Y del teorema folk con estrategias mixtas nunca es vacío.

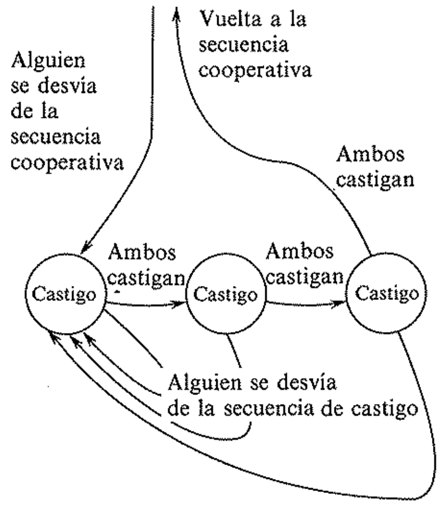


Figura 8.12. Guardando a los guardianes.

ción anterior encontramos equilibrios de Nash que sostenían resultados cooperativos. En estos equilibrios, los jugadores son disuadidos del juego cooperativo por la posibilidad de ser castigados. Creen que si llegan a desviarse, el oponente se vengará minimaximizándolos. Luego nunca *llegan* a desviarse y el castigo nunca *llega* a ser inflingido. En estas situaciones, debemos siempre preguntarnos si las creencias que atribuimos a los jugadores tienen sentido. ¿Es realmente creíble que, si el jugador I se desviara, la jugadora II lo minimaximizaría implacablemente para siempre, sin importarle el daño que esto pueda causarle a ella?[24]. La respuesta es claramente *no*. Entonces se plantea otra cuestión. ¿Se pueden encontrar estrategias de equilibrio en las que los castigos planeados *son* siempre creíbles, y, por tanto, disuadirán *efectivamente* a jugadores racionales de desviarse? La respuesta a esta cuestión es sí. Es decir, se cumple una versión del teorema folk en la que los equilibrios subjuego-perfectos han sustituido a los equilibrios de Nash.

No ofrecemos una demostración rigurosa de esta versión del teorema folk porque está llena de detalles molestos. Sin embargo, no es difícil dar una idea en términos generales del aspecto de una estrategia subjuego-perfecto. La Figura 8.12 muestra un esquema de castigo adecuado. Si alguien se aparta de la sucesión cooperativa[25], entonces es castigado durante tantas

[24] Por ejemplo, en el juego de la Figura 8.10(a), si el jugador I siempre minimaximiza a la jugadora II, él siempre consigue menos que su propio valor minimax, suponiendo que ella responde con su respuesta óptima.

[25] En la historia que aquí se cuenta, *ambos* jugadores pasan al estado de castigar. Esto significa que las máquinas de Moore necesitarían recibir no sólo lo que el oponente ha hecho, sino también lo que ellas hicieron por última vez.

etapas como sean necesarias para hacer la desviación improductiva[26]. Si el castigo es administrado con éxito, ambos jugadores retornan a su fase cooperativa. Pero, qué ocurre si alguien no castiga cuando es necesario castigar? Entonces esta conducta también es castigada. Y si alguien deja de castigar a alguien que ha dejado de castigar cuando hay que castigar, entonces esta conducta también es castigada. Y así sucesivamente.

Estas construcciones dan una respuesta formal a una cuestión tan antigua como la vida misma y que se formula habitualmente con una cita del poeta satírico romano Juvenal:

> Pone seram; cohibe:
> *Sed quis custodiet ipsos custodes?*
> Cauta est, et ab illis incipit uxor[27].

Las palabras en cursiva se pueden traducir por, quién guarda a los guardianes?[28]. La respuesta de la teoria de juegos es que, si las cosas se organizan adecuadamente, podemos conseguir que se guarden entre sí. Por supuesto, esto no es nada nuevo para quienes dirigen las fuerzas secretas de la policía en estados totalitarios.

8.5. Contrato social

Filo 8.6 ⟶

¿Qué es lo que mantiene cohesionada a la sociedad? Desde la antigüedad, los filósofos han intentado articular respuestas en términos de un «contrato social». Este sería un acuerdo implícito en el que participamos todos y que usaríamos para regular el trato de unos con otros.

La palabra «contrato» es desafortunada. Sugiere dos cosas: que somos plenamente conscientes de los términos del acuerdo, y que alguna instancia hace cumplir y respetar sus términos. Pero ninguna de estas propiedades que tienen los contratos normales se da necesariamente en el caso de un contrato social. En particular, si tiene sentido imaginar que un contrato social proporciona el principio organizador de una sociedad, debemos explicar por qué la gente respeta los términos del contrato. No podemos explicarlo recurriendo a policías. Antes de que el contrato social existiera no había policías. De hecho, el contrato social se ocupa en parte de proveer una fuerza de policía.

A estas alturas ya debe estar claro qué respuesta va a dar un especialista en teoría de juegos. Si el contrato social incluye un acuerdo para coordinarse

[26] En la Figura 8.12, se supone que tres etapas de castigo son lo adecuado.

[27] ¿Quién dice que éste no es un manual de categoría?

[28] De a quienes están guardando, y de por qué los guardianes pueden no ser dignos de confianza, es mejor no hablar. Alguien que tuviera las ideas de Juvenal acerca del estatus de las mujeres, no duraría mucho tiempo en un campus universitario moderno.

en un equilibrio adecuado, entonces la gente respetará los términos del contrato social porque hacerlo redunda en su propio beneficio. El contrato social se autorregulará. Los guardianes se vigilarán unos a otros. No es necesario ningun cemento para cohesionar la sociedad. Tendrá el carácter de una muralla de piedras en la que cada piedra es mantenida en su sitio por sus vecinas y a su vez contribuye a mantenerlas a ellas en los suyos.

Este punto de vista identifica la idea de un contrato social con la noción de una convención discutida en la Sección 7.3.2. Al discutir convenciones, el filósofo David Hume subrayó que la sociedad no es un juego de una sola vez. En un fragmento famoso de su *Treatise on Human Nature*, Hume dice:

> Aprendo a servir a otro sin sentir por él ningún afecto real, porque preveo que responderá igual, esperando que yo responda de la misma forma, y para mantener la misma correspondencia de buenos relaciones conmigo o con otros. Y consecuentemente, después de que yo le he servido y él está en posesión de la ventaja que mi acción le proporciona, se siente movido a ejecutar su parte, previendo las consecuencias de su negativa [a ejecutarla].

Esto fue escrito más de 200 años antes de que la teoría de juegos repetidos fuera concebida, pero ya expresa todas las ideas importantes acerca de equilibrios que sostienen resultados cooperativos. El secreto es *reciprocidad.* Habitualmente esta palabra se usa para describir principios del tipo ayúdame-y-te-ayudaré[29]. Sin embargo, Hume menciona no sólo la importancia que tiene, para alguien a quien ayudo, el mantener buenas relaciones *conmigo*, sino también la importancia que tiene el mantener buenas relaciones *con otros.* ¿Cómo puede funcionar un principio del tipo no-te-ayudaré-si-no-ayudas-a-los-demás?

8.5.1. Un modelo de generaciones solapadas

Este modelo simple está pensado para responder a la cuestión que concluye la discusión precedente. También servirá como un ejemplo adicional para el teorema folk.

Imaginemos un mundo en el que en cualquier etapa sólo viven dos personas: una madre y una hija[30]. Cada mujer vive exactamente dos etapas. La primera es la *juventud* y la segunda la *vejez.* Algunos aspectos de la historia de la vida de cualquier jugadora son constantes. En su juventud, trabaja y gana dos unidades de un bien perecedero. Este sólo se conserva bien durante el *mismo* período en que se gana. Al final de su etapa juvenil, cada jugadora da a luz a una hija. Entonces la madre entra en la vejez, en la que es demasiado débil para trabajar y no gana nada[31].

[29] Una expresión mejor sería *no*-te-ayudaré-si-*no*-me-ayudas.

[30] Al no haber varones, la reproducción debe imaginarse partogenética.

[31] Para evitar el problema del huevo y la gallina, supondremos que el pasado tiene un horizonte infinito, como el futuro. Estrictamente hablando, el modelo obtenido no será un juego porque no existe una primera jugada. Sin embargo, esto no afecta a nada importante aquí.

Todas preferirían no consumir todo lo que ganan en su juventud. Todas las jugadoras preferirían consumir una unidad en su juventud y una unidad en su vejez. Desgraciadamente, el bien no se puede almacenar, y la segunda posibilidad no se puede realizar excepto si se transfieren bienes de una jugadora a otra.

Un equilibrio es que cada jugadora consuma todo lo que gana en su juventud. Todas sufrirán una vejez miserable, en este caso, pero todas habrán optimizado, dadas las elecciones de las demás.

Un resultado socialmente más deseable sería que cada hija diera a la madre una de las unidades del bien. Todo el mundo podría así disfrutar de una unidad de consumo en cada período de su vida. Pero, ¿es ésta una conducta que se puede sostener en equilibrio?

Supongamos primero que cada hija adopta la estrategia de dar una unidad de sus ganancias a su madre si y sólo si su madre se comportó del mismo modo en el período previo. Este es un equilibrio de *Nash.* Nadie que se desviara conseguiría nada, si todas las demás respetaran sus estrategias de equilibrio. Lo mejor que alguien que se desviara podría hacer es consumir todos sus ingresos en su juventud, pero entonces la estrategia de equilibrio de su hija le exige que castigue esta conducta egoísta. El castigo consiste en que la hija no hace el regalo de la unidad de consumo que le habría hecho en otras circunstancias. Quien se desvía no tiene nada durante su vejez.

Obsérvese, sin embargo, que una hija no *querría* castigar a su madre que se desvía. Si lo hiciera, ella también sería castigada por *su* propia hija. El equilibrio de Nash que hemos descubierto, por tanto, no es un equilibrio subjuego-perfecto porque requiere una conducta fuera del equilibrio que no es creíble para jugadores racionales. Un equilibrio *subjuego-perfecto* que sostiene el resultado cooperativo es fácil de encontrar. Cada hija da una unidad del bien de consumo a su madre y si sólo si *nadie* ha hecho nada distinto en el pasado. Los castigos en este equilibrio subjuego-perfecto son ciertamente severos. El castigo se extiende no sólo a la tercera y cuarta generación, como en la Biblia, sino también a todos los descendientes del transgresor. ¿No podemos hallar un equilibrio subjuego-perfecto en el que sólo los culpables son castigados?

Para ello, llamemos a una jugadora una *conformista* si da a su madre una unidad cuando su made actúa como una *conformista.* En caso contrario, una hija conformista no da nada a su madre. En este planteamiento, las *conformistas* premian a otras *conformistas* y castigan a las *no conformistas.* Con ello es un equilibrio subjuego-perfecto que todo el mundo sea *conformista*[32].

Para algunos, estas historias acerca de cómo las sociedades podrían, en principio, mantener la cohesión son ultrajantes. Se dice que las historias

[32] La circularidad en la definición de *conformista* es sólo aparente. Una vez que hemos decidido que una hija que ha dado a su madre una unidad en el tiempo t es conformista, queda determinado si cualquier jugadora en un tiempo posterior es *conformista* o no *conformista.*

«denigran el espíritu humano» o «devalúan la capacidad humana de amar». Estas reacciones pasan por alto aquello que es importante en estas historias. Los especialistas en teoría de juegos se sienten tan hijos de su madre como cualquier otra persona. Saben perfectamente bien que, con frecuencia, las hijas cuidan a sus madres ancianas porque las quieren. El modelo de las generaciones solapadas es una *parábola*. No quiere ser una descripción realista de la condición humana. Quiere fijar la atención exclusivamente en un aspecto de la existencia humana, y lo hace con mucho éxito. Nos enseña que incluso si todas las hijas tuvieran un corazón de piedra, no se seguiría necesariamente que sus madres serían abandonadas. En una sociedad coordinada por un contrato social adecuado, las madres serían cuidadas porque sería lo mejor para las hijas que fuera así. Si lo que sus cabezas les dicen que han de hacer resulta ser lo que sus corazones ansían hacer, tanto mejor para las hijas —y para la estabilidad de la sociedad en la que viven.

8.6. Ejercicios

1. La Sección 8.2 estudia el juego Z de suma cero de la Figura 8.1 repetido dos veces en la hipótesis de que el pago de un jugador en el juego repetido Z^2 es $x + y$, siendo x el pago del jugador en la primera etapa e y el pago en la segunda etapa. ¿Qué matriz sustituiría a la Figura 8.3(b) si los pagos en Z^2 se tomaran iguales a
   a) $x + y/2$ *b)* xy?
2. En la Sección 8.2, el conjunto H es el conjunto de las historias de juego posibles justo antes de que Z se juegue por segunda vez. ¿Cuántos elementos tiene Z? ¿Cuántos elementos tendría H si Z fuera un juego matricial 3×4? ¿Cuántos elementos tendría H si fuera el conjunto de historias de juego justo antes de que Z se jugara por quinta vez?

Mates

3. Demostrar que el dilema del prisionero repetido n veces tiene

$$2^{4^0} \times 2^{4^1} \times 2^{4^2} \times \ldots \times 2^{4^{n-1}} = 2^{(4^n - 1)/3}$$

estrategias puras. Estimar cuántas cifras decimales son necesarias para escribir el número de estrategias puras en el dilema del prisionero repetido diez veces.

4. Un juego repetido G^n se obtiene cuando G es jugado exactamente n veces seguidas. Los pagos en G^n se obtienen sumando los pagos en cada juego-etapa. Si G tiene un único equilibrio de Nash, demostrar que G^n tiene un único equilibrio subjuego-perfecto y que éste requiere que cada jugador use siempre su equilibrio de Nash en cada etapa.
5. Recordemos que el juego del gallina de la Figura 7.3(c) tiene tres equilibrios de Nash. ¿Por qué se sigue que el juego obtenido al repetir el gallina dos veces y sumando los pagos tiene por lo menos nueve equilibrios subjuego-perfectos?

Mates

6. El Teorema 8.3.1 muestra que, cuando el dilema del prisionero se repite un número finito de veces, existe un único equilibrio *subjuego-perfecto* en el que cada jugador usa siempre *halcón*. Demostrar que todos los equilibrios de *Nash* también conducen a que *halcón* sea siempre jugado *de hecho*, pero que existen equilibrios de Nash en los que los jugadores usan *paloma* bajo ciertas condiciones que nunca se cumplen cuando se usa el equilibrio.

Econ

7. El Teorema 8.3.1 muestra que, cuando el dilema del prisionero se repite un número finito de veces, existe un único equilibrio subjuego-perfecto en el que cada jugador usa siempre *halcón*. Usar un argumento formal similar para demostrar la conclusión del Ejercicio 4.8.30(b) para el juego de la cadena de supermercados finitamente repetido.
8. La Sección 8.3.2 estudia una versión del dilema del prisionero repetido en el que la probabilidad p de que una repetición cualquiera sea la última es $p = 1/3$. ¿Cuál es el mayor valor de p para el cual el par de estrategias IMPLACABLE descritas en la Sección 8.3.2 constituye un equilibrio de Nash? ¿Cuál es el mayor valor de p para el que lo mismo es cierto cuando el juego básico del dilema del prisionero tiene los pagos que aparecen en la Figura 8.13(a)?

Filo

9. La Sección 8.3.1 se refiere a jugadores *perfectamente* racionales cuya conducta puede parecer estúpida a un kibitzer. A jugadores *imperfectamente* racionales les puede parecer más fácil cooperar en el dilema del prisionero finitamente repetido. Consideremos, por ejemplo, jugadores que son «satisfechables» en el sentido propuesto por Herbert Simon. Estos jugadores quedan satisfechos con una estrategia que proporciona un pago casi óptimo[33]. Para los satisfechables, la idea de equilibrio de Nash debería ser sustituida por la de ε-equilibrio. Este es un par (σ, τ) de estrategias para las cuales la condición (4.3) de equilibrio de Nash ha sido sustituida por la condición de que

$$\left.\begin{aligned} \pi_1(\sigma, \tau) &\geqslant \pi_1(s, \tau) - \varepsilon \\ \pi_1(\sigma, \tau) &\geqslant \pi_1(\sigma, t) - \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

para todo s en S y todo t en T. Aquí ε es un número positivo pequeño que representa el grado de proximidad al óptimo que los jugadores necesitan para estar satisfechos.

[33] Por ejemplo, pueden estar preocupados por los costes que supone calcular exactamente el óptimo. Si es así, entonces deberían modelizarse adecuadamente los costes de calcularlo, y cómo los jugadores se enfrentan con su estimación. Sin embargo, como ocurre con frecuencia, hacer las cosas adecuadamente no es muy fácil.

	Paloma	Halcón
Paloma	2, 2	−1, 3
Halcón	3, −1	0, 0

(a)

	Box	Ball
Box	2, 1	−1, −1
Ball	−1, −1	1, 2

(b)

Figura 8.13. Los juegos de los Ejercicios 8.6.8 y 8.6.29.

Consideremos el dilema del prisionero de la Figura 8.4(a) repetido n veces en el que los pagos se toman igual al promedio de los pagos en los juegos-etapa. Si n es lo bastante grande, demostrar que existen equilibrios de Nash para este juego repetido en los que los jugadores cooperan en cada etapa. (Considerar un par de estrategias IMPLACABLE, como en la Sección 8.3.2.) ¿Cuán grande ha de ser n, en función de ε? ¿Cuán grande ha de ser n, cuando el juego-etapa es la versión del dilema del prisionero dada en la Figura 8.13(a)?

Econ

10. La Figura 7.16(a) muestra la región de pagos cooperativos Z cuando las empresas pueden hacer acuerdos colusivos vinculantes en el problema del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1. Indicar el conjunto de negociación que se obtiene en el Ejercicio 7.9.35(a) sobre una copia de este diagrama. Sobre el mismo diagrama, señalar el conjunto de todos los pares (a, b) de beneficios por cada período que se pueden sostener como resultados de equilibrio de la manera descrita en la Sección 8.3.3, suponiendo que el factor de descuento δ es lo bastante grande.

Mates

11. En el Ejercicio 4.8.30 y en el Ejercicio 8.6.7, aprendimos que un monopolista en el juego de la cadena de supermercados finitamente repetido no puede crearse una reputación de duro enfrentándose a los primeros que quieren invadir su mercado. Este ejercicio se ocupa del caso infinitamente repetido. Supongamos que el monopolista evalúa su flujo de rentas usando un factor de descuento δ que satisface $0 < \delta < 1$.

    Consideremos una estrategia s para el monopolista que requiere que se enfrente a un competidor que quiere entrar en el mercado (el entrante) si y sólo si nunca ha consentido una entrada en el pasado. Consideremos una estrategia t_i para el i-ésimo entrante potencial que requiera entrar en el mercado si y sólo si el monopolista ha consentido una entrada en el pasado. ¿Es este perfil estratégico un equilibrio de Nash, si δ es lo bastante grande? ¿Es subjuego-perfecto?

12. La Figura 8.5 representa gráficamente autómatas finitos adecuados para jugar el dilema del prisionero repetido. Dibujar las 26 máquinas de este tipo que tienen por lo menos dos estados.

Filo

13. El Ejercicio 8.6.9 considera una de las maneras en que la racionalidad imperfecta puede conducir a la cooperación en el dilema del prisionero finitamente repetido. En este ejercicio, los jugadores son perfectamente racionales, pero están obligados a expresar sus estrategias como programas de ordenador elegidos de un conjunto restringido. Los programas estan modelizados como máquinas de Moore del tipo considerado en la Sección 8.4.1, con la condición de que sólo máquinas con a lo sumo 100 estados pueden ser elegidas[34]. ¿Por qué una máquina así no puede contar hasta 101? ¿Por qué se sigue que el par (IMPLACABLE, IMPLACABLE) es un equilibrio de Nash en el juego de selección de autómatas, cuando el dilema del prisionero se repite 101 veces?[35].

Mates

14. Dado un conjunto de inputs T y un conjunto de outputs S, una máquina de Moore es, formalmente, una cuádruple (Q, q_0, λ, μ) en la que Q es un conjunto de estados, q_0 es el estado inicial, $\lambda : Q \to S$ es la función de output, y $\mu : Q \times T \to Q$ es la función de transición.

    ¿Cuál de las máquinas de la Figura 8.5 queda determinada por las siguientes condiciones?

    - $S = T = \{D, H\}$
    - $q_0 = D$
    - $\lambda(D) = D$; $\lambda(H) = H$
    - $\mu(D, D) = D$; $\mu(D, H) = H$; $\mu(H, D) = D$; $\mu(H, H) = H$

15. Cuando se discute la cooperación en el dilema del prisionero infinitamente repetido, la atención se concentra con frecuencia en estrategias que son «buenas», en el sentido de que nunca son las primeras en jugar *halcón*. Así, por ejemplo, IMPLACABLE y TIT-FOR-TAT (Figuras 8.5(c) y 8.5(d)) son ambas «buenas».
    a) Explicar por qué el autómata finito TAT-FOR-TIT de la Figura 8.14 es «malo».
    b) Dibujar diagramas como los de la Figura 8.6 que muestren qué ocurre cuando TAT-FOR-TIT juega contra sí mismo, y qué ocurre cuando juega contra TIT-FOR-TAT en el dilema del prisionero repetido basado en la Figura 8.13(a).

[34] Un kibitzer que no supiera que los jugadores han sido obligados a delegar el juego repetido a simples programas podría pensar que los jugadores son limitadamente racionales. Le parecería que los jugadores son incapaces de resolver problemas computacionales cuya resolución requiere un autómata finito con más de 100 estados.

[35] Neyman ha demostrado que la cooperación continúa siendo posible como un resultado de equilibrio de Nash incluso cuando el número de estados admitidos es muy grande en comparación con el número de veces que se repite el dilema del prisionero.

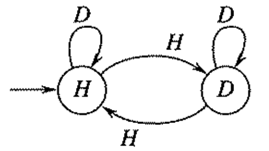


Figura 8.14. La máquina TAT-FOR-TIT.

Mates 16. El Ejercicio 8.6.14 ofrece la definición formal de una máquina de Moore como un cuádruple (Q, q_0, λ, μ). Dar una definición análoga para la máquina TAT-FOR-TIT de la Figura 8.14.

Econ 17. La tasa de interés está fijada al 10 %. Se le ofrece un activo que le dará 1.000 dólares cada año desde ahora hasta la eternidad. Para hallar su valor actualizado, hay que calcular la suma de los pagos anuales descontados en el flujo de rentas que le asegura el activo. ¿Qué factor de descuento usará usted? Suponiendo que no existen incertidumbres, ¿a qué precio se venderá el activo?

Econ 18. Usted consigue un préstamo de 1.000 dólares y se compromete a pagar 12 mensualidades de 100 dólares.
   a) Le ha costado 200 dólares pedir prestados 1.000 dólares durante un año. ¿Por qué su tasa de interés anual no es igual a 200/1.000 = 20 %?
   b) ¿Cuál es el valor actual de un flujo de rentas 1.000, -100, -100, ..., -100, si la tasa de interés *mensual* es *m*? Calcular la tasa de interés mensual aproximada *m* que usted está pagando hallando el valor de *m* que hace que su valor actual sea cero.
   c) ¿Qué tasa de interés *anual* es equivalente a la tasa mensual μ?

Mates 19. Supongamos que TWEEDLEDUM evalúa su flujo de rentas en la Figura 8.6(a) calculando su suma descontada por el factor de descuento δ, donde $0 < \delta < 1$. Hallar el resultado $U_2(a, b)$ de este cálculo y mostrar que $(1 - \delta)U_2(a, b) \to 1/4(6 + 1 + 1 + 0) = 2$ cuando $\delta \to 1$. ¿Cuál es el resultado correspondiente para TWEEDLEDUM en el caso del flujo de rentas de la Figura 8.6(b)?

20. Hallar una forma estratégica restringida como la de la Figura 8.7 para el juego del dilema del prisionero infinitamente repetido basado en la Figura 8.13(a). Incluir únicamente las estrategias HALCON, PALOMA, IMPLACABLE, TIT-FOR-TAT, así como la estrategia TAT-FOR-TIT de la Figura 8.14. Hallar todos los equilibrios de Nash con estrategias puras para esta forma estratégica

Mates 21. Demostrar que un par de estrategias TAT-FOR-TIT (según quedan definidas por la Figura 8.14) es un equilibrio de Nash para el juego del dilema del prisionero infinitamente repetido basado en la Figura 8.13(a). (Suponer que sólo son posibles las estrategias representables por autómatas finitos, y que los jugadores evalúan flujos de rentas calculando el promedio de pagos a largo plazo.)

22. Consideremos la forma estratégica de la Figura 7.10(a) para un valor x que satisface $0 < x < 10$.
   a) Hacer un esquema de la región de pagos cooperativa X en la hipótesis de que ni la eliminación libre ni la utilidad transferible son posibles. (Sección 5.3.)
   b) Hallar los puntos de minimax y de maximín, suponiendo que sólo se permiten estrategias puras. Señalarlas en el diagrama. (Secciones 6.2.1 y 8.4.4.)
   c) ¿Qué nos dice el teorema folk sobre equilibrios de Nash con estrategias puras en la versión infinitamente repetida del juego? (Suponer que sólo son posibles las estrategias representables como autómatas finitos y que los jugadores evalúan un flujo de rentas calculando el promedio de pagos a largo plazo.)
   d) ¿Qué ocurre si $x > 10$? ¿Qué ocurre si $x < 0$?

23. Consideremos la forma estratégica de la Figura 7.7(a).
   a) Dibujar esquemáticamente la región de pagos cooperativos X en la hipótesis de que la eliminación libre y la utilidad transferible no son posibles. (Sección 5.3.)
   b) ¿Por qué todos los pagos de equilibrios de Nash pertenecen a X?
   c) Hallar los puntos de maximín y de minimax suponiendo que sólo se admiten estrategias puras. Señalarlos en el diagrama. (Secciones 6.2.1 y 8.4.4.)
   d) Del diagrama y del Lema 8.4.2 se sigue que la forma estratégica no tiene equilibrios de Nash con estrategias puras. ¿Por qué es así?
   e) Comprobar la conclusión anterior directamente rodeando con un círculo los pagos de la forma estratégica que corresponden a respuestas óptimas. (Sección 7.1.1.)
   f) ¿Qué nos dice el teorema folk sobre los equilibrios de Nash con estrategias puras en la versión del juego infinitamente repetido? (Suponer que sólo son posibles estrategias representables por autómatas finitos, y que los jugadores evalúan flujos de rentas calculando el promedio de pagos a largo plazo.)
   g) Hallar el único equilibrio de Nash con estrategias *mixtas* para el juego de una sola vez. (Ejercicio 7.9.1.)
   h) Hallar un equilibrio de Nash para el juego repetido dos veces. Hallar un equilibrio de Nash para el juego repetido infinitamente.

24. Supongamos que el juego de suma cero con dos jugadores de la Figura 6.3(a) se repite un número infinito de veces. (Suponer que sólo son posibles estrategias representables por autómatas finitos, y que los jugadores evalúan flujos de rentas calculando el promedio de pagos a largo plazo.) ¿Qué nos dice el teorema folk sobre los equilibrios de Nash con estrategias puras en el juego repetido? Contestar la misma pregunta para la versión infinitamente repetida del juego de suma cero con dos jugadores de la Figura 6.3(b).

25. Hallar los puntos de maximín y de minimax para el juego del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1. ¿Cuál es la región de pagos cooperativos si no son posibles la utilidad transferible ni la eliminación libre? ¿Qué nos dice el teorema folk sobre los equilibrios de Nash con estrategias puras en la versión del juego infinitamente repetido? (Suponer que sólo son posibles estrategias representables por autómatas finitos, y que los jugadores evalúan flujos de rentas calculando el promedio de pagos a largo plazo.)

Mates 26. Obtener una versión del teorema folk referida a equilibrios con estrategias mixtas. Suponer que cada jugador puede observar directamente los mecanismos randomizadores empleados por el oponente en el pasado, y no sólo las acciones que el oponente usó efectivamente. ¿Por qué es importante esta hipótesis?

Filo 27. Supongamos que es conocimiento común que los jugadores de un juego repetido siempre observan conjuntamente el lanzamiento de una moneda antes de jugar cada etapa. Dar un ejemplo de por qué esto puede ser relevante.

28. La versión del gallina dada en la Figura 7.17(a) se repite 100 veces. Los pagos del juego repetido son la suma de los pagos de los juegos-etapa. Consideremos una estrategia s que propone escoger *paloma* hasta la etapa 99 (incluida), y usar *paloma* o *halcón* con la misma probabilidad en la etapa 100, *excepto* si los jugadores no han usado las mismas acciones en cada etapa precedente. Si este fallo de coordinación ha ocurrido en el pasado, s dice que hay que buscar la primera etapa en la que se usaron acciones distintas y entonces jugar siempre cualquier acción que el jugador o la jugadora *no* jugó en aquella etapa.
   a) ¿Por qué (s, s) es un equilibrio de Nash?
   b) Demostrar que (s, s) es un equilibrio subjuego-perfecto.
   c) Dar algunos ejemplos de flujos de rentas distintos de 2, 2, 2, ..., 1 que se pueden sostener como resultados de equilibrio de forma similar.
   d) ¿Qué tiene de particular el gallina que permite que estos resultados «tipo teorema folk» sean posibles en el caso finitamente repetido?

29. Consideremos la versión de la batalla de los sexos dada en la Figura 8.13(b). Hallar los tres equilibrios de Nash y explicar por qué hay un problema de selección de equilibrios en el caso de una sola vez. Supongamos que esta versión de la batalla se repite n veces. Los pagos del juego repetido son la suma de los pagos de las etapas.

   Consideremos una estrategia s que propone elegir siempre con igual probabilidad entre *box* y *ball* hasta la última etapa (excluida), excepto que la elección haya coincidido con la del oponente en alguna etapa. Si se da esto último, s propone continuar jugando alternativamente *box* y *ball* hasta el final del juego. Si se alcanza la última etapa sin que las elecciones de los jugadores hayan coincidido nunca en una etapa previa, entonces s propone usar en la etapa final la estrategia de equilibrio mixto para el juego de una sola vez. Explicar por qué (s, s) es un equilibrio de Nash. ¿Es un equilibrio subjuego-perfecto?

Mates 30. Si ambos jugadores usan la estrategia s en el Ejercicio 8.6.29, sea x_n el pago esperado de uno de los jugadores, donde n es el número de etapas en el juego repetido. Demostrar que para $n \geqslant 2$,

$$40x_n - 20x_{n-1} = 30n - 33 + (-1)^n 13.$$

Resolver esta ecuación en diferencias con la condición inicial $x_1 = 1/5$, y calcular entonces la utilidad esperada de un jugador en el caso $n = 100$.

CAPITULO

9

Adaptarse a las circunstancias

9.1. Orden espontáneo

En este capítulo no pararemos de hablar de *orden espóntaneo* y de *racionalidad limitada*. Combustión espontánea tal vez es un término conocido. Se usa para referirse a montones de paja que se incendian solos, sin que nadie les prenda fuego. Hablamos de orden espontáneo cuando surge orden de la confusión, sin que nadie efectúe ninguna actividad organizadora.

Para un economista, el ejemplo favorito de orden espontáneo es el mercado perfectamente competitivo. Los compradores y vendedores de un mercado no se preocupan de si las mercancías escasas que intercambian son producidas y distribuidas de forma eficiente. Lo único que quieren es ganar dinero. Sin embargo, su interacción en el mercado empuja los precios de las mercancías a los niveles de equilibrio en los que la oferta es igual a la demanda[1]. Y no sólo esto, sino que cuando el intercambio al precio de equilibrio se ha completado, el resultado es Pareto-eficiente. Esto es, nadie puede mejorar su suerte sin perjudicar a otro. Ninguna economía socialista se ha acercado en lo más mínimo a un logro así, a pesar de los ejércitos de planificadores y organizadores que han usado para hacer que las cosas funcionen mejor.

Los biólogos tienen ejemplos incluso mejores. Si hemos de creer en la teoría de la evolución, todos los organismos vivos son ejemplos de orden espontáneo. Los antropólogos pueden poner como ejemplo la organización de sociedades primitivas. Nadie las planificó. Evolucionaron con el hombre. Los sociólogos y especialistas en ciencia política pueden añadir que muchas de las cosas importantes en las sociedades modernas no han sido planificadas. Incluso cuando se hacen intentos de reorganizar la sociedad de una manera más eficiente y humana, las cosas raramente resultan ser como los planificadores se habían propuesto.

9.1.1. Azar y necesidad

El libro *Micromotives and Macrobehavior*, de Schelling, contiene una versión del juego del solitario que demuestra muy efectivamente cómo pueden surgir espontáneamente situaciones ordenadas, aunque nadie las haya planificado así. En su ejemplo, el orden que surge es socialmente indeseable. Sin embargo, en un sentido muy real, la culpa no es de nadie. Nadie tenía la intención de que los grupos de vecinos de su ejemplo acabaran segregados.

El solitario de Schelling se juega en un tablero de ajedrez con fichas blancas y negras, como muestra la Figura 9.1. Cada ficha representa el

[1] Al simular en el laboratorio los mecanismos de mercado, con frecuencia muchos individuos se quejan de un sentimiento de impotencia cuando observan cómo los precios descienden hasta los valores de equilibrio del mercado, a pesar de todos sus intentos por invertir la tendencia.

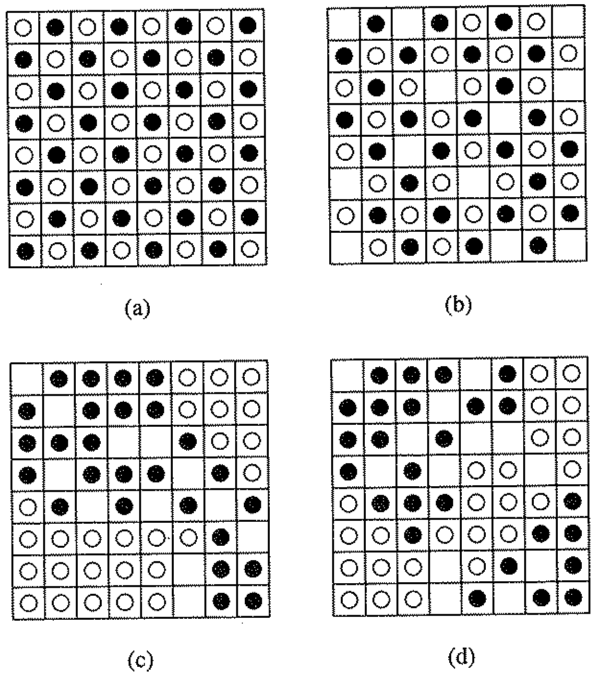


Figura 9.1. El solitario de Schelling.

propietario de una casa. La casilla ocupada por la ficha representa su casa. Las casillas circundantes (hasta ocho) representan su barrio. Una ficha ocupando una de estas casillas es un vecino.

Cada ficha es sensible a los colores de sus vecinos. Las blancas desean que la mitad o más de sus vecinos sean blancas. Las negras desean que por lo menos un tercio de sus vecinos sean negras. Las fichas descontentas se cambian a casillas en las que se encuentran contentas. Esto se hace hasta que todo el mundo está satisfecho, o no quedan casillas en las que fichas descontentas estarían contentas. Ni el orden en que se escogen las fichas descontentas para su traslado, ni la nueva ubicación que se les da, son relevantes para nuestro propósito. Podemos hacer estas elecciones al azar.

Schelling recomienda que el proceso empiece a partir de un esquema de viviendas como el mostrado en la Figura 9.1(b). Este se obtiene cambiando fichas al azar en el esquema de la Figura 9.1(a), en el que las fichas blancas y negras se encuentran distribuidas uniformemente. Solo unas pocas fichas de la Figura 9.1(b) estan descontentas. Cuando éstas se mueven a otros sitios, otras quedan descontentas, y se produce una reacción en cadena que termina habitualmente en un esquema segregado como el de la Figura 9.1(c) o 9.1(d). Esta es una de esas afirmaciones que es mejor no creerse. Sólo cuando uno ha jugado el solitario de Schelling unas cuantas veces se puede entender de verdad que el proceso de segregación es realmente inexorable.

Filo 9.2 ⟶

A los biólogos les gusta subrayar el papel del azar y de la necesidad en un proceso así. Si el proceso converge, es *necesario* que el producto final sea ordenado. Sin embargo, el producto final obtenido depende del *azar*. Por ejemplo, antes del descubrimiento de Australia, tal vez hubiera sido posible predecir que algo ocuparía el nicho ecológico del ornitorrinco. Pero, ¿quién hubiera podido predecir que el ocupante de este nicho sería un mamífero que pone huevos y tiene pico de pato? Las convenciones de la Sección 7.3.2 proporcionan otro ejemplo. Para que una convención sobreviva, es *necesario* que seleccione un equilibrio. Pero puede ser una cuestión de *azar* que una sociedad llegue a adoptar una determinada convención en lugar de otra. Conducir por la derecha en lugar de por la izquierda es un ejemplo muy claro.

Esta interacción entre azar y necesidad será patente en varios de los modelos de este capítulo. Cuando el proceso estudiado converge, siempre converge a un equilibrio del juego subyacente. Pero, cuando el juego tiene varios equilibrios, el equilibrio particular al que converge dependerá de los accidentes históricos a partir de los cuales empezó el proceso.

9.1.2. *Lenguaje teleológico*

Los lenguajes humanos no expresan bien la idea de orden espontáneo. Las imágenes teleológicas[2] son casi imposibles de evitar al discutir el tema. La referencia de Adam Smith a una *mano invisible* que de alguna forma llega a igualar la oferta y la demanda es un ejemplo particularmente bien conocido. Al escribir un libro dedicado específicamente a negar el «argumento teleológico» [de la existencia de Dios], Richard Dawkins encuentra que *The Blind Watchmaker* es un título irresistible[3]. La teoría de juegos va incluso más allá a lo largo de este camino de rosas. No sólo tolera las metáforas teleológicas, sino que las usa de forma positiva para describir aspectos del fenómeno del orden espontáneo que sería muy difícil tratar de ninguna otra forma. Pero uno no debe dejarse arrastrar por las imágenes. Con frecuencia nadie está optimizando nada. A veces, ni siquiera hay jugadores. Sin embargo, las cosas funcionan *como si* unos jugadores plenamente racionales escogieran estrategias de equilibrio. Cómo y por qué es el tema de este capítulo.

9.2. Racionalidad limitada

La gente real no es muy buena cuando se trata de averiguar cosas a partir de primeros principios. Aprenden por tanteo. A veces, aprenden imitando a

[2] Esto es, imágenes que atribuyen un *propósito* a lo que se describe.

[3] Reconocer el fenómeno del orden espontáneo no equivale a negar la existencia de Dios. ¿Quién puede decir que lo que los escépticos atribuyen al azar no es realmente el producto de la Divina Providencia?

gente que parece que va tirando razonablemente bien. A veces, aprenden leyendo libros o asistiendo a clase. Con frecuencia no entienden *por qué* lo que han aprendido funciona en la práctica. De hecho, mucha gente se impacienta cuando se les pregunta cómo funciona un método que están usando. No es una cuestión que les parece relevante desde el punto de vista práctico[4].

Montar en bicicleta es un ejemplo. Nadie puede explicar fácilmente *cómo* mantiene el equilibrio. Sin embargo lo mantienen. Un robot diseñado para montar en bicicleta tendría un programa complicado que controlaría factores tales como la fuerza del viento y el peralte de la carretera, y resolvería entonces un complicado sistema de ecuaciones diferenciales para decidir qué acción tomar. Pero la gente consigue el mismo resultado sin ser consciente de hacer nada de esto. Se comportan como si estuvieran conscientemente reuniendo todos estos datos y calculando una respuesta óptima.

Cuando hablamos de *racionalidad acotada*, nos estamos refiriendo a que no se supone que los jugadores son prodigios matemáticos con acceso a manuales enciclopédicos escritos por especialistas omniscientes en teoría de juegos. La pregunta es, ¿cómo puede ser que la gente se comporte como si fueran los agentes ideales que toman decisiones de la teoría de juegos tradicional?

La respuesta que se ofrece habitualmente es que la gente a veces llega a soluciones óptimas adaptando su conducta por tanteo, si la situación se vive con bastante frecuencia. En el contexto de la teoría de juegos, esto significa que los jugadores no necesitan necesariamente disponer de un libro serio de teoría de juegos para llegar al equilibrio. Si juegan el juego *repetidamente*, pueden ajustar su conducta a lo largo del tiempo, hasta que ya no se puede mejorar más. En este punto, habrán llegado al equilibrio. Su conducta habrá sido como si hubieran consultado el libro de teoría de juegos. Pero nadie ha organizado el resultado. Ha ocurrido por sí mismo. Un kibitzer[5] se felicitaría por haber observado un caso de orden espontáneo.

La referencia a juegos repetidos en el párrafo anterior es importante. Un jugador no se puede adaptar a situaciones en las que sólo se encuentra una vez. Sin embargo, no debemos confundir el método de análisis utilizado en este capítulo con el de los juegos repetidos del capítulo anterior. Ambos capítulos estudian juegos jugados repetidamente, pero los jugadores son *plenamente racionales* en el Capítulo 8. Usan toda la información de que disponen de manera óptima. En este capítulo, los jugadores son limitadamente racionales. Los economistas llaman a estos jugadores *miopes*, o *cortos de vista*, para indicar que sólo ven lo que tienen delante de la nariz, y tal vez ni eso. En las aplicaciones a la biología, con frecuencia no podemos decir que los jugadores piensen en absoluto. Su racionalidad es tan limitada, que

[4] Si algo no está roto, no intentes arreglarlo.

[5] Un kibitzer es alguien que observa un juego, pero no participa en él. Parece que una ley de la naturaleza es que los kibitzers siempre son más expertos que los que realmente están jugando.

incluso una máquina automática de café sacaría mejor nota en un test de coeficiente intelectual. Sin embargo, la teoría de juegos puede aún resultar útil para describir qué ocurre a largo plazo.

Adaptación, ajuste, *tâtonnement*, aprender sobre la marcha, evolución, éstas son algunas de las palabras usadas para describir el proceso que puede conducir a jugadores que no saben muy bien qué está pasando a comportarse de una forma que puede parecer muy racional a un kibitzer. Usaremos la palabra *libración* como un término genérico para cualquiera de estos procesos equilibradores. Sin embargo, es importante entender que hay muy pocas cosas a decir sobre libraciones *en general*. Preguntar cómo funcionan estos procesos es como abrir la caja de Pandora[6]. Los procesos equilibradores que uno puede estudiar son innumerables. Procesos completamente diferentes operan en entornos distintos. A veces operan deprisa; a veces despacio. Diferentes libraciones pueden converger a diferentes equilibrios del mismo juego. Ni siquiera se espera que una libración dada converja. A veces, procesos que parecen perfectamente respetables generan una conducta completamente errática.

No haremos ningún intento por clasificar todas las posibilidades, sino que concentraremos nuestra atención en unos cuantos ejemplos. Los primeros ejemplos se ocuparán de lo que podemos llamar libración *económica*, en los que la gente aprende trabajando. El siguiente ejemplo será un caso de libración *social*, en el que el saber es transmitido a la generación siguiente a través del sistema educativo. Finalmente, lo más importante, la libración *biológica*.

Todo el mundo sabe que la teoría de evolución de Darwin se basa en el principio de la «supervivencia de los mejor adaptados». Por ejemplo, el dodo, cuya ilustración abre este capítulo, se extinguió porque en el siglo XIX no pudo adaptarse a la invasión de su hábitat por marineros que necesitaban carne fresca. La Sección 9.5 intenta explicar esquemáticamente de qué forma la selección natural puede servir para guiar poblaciones animales a un equlibrio de un juego subyacente. Sin embargo, una advertencia es necesaria. Todas las libraciones estudiadas en este capítulo están fuertemente idealizadas. En particular, los éxitos de los biólogos al modelizar procesos evolutivos no pueden ser juzgados por los pobres modelos examinados aquí. Tampoco sería prudente repetir a un zoólogo lo que aquí se dice sobre la historia natural del dodo .

[6] Tal vez hay que recordar que Pandora abrió la caja que contenía todos los regalos que la humanidad había recibido de los dioses, y todos menos uno volaron y se perdieron. Sólo se quedó la esperanza.

9.3. Libración económica

9.3.1. Duopolio de Cournot

Econ 9.3.2 ⟶

En la Sección 7.2.1 discutimos el modelo del duopolio de Cournot. La Figura 9.2(a) muestra las curvas de reacción de los dos jugadores, copiadas de la Figura 7.5. Recordemos que el equilibrio de Nash se da allí donde se cortan las curvas de reacción. En la Sección 7.2.1 hemos visto que el único equilibrio de Nash $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ para el juego del duopolio de Cournot cumple $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 1/3\,(M - c)$.

Supongamos ahora que los duopolistas no son plenamente racionales. De hecho, son tan incapaces de pensar con claridad que cuando juegan el duopolio de Cournot repetidamente con el mismo oponente, siempre se conducen bajo la hipótesis de que el otro individuo producirá en este período exactamente lo mismo que produjo en el período anterior. Sus predicciones siempre serán equivocadas, pero los jugadores son demasiado tozudos o estúpidos para pasarse a un método más sofisticado de prever lo que sus oponentes harán.

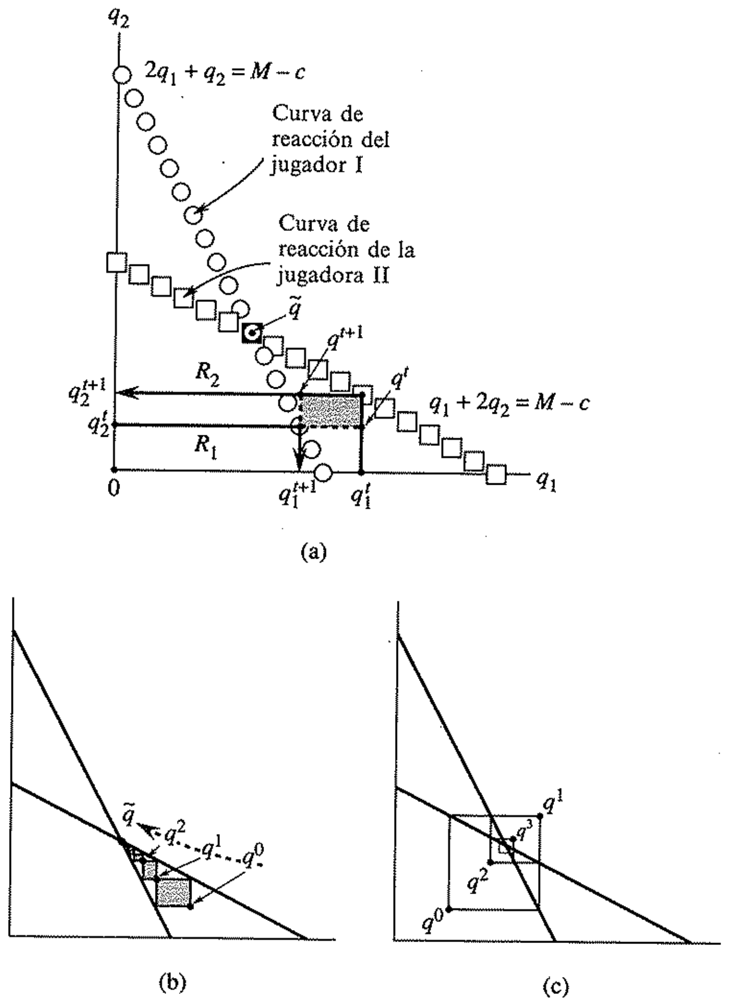


Figura 9.2. Respuestas miopes en un duopolio de Cournot.

Supongamos que, en el período t, el jugador I produce q_1^t y la jugadora II produce q_2^t. Si la jugadora II supone que el jugador I también producirá q_1^t en el período $t + 1$, entonces la respuesta óptima de la jugadora II es $q_2^{t+1} = R_2(q_1^t) = 1/2\,(M - c - q_1^t)$. El álgebra es menos importante que la geometría ilustrada en la Figura 9.2(a). Observemos que, en el rectángulo sombreado, q^{t+1} y q^t ocupan esquinas opuestas.

Las Figuras 9.2(b) y 9.2(c) muestran lo que ocurre cuando pasa el tiempo. Las cantidades producidas convergen hacia los niveles del equilibrio de Nash. Esto es cierto con independencia del valor inicial q^0. (Ver Ejercicio 10.9.36.) Luego los jugadores llegan al equilibrio de Nash aun cuando ninguno de los dos ha analizado las cosas apropiadamente.

Desgraciadamente las cosas no siempre funcionan tan bien. La Figura 9.3(a) deriva de la Figura 9.2(a) intercambiando las curvas de reacción de los jugadores[7]. En la nueva situación es necesario tener en cuenta cuándo la respuesta óptima de un jugador es no producir nada en absoluto. Esta será siempre la respuesta correcta si el oponente produce una cantidad excesiva, pero los segmentos de las curvas de reacción que corresponden a esta posibilidad han sido irrelevantes hasta ahora. Si ahora los dejáramos de lado, sin embargo, nos pasarían inadvertidos dos de los tres equilibrios de Nash $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y $\tilde{r}$ indicados en la Figura 9.3(a).

Las Figuras 9.3(b) y 9.3(c) muestran que lo que ocurre cuando el tiempo pasa depende de dónde empieza el proceso, que es un accidente histórico. Si el punto inicial p^0 pertenece al conjunto P de la Figura 9.3(d), el proceso converge hacia el equilibrio de Nash $\tilde{p}$. Si el punto inicial r^0 se encuentra en el conjunto R, el proceso converge hacia el equilibrio de Nash $\tilde{r}$, como muestra la Figura 9.3(b). Si el punto inicial s^0 pertenece al conjunto S, el proceso *oscila*, como muestra la Figura 9.3(c). Un proceso oscilante nunca converge. Finalmente existe la posibilidad de que el punto inicial q^0 pertenezca al conjunto Q cuyo único punto es $\tilde{q}$. Sólo en este caso el proceso converge hacia el equilibrio de Nash $\tilde{q}$.

Una lección importante se puede extraer de este segundo ejemplo. Se refiere al problema de la selección de equilibrios discutida largamente en el

[7] Esto se consigue fácilmente adaptando el modelo del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1 de manera que la ecuación de demanda sea $p = 1/2\,M - q_1 - q_2$ y el coste de producir q_i sea $1/2\,cq_i - 3/4\,q_i^2$. Una empresa con esta función de costes disfruta rendimientos crecientes a escala. Cuanto más produce, menos cuesta producir cada unidad extra. Sin embargo, no tiene mucho sentido que el coste de una unidad se haga negativo, y restringiremos nuestra atención al caso $q_i < 1/3\,c$.

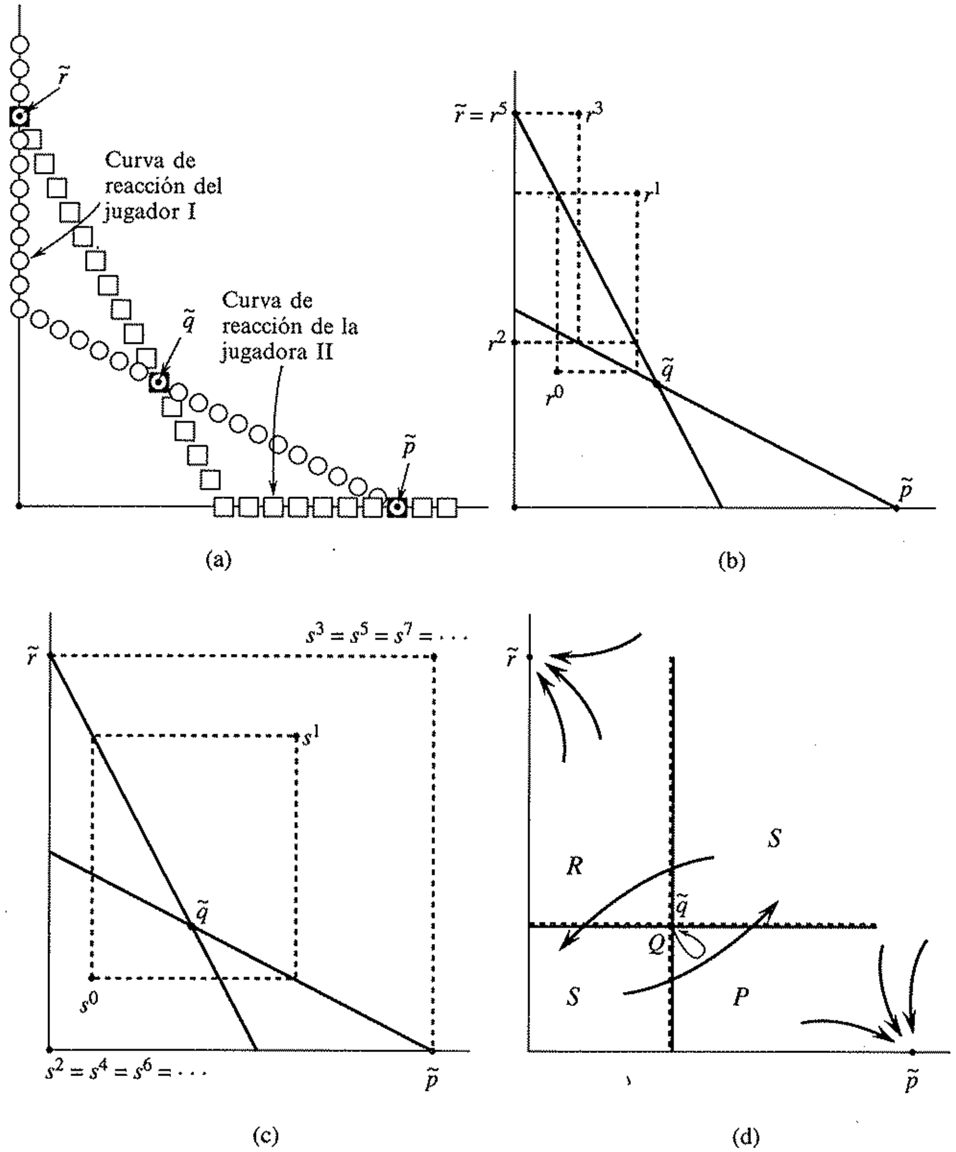


Figura 9.3. Campos de atracción.

Capítulo 7. Cuando se llega al equilibrio como resultado de un ajuste por tanteo, la cuestión de *qué* equilibrio se ha alcanzado tal vez sólo se pueda responder si se sabe algo acerca de la historia de la interacción entre los jugadores. En estas situaciones, los datos de la vida real no pueden ser sustituidos por especulaciones filosóficas, por muy eruditas que sean.

9.3.2. Procesos dinámicos

La discusión anterior se ha ocupado de la convergencia de un proceso dinámico discreto. Aunque todos los procesos dinámicos estudiados en lo que queda de capítulo son continuos, la misma terminología sirve para ambas clases.

El *punto inicial* de un proceso dinámico es el punto en el que empieza en el instante 0. En el modelo del duopolio de Cournot que acabamos de examinar, el punto inicial era q^0. Empezando por el punto inicial señalado, el proceso describe una *trayectoria* (o un *flujo*, o una *órbita*). En la Figura 9.2(b), la trayectoria descrita es la sucesión q^0, q^1, q^2, ...

Una trayectoria puede hacer varias cosas. En particular, puede converger o diverger. En la Figura 9.2(b), la trayectoria ilustrada converge hacia q. Excepto en casos patológicos, una trayectoria convergente convergerá hacia un *punto estacionario* (o un *punto fijo*) del proceso. Los puntos estacionarios se encuentran localizando aquellos puntos iniciales de los cuales el proceso nunca se mueve. Si empieza en un punto estacionario, se queda allí para siempre. Por ejemplo, en la Figura 9.3(d) hay tres puntos estacionarios, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y $\tilde{r}$.

Un punto estacionario con frecuencia se llama un «equilibrio» del proceso dinámico. Esta es una terminología muy razonable, pero puede provocar confusión en el contexto de la teoría de juegos. En el modelo del duopolio de Cournot, por ejemplo, todos los puntos estacionarios del proceso dinámico resultan ser equilibrios de Nash del juego del duopolio de Cournot subyacente. Sin embargo, el hábito de referirnos a los puntos estacionarios como «equilibrios» del sistema dinámico podría hacernos correr el riesgo de inducirnos a pensar que esto no necesita ser probado.

El *campo de atracción* de un punto estacionario r es el conjunto de puntos iniciales a partir de los cuales el proceso dinámico converge hacia r. El campo de atracción de $\tilde{r}$ en la Figura 9.3(d) es el conjunto R. Si el campo de atracción consta de todos los puntos iniciales posibles, entonces decimos que el punto estacionario es un *atractor global*[8]. Por ejemplo, $\tilde{q}$ es un atractor global en la Figura 9.2(b). Los atractores *locales* también son importantes[9]. Los atractores locales que más nos interesarán en este capítulo son los atractores asintóticos. Un *atractor asintótico* es un punto estacionario que pertenece al interior de su campo de atracción[10]. Por ejemplo, $\tilde{p}$ y $\tilde{r}$ son

[8] A veces se usa una definición menos exigente.

[9] Los atractores globales, o locales, se conocen como «equilibrios estables» globalmente, o localmente, del proceso dinámico.

[10] Esto significa que el punto estacionario no es un punto frontera de su campo de atracción, de modo que todas las trayectorias que empiezan lo bastante cerca del punto estacionario terminan en él. Al decidir si algo es un punto frontera, no hay que considerar posibilidades que no pueden ser puntos iniciales. Por ejemplo, puntos con una coordenada negativa no son admisibles en el modelo del duopolio de Cournot. En lenguaje topológico, el punto estacionario tiene que estar en el interior relativo de su campo de atracción.

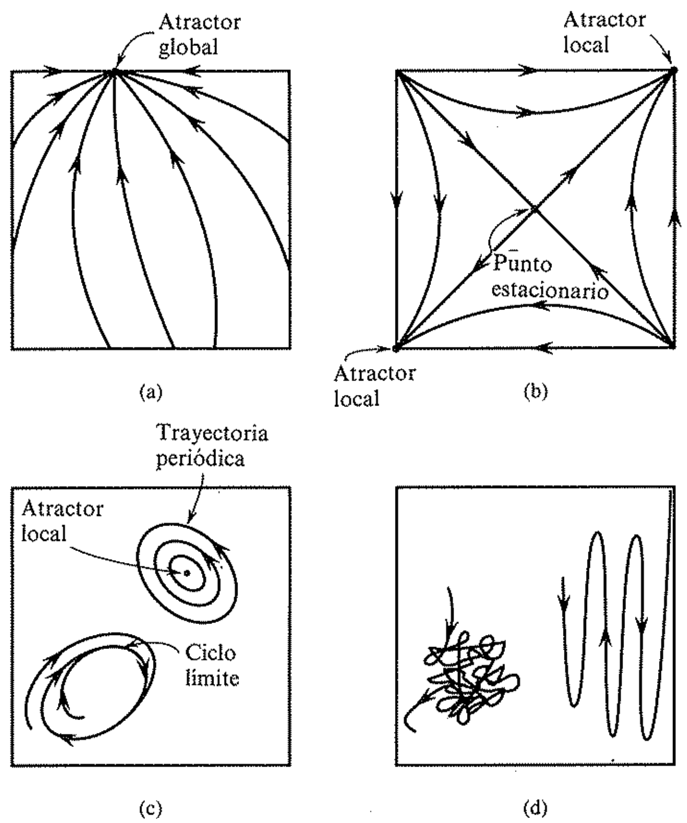


Figura 9.4. Trayectorias continuas.

atractores locales en la Figura 9.3(d). El punto estacionario $\tilde{q}$ de la Figura 9.3(d) no es un atractor de ninguna clase.

La Figura 9.4(a) muestra un atractor global para un proceso dinámico continuo, junto con varias trayectorias. La Figura 9.4(b) muestra dos atractores locales y un punto estacionario que no es atractor. A ningún economista le gustaría encontrarse en la situación de predecir que el resultado a largo plazo de un proceso dinámico será un punto estacionario que no es un atractor. Incluso si el proceso se inicia en un punto así, cualquier pequeña perturbación le puede empujar a una trayectoria que se dirige a un sitio completamente distinto. Su predicción sería no ya equivocada, sería absolutamente errónea.

Los procesos dinámicos que no convergen, se dice que divergen. Sólo consideraremos procesos acotados que no pueden perderse en el infinito. Si divergen, por tanto, deben oscilar de alguna forma. La oscilación que muestra la Figura 9.3(c) es *periódica.* Tras unos movimientos preliminares, la trayectoria $s^0, s^1, s^2, \ldots$ se asienta en un ciclo de período 2. Esto es, $s^{t+2} = s^t$,

cuando t es lo bastante grande. La Figura 9.4(c) muestra algunas trayectorias periódicas de un proceso dinámico continuo. Obsérvese el punto estacionario llamado un atractor local en este diagrama. La condición general para un *atractor local* es simplemente que las trayectorias que empiezan en su proximidad permanecen en ella. Sin embargo, en la Figura 9.4(c) las trayectorias que empiezan cerca del atractor local no convergen hacia él, y por ello el atractor local no es un atractor asintótico.

La Figura 9.4(d) muestra algunas cosas menos agradables que las trayectorias pueden hacer. Hay que aceptar el hecho de que esta conducta no es excepcional. Incluso el comportamiento caótico, en el que una trayectoria pasa arbitrariamente cerca de cada punto de una región con frecuencia arbitraria, no es excepcional. No hay ninguna razón para suponer que las trayectorias de un proceso dinámico se comportarán bien[11]. Es algo que tiene que ser comprobado.

9.3.3. Estrategias mixtas

Mates 9.4 ⟶

Los procesos dinámicos se pueden comportar de forma salvaje, pero la gente no tiene por qué usar procesos dinámicos salvajes. El proceso estudiado en la Sección 9.3.1, por ejemplo, supone que los duopolistas de Cournot son realmente muy miopes. Si empiezan en la región oscilante S de la Figura 9.3(d), son tan miopes que nunca se dan cuenta de que sus predicciones son siempre enormemente equivocadas y no paran de predecir que su oponente se comportará exactamente como en el período anterior. Pero la gente real no es tan estúpida, especialmente cuando manejan cantidades importantes de dinero[12]. Se darán cuenta de que sus predicciones siempre son equivocadas y probarán nuevos métodos de hacer predicciones.

Prever que el oponente siempre hará mañana lo mismo que hizo ayer es muy ingenuo. Consideremos una regla predictiva más sofisticada. Su estudio nos conducirá a una interpretación de las estrategias mixtas que no padece de las difiicultades discutidas en la Sección 7.1.4. Sin embargo, dado que el proceso de ajuste es más sofisticado, el juego al que lo aplicamos tiene que ser más simple que el juego del duopolio de Cournot, si no queremos que el análisis se haga más difícil.

Consideremos el juego que fue estudiado previamente en la Figura 7.7(a) y el Ejercicio 7.9.1. Su tabla de pagos es repetida aquí como Figura 9.5(a). La Figura 9.5(b) muestra curvas de reacción con estrategias mixtas como las

---

[11] Sin embargo, una trayectoria que se corta a sí misma muchas veces, como la que muestra la Figura 9.4(d), no es posible en los procesos dinámicos considerados en este capítulo.

[12] A pesar de lo que diga la psicología conductista. Mi propia experiencia de laboratorio, y la de otros economistas, es que la gente no se comporta estúpidamente, siempre que la tarea es comprensible; los individuos tienen tiempo para aprender y para experimentar con posibles soluciones; y los incentivos para triunfar son adecuadamente grandes.

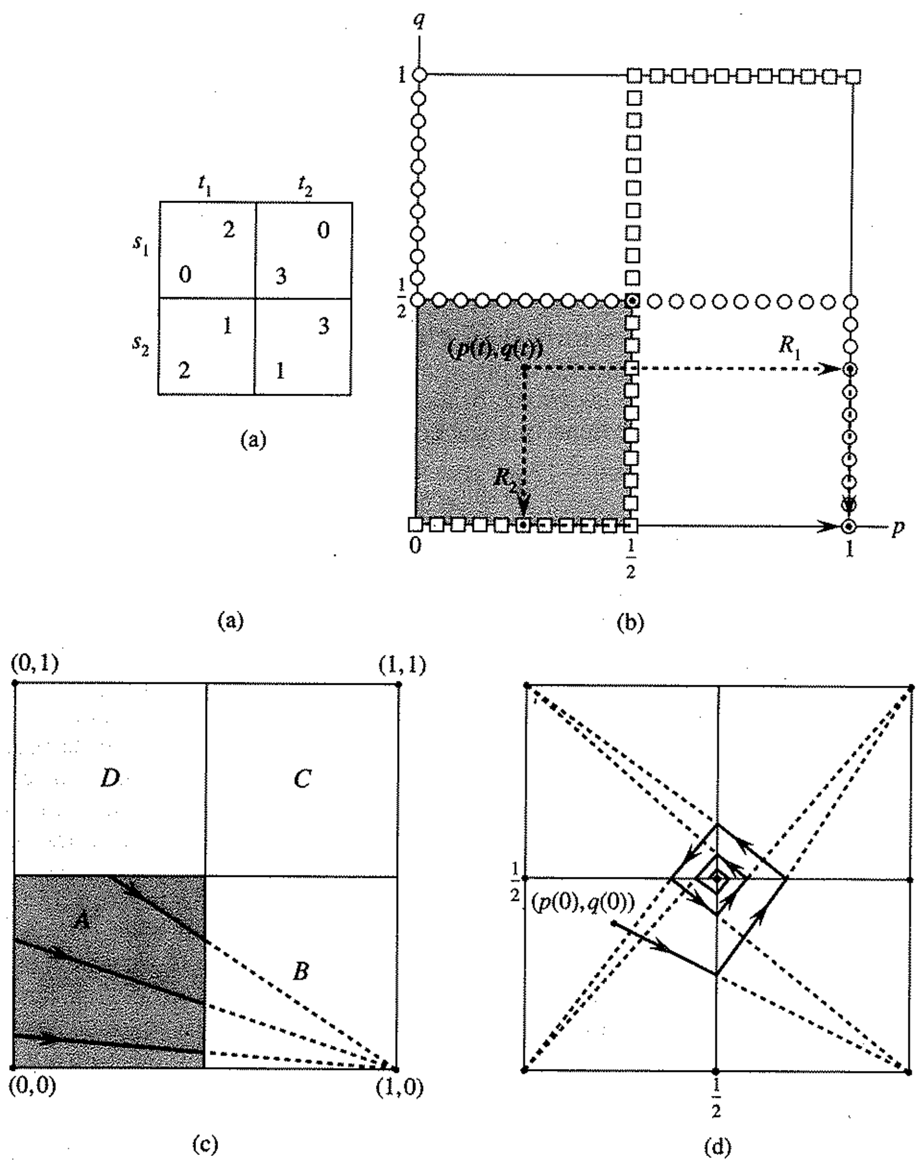


Figura 9.5. Convergencia hacia un equilibrio mixto.

dibujadas para el dilema del prisionero y el gallina en la Figura 7.4. Las curvas de reacción se cortan en (1/2, 1/2). Esto confirma que el juego tiene un único equilibrio de Nash en el que ambos jugadores usan cada una de las estrategias puras con la misma probabilidad.

El juego es jugado repetidamente por jugadores miopes. En cada etapa, cada jugador estima la probabilidad con la que el oponente usará cada una

de sus estrategias. Tras estimar estas probabilidades, los jugadores eligen sus propias estrategias para la siguiente etapa de forma que maximicen el pago esperado estimado. El proceso de cálculo es el mismo que el necesario para hallar una respuesta óptima a una estrategia mixta.

¿Cómo estima el jugador I la probabilidad q con que la jugadora II usará su segunda estrategia pura? Supongamos que ya han pasado n etapas, y que ella ha usado su segunda estrategia pura en m ocasiones. La *frecuencia* con que la ha usado es por tanto m/n. La frecuencia con que ha usado su primera estrategia mixta es $(n - m)/n$. Estas frecuencias serán las estimaciones del jugador I sobre las probabilidades $1 - q$ y q con que la jugadora II usará su primera y segunda estrategias en la etapa $n + 1$. La jugadora II hará sus estimaciones sobre la conducta del jugador I de forma análoga.

Esta manera de predecir lo que hará el oponente no es ingenua, pero tampoco es completamente racional. Por ejemplo, si la jugadora II hubiera estudiado teoría de juegos, podría fácilmente predecir la regla predictiva del jugador I. Entonces podría *predecir* exactamente la siguiente acción del jugador I, en lugar de estimar probabilidades.

El modelo descrito hasta ahora no es complicado, pero su análisis requiere prestar atención a los detalles. En lugar de ello, usaremos aquí el truco típicamente matemático de pasar del tiempo discreto al tiempo *continuo*. Sea $p(t)$ la frecuencia con que el jugador I ha usado su segunda estrategia pura hasta el tiempo t, y sea $q(t)$ la frecuencia con que la jugadora II ha usado su segunda estrategia pura hasta el tiempo t. Mientras $(p(t), q(t))$ permanece en la región sombreada A de la Figura 9.5(c), un estudio de las curvas de reacción muestra que el jugador I querrá usar su segunda estrategia pura y que la jugadora II querrá usar su primera estrategia pura. Si $(p(t), q(t))$ está dentro de la región A, continuará dentro de A hasta el tiempo $t + \tau$, si $\tau > 0$ es lo bastante pequeño. Luego el jugador I usará su primera estrategia pura, y la jugadora II usará su segunda estrategia pura, entre el tiempo t y el tiempo $t + \tau$.

¿Cuántas veces el jugador I habrá jugado su segunda estrategia pura en el instante $t + \tau$? Si λT representa el numero[13] de juegos jugados durante un período de longitud T, él habrá jugado su segunda estrategia pura $\lambda t p(t)$ veces hasta el instante t. Entre t y $t + \tau$, juega λt juegos, usando en todas las ocasiones su segunda estrategia pura. La segunda estrategia pura, por tanto, es usada $\lambda t p(t) + \lambda t$ veces entre 0 y $t + \tau$. Su frecuencia de juego es, por tanto,

$$p(t + \tau) = \frac{\lambda t p(t) + \lambda \tau}{\lambda(t + \tau)} = \frac{t p(t) + \tau}{t + \tau}.$$

[13] Cuando T es un número pequeño, se puede pensar en λT como la probabilidad de que un juego sea jugado durante el período.

Usaremos esta información para hallar una *ecuación diferencial*[14] para la función p. Por definición de derivada,

$$\begin{aligned} p'(t) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{p(t+\tau) - p(t)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left\{\frac{tp(t)+\tau}{t+\tau} - p(t)\right\} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \left\{\frac{tp(t)+\tau - p(t)t - \tau p(t)}{\tau(t+\tau)}\right\} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1-p(t)}{t+\tau} = \frac{1-p(t)}{t}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Ahora es necesario hallar una ecuación diferencial similar para la función q. Ya que el jugador II sólo usa su primera estrategia pura entre t y $t + \tau$,

$$q(t+\tau) = \frac{\lambda t q(t) + \lambda\tau 0}{\lambda(t+\tau)} = \frac{tq(t)}{t+\tau}.$$

Así,

$$\begin{aligned} q'(t) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{q(t+\tau) - q(t)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left\{\frac{tq(t)}{t+\tau} - q(t)\right\} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \left\{\frac{tq(t) - tq(t) - \tau q(t)}{\tau(t+\tau)}\right\} = \frac{-q(t)}{t}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

La resolución de ecuaciones diferenciales puede llegar a ser muy difícil. Afortunadamente, nuestras ecuaciones diferenciales se pueden resolver sin saber nada de su teoría. De (9.1) obtenemos la ecuación diferencial $tp' + p = 1$.

[14] Si c es una constante, la ecuación $f(x) = x + c$ define una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si la ecuación se diferencia, el resultado es la *ecuación diferencial* $f'(x) = 1$. Habitualmente es necesario invertir este proceso. Se da una ecuación diferencial, y el problema es integrarla. Esto puede ser realmente muy difícil, incluso cuando la ecuación diferencial tiene un aspecto muy simple. Pero en este libro no necesitaremos técnicas para resolver ecuaciones diferenciales. Esta nota sólo quiere servir para decir que una ecuación diferencial no tiene una solución única. Por ejemplo, cada valor de la constante c determina una solución distinta $(x) = x + c$ de la ecuación diferencial $f'(x) = 1$. Para determinar unívocamente la solución a una ecuación diferencial, necesitamos algo extra. Los físicos llaman a la información extra una *condición de frontera*. Nuestra condición de frontera siempre será una especificación del *punto inicial* del proceso dinámico que la ecuación diferencial describe. Por ejemplo, una condición de frontera para la ecuación diferencial $f'(x) = 1$ es la condición que $f(0) = 2$. La única solución que satisface esta condición inicial es $f(x) = x + 2$.

Obsérvese que lo que hay a la izquierda de la igualdad es lo que se obtiene al diferenciar el producto tp. Luego la ecuación diferencial se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(tp) = 1.$$

Integrando ambos lados[15], obtenemos

$$\begin{aligned} tp &= t - a \\ 1 - p &= \frac{a}{t}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

donde a es una constante de integración[16].

El mismo método resuelve la Ecuación diferencial (9.2). Reescribamos la ecuación $tq' = -q$ como

$$\frac{d}{dt}(tq) = 0.$$

Integrando ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} tq &= b \\ q &= \frac{b}{t}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

donde b es la constante de integración.

Dividiendo las Ecuaciones (9.3) y (9.4), obtenemos la fórmula

$$\frac{1-p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Los puntos (p, q) que satisfacen esta ecuación están sobre una recta que pasa por el punto $(1, 0)$ en la Figura 9.5(c). Se sigue que, en la *región sombreada A* de la Figura 9.5(c), $(p(t), q(t))$ se mueve a lo largo de una trayectoria recta hacia el *punto objetivo* $(1, 0)$. Se han dibujado unas cuantas trayectorias. Cuando una de estas trayectorias alcanza el borde de la región sombreada, nuestro análisis debe ser mandado al taller para recauchutarlo.

[15] Recordemos que el gran descubrimiento de Newton fue que la integración es lo opuesto de la diferenciación.

[16] Si usted no se cree que $tp = t - a$ es una solución de $tp' + p = 1$ para cualquier constante a, derive ambos lados de la ecuación con respecto a t.

Lo que cambia cuando la trayectoria alcanza el borde de una de las regiones de la Figura 9.5(c) es el objetivo. En la región B el objetivo es (1, 1). En la región C es (0, 1). En la región D es (0, 0). La Figura 9.5(d) muestra la trayectoria completa cuando el punto inicial es $(p(0), q(0))$. La observación importante es que el proceso converge. Converge a (1/2, 1/2) cualquiera que sea el punto inicial. Luego (1/2, 1/2) es un atractor global. Los especialistas en teoría de juegos están interesados en este resultado porque (1/2, 1/2) es también el único equilibrio de Nash del juego que estamos estudiando.

Una lección importante que se deriva de esta discusión está relacionada con la interpretación de los equilibrios mixtos. Como vimos en la Sección 7.1.4, surgen problemas cuando restringimos la atención al caso de «una sola vez» con jugadores plenamente racionales. Pero con una historia de ajuste con miopía, las dificultades desaparecen. A ningún jugador se le ha de pedir que tire monedas o dados para decidir qué hacer. Los jugadores siempre escogen una estrategia pura que maximiza el pago esperado dadas sus creencias. Pero sus creencias cambian cuando observan el juego de su oponente. A largo plazo, sus creencias convergen hacia el equilibrio de Nash del juego. El equilibrio de Nash es, por tanto, un equilibrio *de creencias* más que *de acciones*.

A un kibitzer, por supuesto, tal vez no le resulte obvio que los jugadores no están randomizando. Observarán que los jugadores a veces hacen una cosa y a veces otra. Si observa la frecuencia a largo plazo con que es usada cada estrategia pura, ésta igualará la probabilidad en el equilibrio de Nash para esta estrategia pura. Para el kibitzer, por tanto, será como si los jugadores estuvieran aleatorizando sus elecciones, aunque los jugadores se están comportando de forma enteramente determinista.

9.3.4. El baile de Shapley

Mates 9.4 ⟶

Después de formular la idea de equilibrio, los primeros especialistas en teoría de juegos estaban especialmente preocupados por el problema de cómo había que calcular los equilibrios de juegos complicados. Uno de los métodos que exploraron se llama el del *juego ficticio*. Consiste simplemente en observar qué pasa a largo plazo cuando el juego es jugado por robots programados para usar un proceso de ajuste por tanteo como el considerado en la Sección 9.3.3. Cada robot calcula la frecuencia con que un oponente ha usado una estrategia pura en el pasado y optimiza en la hipótesis de que esta estrategia se usará con esta probabilidad en la siguiente etapa.

En el juego de la Sección 9.3.3, el juego ficticio nos condujo al único equilibrio de Nash. Sin embargo, Shapley encontró un ejemplo que muestra que el proceso no converge necesariamente. Puede ser que ni tan solo entre en un ciclo que se repite a sí mismo una y otra vez.

Esto tiene dos consecuencias que nos incumben. La primera es que no se puede dar nada por supuesto sobre la convergencia de procesos de ajuste

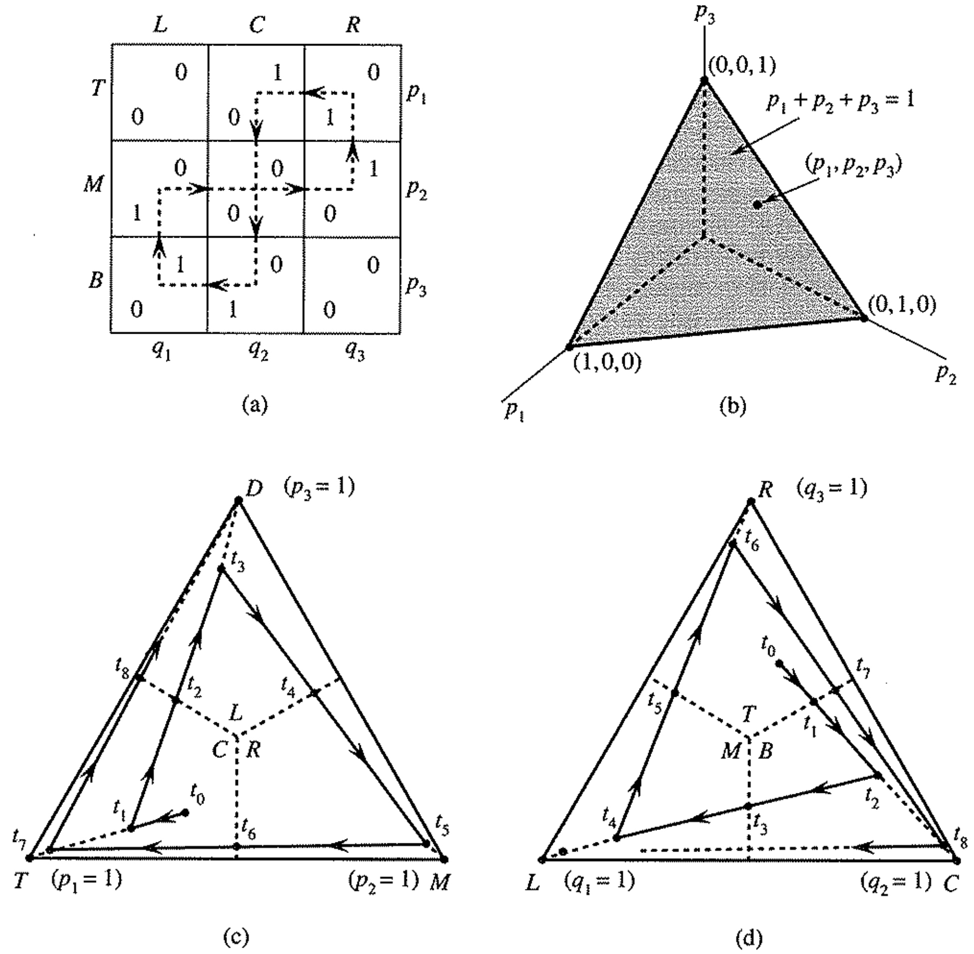


Figura 9.6. El baile de Shapley.

por tanteo. La segunda es que, incluso cuando el proceso no converge, la idea de equilibrio no es irrelevante para la situación.

Por razones que pronto se entenderán, el juego de Shapley estudiado aquí se llamará el baile de Shapley. Su tabla de pagos viene dada en la Figura 7.26(b). La tabla de pagos se repite con algunos adornos en la Figura 9.6(a). Las estrategias puras del jugador I han sido marcadas T, M y B. Las estrategias puras de la jugadora II han sido marcadas L, C y R. El Ejercicio 7.9.40 se ocupó de equilibrios del baile de Shapley. Existe un único equilibrio de Nash en el que ambos jugadores usan cada una de sus estrategias puras con probabilidad 1/3. Cada uno espera entonces un pago de 1/3. Los equilibrios correlacionados fueron introducidos en la Sección 7.6.2. El equilibrio correlacionado para el baile de Shapley examinado en el Ejercicio 7.9.40 se basaba en la distribución de probabilidad que asigna 1/6 a cada casilla fuera de la diagonal principal de la tabla de pagos (y 0 a las casillas de la diagonal). Cuando se usa este equilibrio correlacionado, cada jugador espera un pago de 1/2.

Para analizar el «juego ficticio» en el juego de Shapley, no es necesario resolver ninguna nueva ecuación diferencial, porque las consideraciones son básicamente las mismas que en el ejemplo anterior. Tendremos que dividir nuestro espacio en regiones. Dentro de cada región, las trayectorias serán rectas apuntando a un punto objetivo. Todo esto lo damos por supuesto aquí, de manera que podemos concentrarnos en el problema derivado de que ya no estamos en una situación bidimensional. Tenemos seis variables. Primero, están las frecuencias p_1, p_2 y p_3 con las que el jugador I ha usado T, M y B en el pasado. Segundo, están las frecuencias q_1, q_2 y q_3 con las que la jugadora II ha usado L, C y R en el pasado. Afortunadamente, las cosas se simplifican algo porque debe cumplirse que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y que $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

La Figura 9.6(b) muestra un método geométrico para mantener localizado $p = (p_1, p_2, p_3)$ como un punto en un triángulo equilátero. Este triángulo aparece de nuevo en la Figura 9.6(c). El triángulo de la Figura 9.6(d) localiza $q = (q_1, q_2, q_3)$. Obsérvese que necesitamos mantener localizados *dos* puntos simultáneamente. Cuando el tiempo pasa, p y q se moverán dentro de sus triángulos. De qué modo se mueve p, depende de dónde está q. De qué modo se mueve q, depende de dónde está p.

El triángulo que muestra las frecuencias de la jugadora II está dividido en tres regiones marcadas T, M y B. En la región marcada T, q_3 es la mayor de q_1, q_2 y q_3. Cuando se da este caso, la respuesta óptima del jugador I a la estrategia mixta (q_1, q_2, q_3) es usar la estrategia pura T. Las regiones M y B están marcadas así por razones análogas. Y lo mismo ocurre con las regiones C, T y L en el triángulo que muestra las frecuencias del jugador I. Por ejemplo, p_2 es la mayor de p_1, p_2 y p_3 en la región marcada R. En estas circunstancias, la respuesta óptima de la jugadora II a la estrategia mixta (p_1, p_2 y p_3) es usar la estrategia pura R.

El marcar así las regiones facilita la identificación de los puntos objetivo. Por ejemplo, cuando q está en la región T de la Figura 9.6(d), el punto objetivo para p es el vértice T del triángulo en la Figura 9.6(c). Cuando p está en la región R de la Figura 9.6(c), el punto objetivo para q es el vértice R del triángulo de la Figura 9.6(d).

Las trayectorias dibujadas en las Figuras 9.6(c) y 9.6(d) indican cómo se desarrolla el sistema. El estado del sistema en distintos instantes se muestra señalando pares de puntos t_0, t_1, t_2, ... Ninguna trayectoria converge hacia (1/3, 1/3, 1/3). Por tanto, un kibitzer *no* pensará que los jugadores están usando el único equilibrio de Nash del juego a largo plazo. El equilibrio de Nash no es un atractor de ninguna clase. Exceptuando el caso en que el punto inicial se encuentra en el equilibrio de Nash, las trayectorias no convergen. De hecho, las Figuras 9.6(c) o 9.6(d) podrían sustituir perfectamente a la Figura 7.21(b), usada para ilustrar la idea de un proceso *divergente*.

¿Cómo verá la situación un kibitzer? Hasta el instante t_1, observa que se utilizan el par de estrategias (T, C). En el instante t_1, los jugadores se pasan a (D, C), donde permanecen hasta el instante t_2, en que se pasan a (D, L). Si sigue observando el juego durante largo tiempo, verá a los jugadores bailando[17] a través de las casillas de la tabla de pagos, como en la Figura 9.6(a).

Obsérvese que las casillas de la diagonal principal no son visitadas para nada. La conducta a largo plazo generada por el proceso comparte esta propiedad con el *equilibrio correlacionado* discutido en el Ejercicio 7.9.40. A un kibitzer, por tanto, le parecerá *como si* los jugadores estuvieran usando un equivalente improvisado de la idea de equilibrio correlacionado[18].

9.4. Libración social

Mates 9.5 ⟶

Como hemos visto, la gente, sin llegar a comportarse de forma inteligente, puede aprender a jugar equilibrios por tanteo. Pero pueden aprender más deprisa si son enseñados por alguien que ya es un experto, o si imitan el juego de alguien que está ganando.

Usaremos un modelo simple para ilustrar este punto. El juego que estudiaremos será el de la Figura 9.5(a). Como veremos, muchas de las matemáticas usadas al discutir este juego en la Sección 9.3.3 han de reaparecer aquí. En consecuencia, lo que hay que decir se puede decir muy brevemente.

En este modelo, no se trata de que dos jugadores jueguen uno contra el otro repetidamente. Por el contrario, cada vez que se repite el juego, los jugadores se eligen de entre toda la población. Un chico es escogido al azar para ser el jugador I, y una chica es escogida al azar para ser la jugadora II. Antes de formar parte de la población jugadora, todo el mundo asiste a una escuela de juego donde se les enseña la estrategia «correcta», que nunca en su vida posterior cuestionarán. Por tanto, los jugadores son miopes en el sentido de que no explotan sus conocimientos hasta el final.

La educación que los jugadores reciben es competente, en la medida en que la estrategia llamada «correcta» siempre es correcta en *el momento en que es enseñada*. Es decir, si una fracción $p(t)$ de chicos de la población actual aprendió a usar su segunda estrategia pura, las chicas que se gradúan en el instante t aprenderán a optimizar contra la estrategia mixta $(1 - p(t), p(t))$. Análogamente, si una fracción $q(t)$ de las chicas de la población actual

[17] Como en los versos inmortales: «I wish I could shimmy like my sister Kate, / Lord how she shimmies, like a jelly on a plate».

[18] *Cognoscenti* reconocerán la medida de la improvisación, especialmente si se han encontrado el baile de Shapley estudiando «hiperciclos». El texto deja de lado la cuestión del tiempo que el proceso pasa en cada casilla mientras va bailando por la tabla de pagos. De hecho, el tiempo que pasa en cada casilla antes de pasar a la siguiente crece exponencialmente. En consecuencia, los pagos medios de los jugadores oscilan entre 1/3 y 2/3. Recordemos, sin embargo, que los jugadores sólo consiguen 1/3 en el equilibrio de Nash mixto. En el equilibrio correlacionado del Ejercicio 7.9.40 consiguen 1/2.

aprendió a usar su segunda estrategia pura, los chicos que se gradúan en el instante t aprenderán a optimizar contra la estrategia mixta $(1 - q(t), q(t))$.

Supondremos que siempre hay exactamente N chicos y N chicas, y que N es muy grande. En cualquier período de longitud T, la probabilidad de que un chico o una chica abandone la población jugadora es λT. Estos abandonos quedan exactamente compensados por nuevas incorporaciones provenientes de la escuela.

Si $(p(t), q(t))$ pertenece a la región sombreada de la Figura 9.5(c), todos los chicos que dejan la escuela entre los instantes t y $t + \tau$ habrán sido entrenados para usar su segunda estrategia pura, siempre que τ sea lo bastante pequeño. El número de estos chicos será $N\lambda\tau$, porque este es el número de chicos que se retiran en este período. La población de chicos en el instante $t + \tau$, por tanto consistirá de $N - N\lambda\tau$ veteranos y $N\lambda\tau$ reclutas. ¿Cuántos, de todos ellos, usan su segunda estrategia pura? Todos los reclutas y una fracción $p(t)$ de veteranos juegan con ella. Luego el número total es $N(1 - \lambda\tau)p(t) + N\lambda\tau$. Pero si N es lo bastante grande, este número es aproximadamente el mismo que $Np(t + \tau)$. Se sigue que

$$p'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{p(t + \tau) - p(t)}{\tau}$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{(1 - \lambda\tau)p(t) + \lambda\tau - p(t)}{\tau} = -\lambda p(t) + \lambda.$$

Análogamente,

$$q'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \lambda\tau)q(t) - q(t)}{\tau} = -\lambda q(t).$$

La ecuación diferencial lineal[19] $p' + \lambda p = \lambda$ tiene por solución $1 - p(t) = ae^{-\lambda t}$, donde a es una constante de integración. Análogamente, la ecuación diferencial lineal $q' + \lambda q = 0$ tiene por solución $q = be^{-\lambda t}$, donde b es una constante de integración. Se sigue que, como en la Sección 9.3.3,

$$\frac{1 - p(t)}{q(t)} = \frac{a}{b},$$

cuando $(p(t), q(t))$ pertenece a la región sombreada de la Figura 9.5(c).

No es necesario continuar la discusión. Las trayectorias para este modelo de cambio social son precisamente las mismas[20] que las que aparecen en la Figura 9.5(d). En particular, convergen hacia el equilibrio de Nash mixto.

[19] La palabra «lineal» se usa aquí ortodoxamente para referirse al papel de p' y p en la ecuación. Para resolver la ecuación, multiplíquense todos los términos por $e^{\lambda t}$. Obsérvese ahora que

$$p'(t)e^{\lambda t} + \lambda p(t)e^{\lambda t} = (p(t)e^{\lambda t})'.$$

Integrar ahora ambos lados de $(p(t)e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ con respecto a t. Esto da $p(t)e^{\lambda t} = e^{-\lambda t}a$. De aquí $p(t) = 1 - ae^{-\lambda t}$.

9.5. Libración biológica

El libro de Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, destaca muchas aplicaciones interesantes de la teoría de juegos a la biología. En esta sección sólo podemos ofrecer una descripción superficial de estas ideas. Además, parte del interés se perderá porque solo consideraremos problemas de reproducción asexuada.

9.5.1. Replicadores

A primera vista, puede parecer raro que la teoría de juegos se pueda aplicar con éxito a la biología evolutiva. Por ejemplo, ¿cómo podría un insecto ser un jugador? Los insectos no pueden razonar. Su conducta es instintiva. Sólo hacen aquello para lo que están programados.

Sin embargo, algunas de las aplicaciones más prometedoras de la teoría de juegos han sido biológicas. Paradójicamente, cuanto *menos* desarrolladas están las habilidades intelectivas de un organismo, tanto *mejor* tiende a funcionar la teoría. A veces incluso se puede usar cuando los protagonistas son árboles o flores. ¿Por qué puede pasar esto?

El secreto está en que *no* se supone que los jugadores son los organismos a estudiar. Si la conducta investigada es instintiva, entonces está codificada en los genes del organismo. Podemos pensar en los genes como una parte del *hardware* de un ordenador natural: la parte donde se almacenan los programas del ordenador. Algunos de los programas controlan la conducta del organismo. Los programas que nos interesan aquí son aquellos que eligen estrategias para el organismo en un juego determinado. Al aplicar la teoría de juegos, estos *programas* deben ser considerados los jugadores.

Una propiedad importante de los programas informáticos es que pueden ser copiados de un ordenador a otro. Los «virus informáticos» se copian a sí mismos de un ordenador a otro. Son programas *auto-replicantes*[21]. Los programas impresos en los genes de un animal también son auto-replicantes. Pero su proceso de auto-copia es inmensamente complicado comparado con la de un virus informático. La naturaleza no sólo ha de copiar programas

[20] La única diferencia es que las trayectorias se recorren más deprisa, porque $e^{-\lambda t}$ decrece mucho más rápidamente que t^{-1}. Sin embargo, debemos recordar que las unidades de tiempo social son meses o años, mientras que las unidades de tiempo económico pueden ser sólo segundos.

[21] Un virus es una clase de moléculas auto-replicantes. Los virus informáticos habitualmente hacen otras cosas además de auto-replicarse. Los más famosos se parecen al virus biológico del resfriado común en que desorganizan el interior de su huésped.

de un ordenador natural a otro, sino que tiene que crear un nuevo ordenador natural en el que se puedan copiar los programas. El descubrimiento de Crick y Watson de cómo la Naturaleza consigue hacer algo tan complicado por medio del mecanismo de la «doble hélice» es una de las grandes historias de aventuras de la ciencia. Pero sus emociones tendrán que ser disfrutadas en otra parte. Lo importante aquí es que sabemos que existe algo que hace dos cosas:

- Se copia a sí mismo.
- Elige una conducta estratégica en un juego.

Un ente así se llamará un *replicador*[22].

Los replicadores no sólo aparecen en el contexto biológico. Rutinas, códigos de conducta, modas, estilos de vida, credos e ideas científicas, son todos replicadores en algún sentido[23]. Su modo de reproducción no es biológico. Pasan de una mente humana a otra por medio de la imitación o de la educación (como en la Sección 9.4). Sin embargo, dados nuestros conocimientos actuales, no podemos sino especular sobre los mecanismos detallados de estas replicaciones socio-económicas. Parece prudente, por tanto, quedarnos en lo que sigue dentro del paradigma biológico.

Esta reflexión sobre la importancia de los replicadores sólo es un prólogo a una discusión sobre la noción de *selección natural* de Charles Darwin. Una noción que el filósofo Spencer encerró en la frase «supervivencia de los mejor dotados».

Para sobrevivir, los replicadores necesitan huéspedes* en cuyos genes se imprimen. Si definimos la adaptación de un huésped como una manera de medir la frecuencia con que reproduce sus genes, entonces es casi una tautología que los replicadores que confieren una buena adaptabilidad a sus huéspedes llegarán a controlar un número de huéspedes mayor que los que confieren una mala adaptabilidad. Si el entorno sólo puede mantener un número limitado de huéspedes, el replicador que confiere poca adaptabilidad a sus huéspedes puede llegar a desaparecer completamente. El replicador más apto habrá sobrevivido.

Un kibitzer observando cómo evoluciona la situación puede intentar entender lo que ve atribuyendo un objetivo o propósito a un replicador: el de maximizar la adaptación de sus huéspedes. Si la selección natural opera durante mucho tiempo en un entorno estable, sólo continuarán existiendo aquellos replicadores que son eficientes maximizando la adaptación de sus huéspedes. Al kibitzer, por tanto, le parecerá que los replicadores supervi-

[22] La terminología sigue la introducida por Dawkin en su magnífico libro *The Selfish Gene.* La palabra no pretende designar una entidad física. Un programa informático no puede ser confundido con el *hardware* en el que está almacenado, ni una historia con el libro en el que está escrita. Análogamente, cuando una doble hélice se desarrolla, se obtienen dos moléculas distintas cuyos átomos estan organizados según un mismo modelo-patrón. El replicador no es ninguna de estas moléculas, sino el modelo-patrón común.

[23] En el *Selfish Gene,* Dawkin llama «memes» a estos replicadores socio-económicos.

* *Nota:* En biología por huésped (del inglés host) se entiende hospedador.

vientes pretenden conseguir conscientemente el objetivo que él les ha asignado. Brevemente: parecerá que los replicadores actúan como lo hacen los *jugadores en un juego.*

La teoría de juegos es relevante porque la conducta que proporciona buena adaptabilidad a un huésped suele depender de lo que los demás huéspedes estén haciendo. Deberíamos esperar, por tanto, que la evolución genere alguna forma de *equilibrio* entre los replicadores supervivientes. En este equilibrio, cada replicador maximizará la adaptación de sus huéspedes, dada la conducta inducida en los demás organismos de la población por los replicadores que hospedan.

9.5.2. Adaptación

Evolution and the Theory of Games, de Maynard Smith, usa el juego del halcón y la paloma de la Figura 7.3(a) para ilustrar las ideas de la Sección 9.5.1. Para hacer las cosas más simples, usaremos aquí la forma especial del halcón y la paloma llamada el gallina en la Figura 7.3(c). Esta es reproducida en la Figura 9.7(a). Recordemos de la Sección 7.1.2 que el gallina tiene tres equilibrios de Nash. Tiene dos equilibrios de Nash con estrategias puras, (*halcón, paloma*) y (*paloma, halcón*) y también tiene un equilibrio de Nash mixto en el que cada jugador usa sus estrategias puras con probabilidad 1/2.

	Paloma	*Halcón*
Paloma	1, 1	2, 0
Halcón	0, 2	−1, −1

Gallina

(a)

	Paloma	*Halcón*
Paloma	$U+1$, $U+1$	$U+2$, U
Halcón	U, $U+2$	$U-1$, $U-1$

(b)

(c)

Figura 9.7. La vida del dodo.

Este último es un equilibrio *simétrico* porque ambos jugadores hacen lo mismo.

Aunque las estrategias puras llevan los nombres de *halcón* y *paloma*, el gallina *no* ha de ser interpretado como un juego entre especies de halcones contra palomas. Hay que pensar en él como un conflicto entre diferentes miembros de la *misma* especie. Para subrayar que el ejemplo es sólo una parábola, el animal estudiado será llamado dodo. En la vida real los dodos se han extinguido, de manera que, como hacen los historiadores, somos libres para inventar cualquier hecho sobre ellos a nuestra conveniencia. En particular, nuestros dodos son todos hembras y se reproducen asexualmente[24].

El día de un dodo no dura 24 horas, sino una fracción τ de un año. Durante el día, los dodos buscan comida. Todos los dodos son igualmente eficientes buscándola, pero algunos pueden no tener suerte, porque sólo hay comida para alimentar a N dodos. Los que no encuentran comida mueren. Esto es particularmente trágico, porque un dodo que encontrara comida cada día sería inmortal.

Por la noche, los N dodos que han sobrevivido compiten por los lugares idóneos para anidar de la siguiente manera. Pares de dodos escogidos al azar entre la población juegan al gallina. Recordemos que los jugadores *reales* no son los dodos, sino los replicadores que están hospedando. Por ahora sólo consideraremos dos clases de replicadores: un replicador D que induce a su huésped a jugar *paloma*, y un replicador H que induce a su huésped a jugar *halcón*.

Un dodo que juega *halcón* contra un oponente que juega *paloma* consigue en exclusiva un lugar para anidar. El oponente queda excluido completamente. Si ambos juegan *paloma*, comparten el lugar. Si ambos juegan *halcón*, se enfrentan luchando.

Cada uno de estos resultados afecta la puesta de los dodos de manera distinta. Las crías de dodo salen del huevo y llegan a la madurez durante la noche, y por la mañana son indistinguibles de los demás dodos. Los dodos más viejos han olvidado todo lo que sabían el día anterior, y todos están por consiguiente en igualdad de condiciones. La Figura 9.7(c) ilustra el ciclo diario de un dodo.

La adaptación exacta para las distintas combinaciones estratégicas posibles para el gallina aparecen en la Figura 9.7(b). Estas vienen dadas por el número esperado de crías que un dodo engendrará en un año. Esto significa, por ejemplo, que una madre excluida de un lugar para anidar esperará $U\tau$ crías, en una noche cualquiera. Una madre que comparte el lugar esperará $(U + 1)\tau$ crías. Una madre que posee el lugar en exclusiva esperará $(U + 2)\tau$ crías. Una madre que luche esperará $(U - 1)\tau$ crías.

Obsérvese que todo ha sido enunciado en términos de número *esperado* de crías. No nos interesa el número de crías nacidas de un dodo determinado

[24] La hipótesis de una especie formada sólo por hembras no es tan descabellada como puede parecer a primera vista. Algunos escarabajos pasan del sexo masculino y se reproducen partogenéticamente.

una noche determinada. Sólo nos interesa el número *total* de dodos que mañana estarán hospedando a determinado replicador.

Ya que la reproducción es asexual, los genes de una cría serán una copia de los de su madre[25]. Una cría, por tanto, hospeda al mismo replicador que su madre. Para hallar el número de crías hospedando al replicador D esta noche, tenemos que sumar todos las crías que han nacido de madres que hospedan el replicador D. Si el número de estas madres es lo bastante grande, sumar el número *esperado* de crías y el número *real* dará aproximadamente el mismo resultado.

Esta es la razón por la cual lo importante en las discusiones biológicas es la adaptación *esperada*, de la misma forma que la utilidad *esperada* de Von Neumann y Morgenstern es lo importante en la teoría de juegos convencional. De hecho, es posible manejar la adaptación *exactamente* como un pago de Von Neumann y Morgenstern. En particular, restando U de cada casilla en la tabla de adaptaciones de la Figura 9.7(b) no tiene ninguna consecuencia, como veremos en la Sección 9.5.3. Es posible, por tanto, restringir la atención al juego regular del gallina de la Figura 9.7(a), en el que los pagos son *incrementos* de adaptación[26].

9.5.3. La ecuación del replicador

Ha llegado el momento de seguir la evolución de la población dodo en detalle. Para ello, designemos por $1 - p(t)$ la fracción de dodos hospedando el replicador D que sobrevive las horas de luz de cualquier día. Designemos por $p(t)$ la fracción que hospeda el replicador H. Abreviaremos $p(t)$ por p, pero no debemos olvidar que p depende del tiempo.

¿Cuántas crías espera una madre que hospeda el replicador D antes de jugar el gallina para repartirse los lugares de anidar? La respuesta es

$$\tau f_D(p) = \tau U + \tau(1 - p), \tag{9.5}$$

que es lo que proporcionaría jugar *paloma* en la Figura 9.7(b) si el oponente usara la estrategia mixta $(1 - p, p)^T$. Es cierto que el oponente no usará una estrategia mixta, pero el efecto es el mismo porque el oponente es escogido al azar de entre una población en el que una fracción $1 - p$ juega *paloma* y una fracción p juega *halcón*.

Puesto que sólo sobreviven N dodos a las horas de luz, habrá $N(1 - p)$ madres hospedando el replicador D. Por tanto, nacerán $N(1 - p)\,\tau f_D(p)$ crías llevando el replicador D. Puesto que las madres también estarán

[25] Salvo que ocurra una mutación, pero esta posibilidad está excluida por el momento.

[26] Esto es, adaptación en exceso del nivel básico U. En general, la Naturaleza no se interesa para nada en valores absolutos. Sólo se interesa sobre cómo le va a un replicador *relativamente* a otro.

presentes por la mañana, el número total de dodos hospedando el replicador D en la mañana del día siguiente es

$$N(1 - p)(1 + \tau f_D(p)).$$

La expresión correspondiente para el número de dodos que hospedan el replicador H esa misma mañana es

$$Np(1 + \tau f_H(p)),$$

donde

$$\tau f_H(p) = \tau U + 2\tau(1 - p) - \tau p. \tag{9.6}$$

Puesto que todos los dodos tienen la misma probabilidad de sobrevivir durante el día siguiente, la fracción $p(t + \tau)$ de dodos hospedando el replicador H que llegan a la noche siguiente es necesariamente el mismo que la fracción de dodos que hospedan el replicador H a la mañana siguiente. Así,

$$p(t + \tau) = \frac{Np(t)(1 + \tau f_H(p))}{N(1 + \tau \bar{f}(p))} = p(t)\left(\frac{1 + \tau f_H(p)}{1 + \tau \bar{f}(p)}\right)$$

donde $\tau \bar{f}(p) = (1 - p)\tau f_D(p) + p\tau f_H(p)$, de manera que $N(1 + \tau \bar{f}(p))$ es el número total de dodos a la mañana siguiente.

Ahora nos falta reescribir la expresión para $p(t + \tau)$ como

$$\frac{p(t + \tau) - p(t)}{\tau} = p\left\{\frac{f_H(p) - \bar{f}(p)}{1 + \tau \bar{f}(p)}\right\}.$$

Después de la Sección 9.3.3 no será ninguna sorpresa que ahora tomemos el límite cuando $t \to 0$. El resultado es la *ecuación del replicador*

$$p' = p(f_H(p) - \bar{f}(p)) \tag{9.7}$$

En esta ecuación diferencial, recordemos que $p(t)$ es la fracción de dodos que hospedan el replicador H. La cantidad $f_H(p)$ es la adaptación[27] conferida a un huésped por el replicador H, dada la composición actual de la población. La cantidad $\bar{f}(p) = (1 - p)(f_D(p) + pf_H(p)$ es la aptitud media de la población en conjunto.

La historia que nos ha conducido a la ecuación del replicador es más que inverosímil. Pero es sólo una de las muchas historias que conducen a la misma conclusión. Otras historias no necesitan hipótesis tan imaginarias sobre la historia natural del organismo que estudian, pero son más largas de contar.

[27] Expresada en número esperado de crías por año.

9.5.4. ¿Quién sobrevive?

Sustituyamos (9.5) y (9.6) en la ecuación del replicador (9.7). Obsérvese que la adaptación básica U se anula, confirmando que sólo los incrementos de adaptación de la Figura 9.7(a) son relevantes. El resultado es la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = p(1 - p)(1 - 2p) \tag{9.8}$$

Esta ecuación diferencial gobierna la evolución de la población dodo. Si pudiéramos resolverla, conoceríamos la fracción de dodos halcones en cualquier momento t. Pero la resolución de ecuaciones diferenciales complicadas es un rompecabezas, incluso para expertos. Afortunadamente, podemos obviar esta dificultad porque sólo nos interesa lo que ocurre a largo plazo.

Como sabemos por nuestro estudio de los procesos dinámicos, los puntos estacionarios de los procesos suelen ser significativos. Los puntos estacionarios de (9.8) son $\tilde{p} = 0$, $\tilde{p} = 1$ y $\tilde{p} = 1/2$. Si el proceso empieza en uno de estos puntos, nunca se desplazará a ninguna otra parte, porque la ecuación del replicador nos dice que la tasa a la que empieza a moverse es $p'(0) = \tilde{p}(1 - \tilde{p})(1 - 2\tilde{p}) = 0$.

Nuestro estudio del baile de Shapley nos advierte que no podemos dar por supuesta la convergencia de un proceso dinámico cuando no empieza en un punto estacionario. Sin embargo, aquí las cosas son sencillas. Si $p > 1/2$, entonces

$$p'(t) = p(1 - p)(1 - 2p) < 0,$$

o sea que la función p es *estrictamente decreciente*. Si $p < 1/2$, entonces $p'(t) > 0$ y la función p es *estrictamente creciente*. Esto nos dice la forma que tendrá el gráfico de p. Las posibilidades se muestran en la Figura 9.8(a). Sólo $p = 1/2$ es un atractor local.

Ninguno de los puntos estacionarios $\tilde{p} = 0$ y $\tilde{p} = 1$ es estable. El primero corresponde a una población en la que sólo hay replicadores H. Si nunca aparece un replicador D, la población continúa siendo como es. Pero si se diera una *mutación* que generara una fracción, aunque fuera pequeña, de dodos hospedando el replicador D, entonces la fracción crecería con el tiempo hasta que se igualarían el número de dodos hospedando replicadores H y replicadores D. Lo mismo ocurre con el punto estacionario $\tilde{p} = 1$. Una población en la que sólo está presente el replicador D es vulnerable frente a la invasión de una pequeña fracción mutantes H. Esta pequeña fracción crecería hasta que los números de replicadores H y D se igualaran.

La única población invulnerable a una invasión así, es aquella en la que la mitad de la población hospeda el replicador H y la otra mitad hospeda el replicador D. Esto corresponde al punto estacionario $\tilde{p} = 1/2$ de la ecuación del replicador.

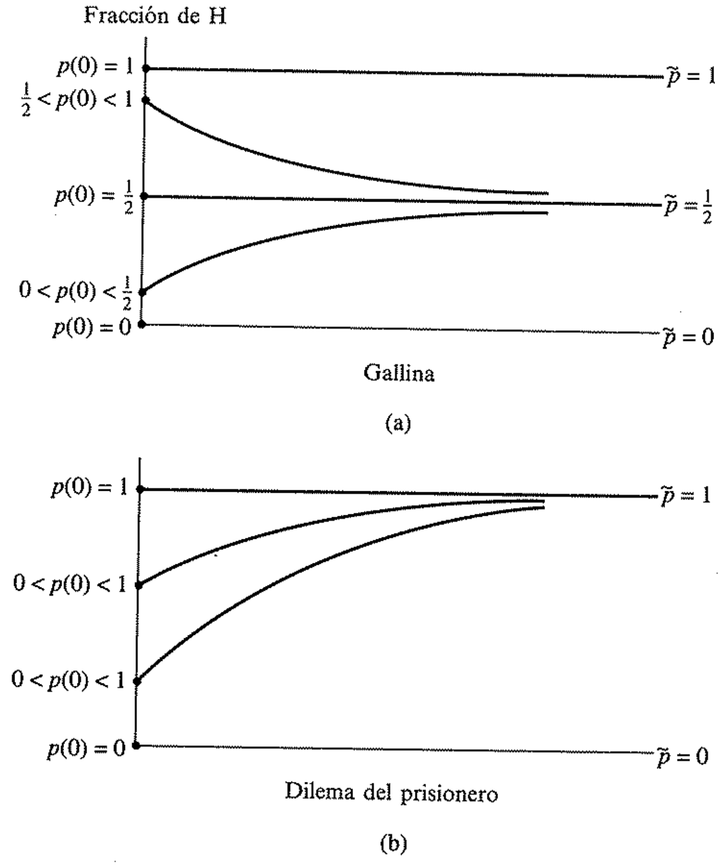


Figura 9.8. La evolución de los dodos.

Recordemos que el gallina tiene tres equilibrios de Nash. El atractor local $\tilde{p} = 1/2$ corresponde al equilibrio de Nash *mixto* en el que ambos jugadores usan cada estrategia pura con probabilidad 1/2. Sin embargo, no hay dodos que tiren monedas. Hemos obtenido una nueva interpretación de un equilibrio con estrategias mixtas en el que ningún jugador aleatoriza en realidad. La aleatorización la hace la Naturaleza cuando empareja los dodos para que jueguen al gallina. A un kibitzer le puede parecer *como si* un dodo escogiera *halcón* y *paloma* con probabilidad 1/2. Pero esto es así sólo porque el kibitzer no sabe nada del replicador que el dodo está hospedando. De hecho, la conducta del dodo es completamente determinista.

Los biólogos se refieren a las poblaciones en las que coexisten conductas distintas como polimorfas[28]. Sin embargo, es evidente que la polimorfía no sólo es importante en biología. En particular, cuando los equilibrios de Nash mixtos son importantes, con frecuencia ello es así porque los jugadores

[28] Que significa «muchas formas».

han sido aleatoriamente elegidos de entre una población polimorfa (incluso cuando el contexto es económico o sociológico).

De los tres equilibrios de Nash para el gallina, sólo el equlibrio mixto corresponde a un atractor local. ¿Qué pasa con (*halcón, paloma*) y (*paloma, halcón*)? Dicho brevemente, no son simétricos. No puede surgir un resultado asimétrico de la historia contada sobre la evolución de los dodos porque el jugador I y la jugadora II son elegidos al azar de entre la *misma* población. Luego la probabilidad de que una estrategia pura cualquiera sea usada debe ser la *misma* para cada jugadora.

Sólo nos falta decir algo sobre la Figura 9.8(b). El Ejercicio 9.8.10 pide que se obtenga la ecuación del replicador en el caso en que el gallina es sustituido por el dilema del prisionero de la Figura 7.3(b). Ya que el único equilibrio de Nash del dilema del prisionero es (*halcón, halcón*), no es sorprendente que el único atractor local sea $\tilde{p} = 1$, que corresponde al caso en que todos los dodos hospedan el replicador H. Es cierto que $\tilde{p} = 0$ también es un punto estacionario, pero una población que sólo hospeda el replicador D puede ser invadida por un replicador H mutante que se apodera de una pequeña fracción de la población dodo. La fracción de la población que hospeda el replicador H se expandirá con el tiempo hasta que el replicador D desaparece por completo.

9.6. Estabilidad evolutiva

Los atractores locales para la dinámica del replicador en el gallina y en el dilema del prisionero corresponden a equlibrios de Nash simétricos. Esto no es por casualidad. Es otro ejemplo en el que un proceso de ajuste por tanteo conduce al uso de estrategias óptimas, aunque nadie se propuso optimizar conscientemente. Las mutaciones son la fuente de nuevas estrategias a ensayar[29], y la selección natural es el mecanismo que corrige los errores.

Es tentador intentar corto-circuitar el estudio, pesado, de las matemáticas de la replicación, para obtener directamente la conclusión de que la evolución necesariamente ha de conducir a optimizar la conducta a largo plazo. La idea de estabilidad evolutiva es un intento de dar forma concreta a estas intuiciones.

[29] Aquí los biólogos tienen ventaja sobre los economistas. Su disciplina les proporciona información fiable sobre las mutaciones que tiene sentido incluir en el modelo. Por ejemplo, tal vez la frase «muerto como un dodo» no sería ahora de uso corriente si un grupo mutante de dodos malolientes como una mofeta hubiera aparecido en el momento oportuno. Sin embargo, y a pesar de las películas de ciencia ficción, los biólogos conocen cómo funcionan los genes suficientemente bien como para poder desechar esta eventualidad como absurdamente improbable. Sin embargo, sabemos muy poco acerca de cómo los humanos generamos nuevas ideas «mutantes» para ganar dinero. Los economistas sólo pueden, por tanto, adivinar qué estrategias deben incluir al decidir qué juego han de estudiar.

9.6.1. Invasiones mutantes

Imaginemos que sólo se da un replicador en una población de dodos. Lo designaremos por N para indicar que es el replicador «normal». Entonces aparece un replicador *mutante* M. Al principio, la fracción de la población que hospeda a M es un número pequeño $\epsilon > 0$. ¿Será repelida esta invasión mutante, o el replicador mutante se establecerá permanentemente? La condición para que se dé *estabilidad evolutiva* es que el replicador mutante se extinga necesariamente, siempre que ϵ sea suficientemente pequeño.

La Figura 9.9 es una tabla de adaptación. Por ejemplo, (N, M) es la adaptación de un dodo que hospeda un replicador N cuando se enfrenta a un dodo que hospeda el replicador M. Cualquier dodo tiene probabilidad $1 - \epsilon$ de verse enfrentado contra un dodo con el replicador N y probabilidad ϵ de verse enfrentado contra un dodo con el replicador M. La adaptación general de un dodo que tiene el replicador N es, por tanto,

$$(1 - \epsilon)f(N, N) + \epsilon f(N, M).$$

La adaptación general de un dodo con el replicador M es

$$(1 - \epsilon)f(M, N) + \epsilon f(M, M).$$

La condición para que la invasión mutante sea repelida es que los dodos mutantes sean menos aptos que los dodos normales. La estabilidad evolutiva requiere por lo tanto que

$$(1 - \epsilon)f(N, N) + \epsilon f(N, M) > (1 - \epsilon)f(M, N) + \epsilon f(M, M), \tag{9.9}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

La adaptación evolutiva en nuestra historia de los dodos depende de cómo se juega un juego. En la Sección 9.5.2, el juego era el gallina. Aquí será

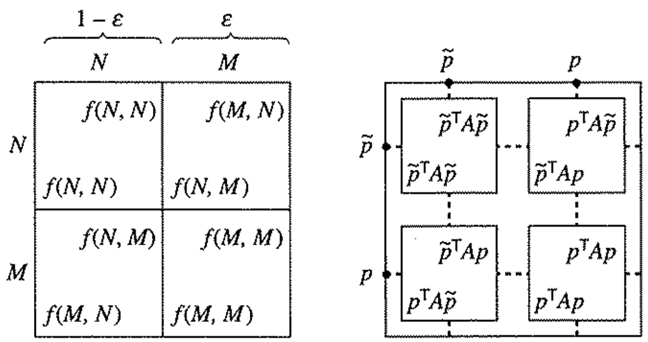


Figura 9.9. Estabilidad evolutiva.

cualquier juego bimatricial simétrico. Las casillas en la matriz de pagos $n \times n$ A han de ser interpretadas como los incrementos de adaptación del jugador I. El juego es simétrico porque estamos modelizando una situación que se presenta de la misma forma a ambos jugadores. En términos algebraicos, la condición de simetría es que la matriz de pagos B de la jugadora II venga dada por $B = A^{\mathrm{T}}$. La Figura 9.9(b) muestra cuál será la aptitud si el replicador N induce a sus huéspedes a usar la estrategia mixta $\tilde{p}$, y M induce a sus huéspedes a usar la estrategia mixta p.

9.6.2. Equilibrios de Nash simétricos

Una estrategia mixta en un juego bimatricial $n \times n$ simétrico es un vector columna $n \times 1$. Recordemos de la Sección 6.4.4 que el pago del jugador I al usar la estrategia mixta p cuando la jugadora II usa la estrategia mixta q es $\Pi_1(p, q) = p^{\mathrm{T}}Aq$. El pago[30] de la jugadora II es $\Pi_2(p, q) = p^{\mathrm{T}}Bq = q^{\mathrm{T}}Ap = \Pi_1(q, p)$. La Sección 6.5.6 da la condición para que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ sea un equilibrio de Nash en la forma

$$\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \Pi_1(p, \tilde{q})$$
$$\Pi_2(\tilde{p}, \tilde{q}) \geqslant \Pi_2(\tilde{p}, q).$$

La primera desigualdad dice que $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a $\tilde{q}$, ya que es por lo menos tan buena como cualquier otra respuesta p. La segunda desigualdad dice que $\tilde{q}$ es una respuesta óptima a $\tilde{p}$, ya que es por lo menos tan buena como cualquier otra respuesta q.

Aquí solamente nos interesaremos por los equilibrios *simétricos* de Nash de este juego simétrico. En un equilibrio simétrico, $\tilde{p} = \tilde{q}$. La segunda de las desigualdades que caracteriza a un equilibrio de Nash se convierte entonces en $\Pi_2(\tilde{p}, \tilde{p}) \geqslant \Pi_2(\tilde{p}, q)$, que es la misma que $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) \geqslant \Pi_1(q, \tilde{p})$. Si p sustituye a q, ésta es exactamente lo mismo que la primera desigualdad:

$$\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) \geqslant \Pi_1(p, \tilde{p}). \tag{9.10}$$

Dicho brevemente, la condición para que $(\tilde{p}, \tilde{p})$ sea un equilibrio de Nash para nuestro juego simétrico es que la desigualdad (9.10) se cumpla para todas las estrategias mixtas p. Esto asegura que $\tilde{p}$ es una respuesta óptima para *ambos* jugadores.

9.6.3. Estrategias evolutivamente estables

Supongamos que el replicador normal N induce a su huésped a usar la estrategia mixta $\tilde{p}$, y que el replicador mutante M induce a su huésped a

[30] Ya que $p^{\mathrm{T}}Bq$ es un escalar, es igual a su traspuesta. Por las razones dadas en la Sección 4.3.1, $(p^{\mathrm{T}}Bq)^{\mathrm{T}} = q^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}p = q^{\mathrm{T}}Ap$. El último paso usa la simetría del juego. Ya que $B = A^{\mathrm{T}}$, $b^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

usar la estrategia mixta p[31]. Entonces, (9.9) se traduce por la condición de que, para cualquier $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$(1 - \epsilon)\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) = \epsilon\Pi_1(\tilde{p}, p) > (1 - \epsilon)\Pi_1(p, \tilde{p}) + \epsilon\Pi_1(p, p) \qquad (9.11)$$

Si esta condición se cumple para todas las estrategias mixtas p, entonces diremos que la estrategia $\tilde{p}$ es una *estrategia evolutivamente estable*[32].

Lema 9.6.1. Una condición necesaria y suficiente para que $\tilde{p}$ sea una estrategia evolutivamente estable es que

$$\text{(i)} \quad \Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) \geqslant \Pi_1(p, \tilde{p}) \quad \text{(para todo } p\text{)}$$

$$\text{y} \quad \text{(ii)} \quad \Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) = \Pi_1(p, \tilde{p}) \quad \Rightarrow \quad \Pi_1(\tilde{p}, p) > \Pi_1(p, p) \quad \text{(para todo } p \neq \tilde{p}\text{)}$$

Demostración. Para obtener condiciones necesarias, empezamos con (9.11). El primer paso será considerar el límite cuando $\epsilon \to 0$. Esto da (i) directamente[33]. El *item* (ii) es incluso más fácil de deducir. Basta con poner $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) = \Pi_1(p, \tilde{p})$ en (9.11) y ver qué ocurre.

Para que (i) y (ii) sean condiciones suficientes, de ellas hemos de poder deducir (9.11). Si se cumple (i), entonces o bien $\pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) > \Pi_1(p, \tilde{p})$ o bien $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) = \Pi_1(p, \tilde{p})$. En el segundo caso, (9.11) se deriva inmediatamente de (ii). En el primer caso, obsérvese simplemente que el lado izquierdo de (9.11) se puede aproximar a $\Pi_1(p, \tilde{p})$ tanto como queramos tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Análogamente, el lado derecho se puede aproximar a $\Pi_1(p, \tilde{p})$ tanto como queramos. Así pues, cuando $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) > \Pi_1(p, \tilde{p})$, la desigualdad (9.11) se debe cumplir siempre que $\epsilon > 0$ sea lo bastante pequeño[34]. □

Las condiciones para una estrategia evolutivamente estable $\tilde{p}$ dadas en el Lema 9.6.1 tienen una interpretación muy clara dentro de la teoría de juegos. La condición (i) es idéntica a (9.10) y dice, por tanto, que $(\tilde{p}, \tilde{p})$ es un equilibrio de Nash. Luego $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a sí mismo. Pero $\tilde{p}$ no tiene por qué ser la única respuesta óptima a sí mismo. La condición (ii)

[31] Para un biólogo, M y N serán *genotipos*. Estos se expresan en el *fenotipo* de un animal. El fenotipo de un animal es el conjunto de sus atributos observables. En nuestro caso, lo importante acerca del fenotipo de los dodos es la estrategia mixta que usan en el juego.

[32] Para ser más exactos, la condición es que para cualquier p existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad se cumple para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < \delta$. Obsérvese que distintos replicadores pueden inducir $\tilde{p}$. Así pues, la estabilidad evolutiva de $\tilde{p}$ no asegura estabilidad evolutiva para ningún replicador en particular.

[33] *No* proporciona la conclusión $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) > \Pi_1(p, \tilde{p})$. Por ejemplo, si $\in > 0$, entonces $2\epsilon > \epsilon$, pero en esta desigualdad no podemos tomar el límite cuando $\epsilon \to 0$ y deducir que $0 > 0$. Sólo podemos deducir que $0 \geqslant 0$. Si piensa que esto es incorrecto (basándose en que lo que es cierto es que $0 = 0$), entonces considere atentamente lo que $0 \geqslant 0$ *significa*.

[34] Sea $a = \Pi_1(\tilde{p}, \tilde{p}) - \Pi_1(p, \tilde{p})$ y $b = \Pi_1(p, p) - \Pi_1(\tilde{p}, p)$. Si $b \leqslant 0$, cualquier $\epsilon > 0$ será suficiente. En caso contrario $a > 0$ y $b > 0$, y ϵ debe satisfacer $0 < \epsilon < a/(a + b)$.

	s	*t*
s	0 ; 0	1 ; 0
t	0 ; 1	2 ; 2

(a)

	Piedra	*Tijeras*	*Papel*
Piedra	0 ; 0	1 ; −1	−1 ; 1
Tijeras	−1 ; 1	0 ; 0	1 ; −1
Papel	1 ; −1	−1 ; 1	0 ; 0

(b)

0 ; 0	0 ; 1	0 ; 0	1 ; 0
1 ; 0	0 ; 0	0 ; 1	0 ; 0
0 ; 0	1 ; 0	0 ; 0	0 ; 1
0 ; 1	0 ; 0	1 ; 0	0 ; 0

(c)

Figura 9.10. Estrategias evolutivamente estables.

nos pide que consideremos una *respuesta óptima alternativa* p a $\tilde{p}$. Esta condición subraya que, para que $\tilde{p}$ sea evolutivamente estable, $\tilde{p}$ debe ser una respuesta a p mejor que la propia p.

La Figura 9.10(a) muestra un juego simétrico 2×2 en el que los equilibrios de Nash simétricos con estrategias puras son (s, s) y (t, t). Mientras que t es evolutivamente estable, s no lo es. La razón es que t es una respuesta óptima a s, pero s no es una respuesta a t mejor que la propia t.

9.6.4. La dinámica de los replicadores

Las estrategias evolutivamente estables fueron introducidas en un intento de evitar las dificultades que surgen al modelizar los detalles de los procesos de adaptación biológica. ¿Tienen éxito en este cometido? Podemos usar nuestro modelo de la evolución de los dodos para examinar esta cuestión. Su falta de realismo no es un obstáculo para este propósito porque, si las ideas que nos condujeron al concepto de estabilidad evolutiva son válidas, también son válidas en mundos *hipotéticos e imaginarios* como el habitado por nuestros dodos. El uso de estos modelos formales supersimplificados y no realistas para comprobar la *consistencia interna* de teorías que se reclaman realistas es ciertamente muy importante, aunque ampliamente incomprendido[35].

Antes de discutir de qué forma las estrategias evolutivamente estables se relacionan con los atractores de la dinámica de los replicadores, es necesario

[35] Algunos especialistas en ciencias sociales son susceptibles sobre el estatus «científico» de su disciplina, e insisten en que un modelo es bueno si y sólo si puede predecir conductas reales. Esta actitud se podría caracterizar como «positivismo ingenuo». Los físicos, por supuesto, están más enterados. En particular, entienden lo bastante de matemáticas para apreciar la importancia de los *contraejemplos* lógicos para enfrentarse a una conjetura.

decir algo sobre las estrategias mixtas. Los animales a veces usan realmente estrategias mixtas, pero parece que raramente lo hacen cuando se enfrentan uno a uno. Si usan una estrategia mixta, se trata casi siempre de situaciones en las que el animal se encuentra en «campo abierto». Esto es, cuando está compitiendo simultáneamente con un número elevado de sus colegas. Entonces, ¿por qué tomarnos la molestia de definir una estrategia mixta evolutivamente estable? ¿Por qué no quedarnos con las estrategias puras? Por lo que se refiere a la dinámica de los replicadores, haremos exactamente esto. Solamente consideraremos replicadores que inducen a sus huéspedes a usar estrategias puras. Sin embargo, al estudiar el gallina descubrimos que poblaciones *polimorfas* pueden resultar estables. Estas son poblaciones en las que diferentes animales pueden hospedar diferentes replicadores. Aunque no estudiaremos el caso en que un animal elige al azar, la idea de estrategia mixta evolutivamente estable nos será útil para describir poblaciones polimorfas estables.

No es necesario repetir la derivación de la ecuación del replicador (9.7) de la Sección 9.5.3. Cuando sustituimos el gallina por un juego simétrico en el que la matriz de pagos del jugador I es A, las cosas ciertamente se hacen un poco más complicadas. En lugar de dos replicadores, necesitamos n replicadores, uno por cada estrategia pura. En un instante dado, el *estado* de la población vendrá determinado por un vector $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^{\mathrm{T}}$ que da las fracciones de la población que hospedan a cada replicador. Si el i-ésimo replicador induce a su huésped a jugar la i-ésima estrategia pura, su adaptación $f_i(p)$ se calcula a partir de la matriz A[36]. El razonamiento usado en 9.5.3 proporciona entonces la ecuación del replicador en la forma

$$p_i' = p_i(f_i(p) - \overline{f}(p)). \tag{9.12}$$

Sea A una matriz simétrica 2×2 cuyas filas no son idénticas[37]. La dinámica de los replicadores para una matriz así no es difícil de estudiar. El razonamiento de la Sección 9.5.4 basta para probar la parte (ii) de la fácil proposición que aquí se enuncia (Ejercicio 9.8.12). La parte (i) es igual de fácil (Ejercicio 9.8.16).

Proposición 9.6.1. Cuando $n = 2$,

(i) La matriz de pagos A siempre admite por lo menos una estrategia evolutivamente estable $\tilde{p}$.
(ii) Un estado de la población $\tilde{p}$ es un atractor asintótico de la dinámica de los replicadores si y sólo si $\tilde{p}$ es una estrategia evolutivamente estable.

[36] Las adaptaciones $f_i(p)$ son incrementos de adaptación por unidad de tiempo. El vector columna $f(p)$ viene dado por $f(p) = Ap$. La adaptación media $\overline{f}(p)$ de un miembo de la población viene dada por $\overline{f}(p) = p^{\mathrm{T}}f(p) = p^{\mathrm{T}}Ap$.

[37] Si ambas filas son idénticas, las dos estrategias puras son igualmente buenas haga lo que haga el otro jugador. Por tanto excluimos este caso trivial (Ejercicio 9.8.12(c)).

Cuando $n > 2$, el mundo es más complicado. Ni (i) ni (ii) son entonces ciertas. El juego de piedra-tijeras-papel de la Figura 9.10(b) es un contraejemplo a (i). No tiene una estrategia evolutivamente estable[38]. (Ejercicio 9.8.17.) El juego 4×4 análogo al baile de Shapley dado en la Figura 9.10(c) es un contraejemplo a (i). El estado de la población $\tilde{p} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^{\mathrm{T}}$ es un atractor asintótico de la dinámica de los replicadores, pero $\tilde{p}$ no es una estrategia evolutivamente estable[39]. Sin embargo, en el caso general se continúan cumpliendo algunos resultados útiles. La siguiente proposición resume algunos de ellos.

Proposición 9.6.2. Sea $\tilde{p}$ un vector $n \times 1$ cuyas coordenadas no son negativas y suman uno. Para cualquier juego simétrico $n \times n$ se cumplen las siguientes implicaciones:

(i) $\tilde{p}$ es una estrategia evolutivamente estable;
$\Rightarrow$ (ii) $\tilde{p}$ es un atractor asintótico de la dinámica de los replicadores;
$\Rightarrow$ (iii) $\tilde{p}$ es un equilibrio de Nash;
$\Rightarrow$ (iv) $\tilde{p}$ es un punto estacionario de la dinámica de los replicadores.

Que la Proposición 9.6.1 no se pueda generalizar significa que la idea de una estrategia evolutivamente estable no nos permite ahorrarnos la pesada tarea de estudiar la dinámica de los replicadores en detalle. Sin embargo, continúa siendo un instrumento útil. El hecho de que a veces no existan estrategias evolutivamente estables no debe hacernos cambiar de opinión a este respecto[40]. De hecho, la inexistencia de una estrategia evolutivamente estable puede ser en sí misma una buena indicación de que debemos estudiar cuidadosamente la dinámica de los replicadores.

9.7. La evolución de la cooperación

El libro de Axelrod, *The Evolution of Cooperation*, ha sido tan influyente que se da muchas veces por supuesto que el dilema del prisionero repetido es la manera correcta y apropiada de estudiar esta cuestión. Sin embargo, es complicado estudiar repeticiones de un juego repetido. Además, la cuestión de cómo puede evolucionar la cooperación se complica al quedar enredada con una segunda cuestión que es incluso más importante, esto es, ¿cómo evolucionan las *reglas de aprendizaje*? Esta segunda cuestión es inevitable cuando jugadores limitadamente racionales se enfrentan entre sí en un juego

[38] El único equilibrio de Nash es que cada jugador use la estrategia mixta $\tilde{p} = (1/3, 1/3, 1/3)^{\mathrm{T}}$. Entonces ninguno de los dos jugadores consigue nada. Cualquier cosa es una respuesta óptima a $\tilde{p}$. En particular, *piedra* es una alternativa a $\tilde{p}$ como respuesta óptima a $\tilde{p}$. Pero $\tilde{p}$ no es una respuesta a *piedra* estrictamente mejor que la misma *piedra*.

[39] Probar esto no es muy sencillo. El Ejercicio 9.8.26 proporciona un ejemplo menos elegante pero más fácil de analizar.

[40] Algunos especialistas en teoría de juegos hacen de su existencia para todos los juegos una condición *sine qua non* para cualquier concepto de equilibrio.

repetido. Un replicador que no programe a su huésped para responder al juego de su oponente no tendrá normalmente muchas probabilidades de sobrevivir.

Puesto que sabemos poco acerca de la evolución de las reglas de aprendizaje, parece prudente continuar usando el gallina para ilustrar cómo evoluciona la cooperación. Sin embargo, será necesario examinar una versión enriquecida del gallina que tiene *cuatro* estrategias puras en lugar de dos.

9.7.1. Caldo de gallina

Si dos dodos halcones se enfrentan para jugar la versión original del gallina, acaban enfrentándose y se arriesgan por tanto a quedar lesionados. Sin embargo, en la vida real, los enfrentamientos entre animales de la misma especie se suelen resolver por medio de una lucha *ritual*. Ambos animales empiezan *exhibiendo* sus habilidades y coraje. Con frecuencia, un animal cede entonces al otro lo que se disputan y ninguno termina lesionado.

La Figura 9.11 es una versión enriquecida del gallina que intenta capturar la idea de que en una ronda preliminar los animales tienen la oportunidad de hacerse señales mutuamente. Las estrategias *halcón* y *paloma* son las de antes, exceptuando que debemos imaginar que los dodos que usan *halcón* anuncian su carácter *halcón* antes de jugar el gallina, y los dodos que usan *paloma* anuncian su carácter pacífico.

Además de estas estrategias sinceras, están las estrategias *fanfarrón* y *vengador*. Un dodo que usa la estrategia *fanfarrón* no lucha nunca, pero se exhibe como si estuviera dispuesto a hacerlo. Esta estrategia sólo engaña a los dodos que juegan *paloma*.

Si un dodo fanfarrón se parece a Benito Mussolini, un vengador es como un personaje de Clint Eastwood en un espagueti-western. Un dodo usando la estrategia *vengador* empieza actuando como una paloma, pero adopta una actitud agresiva al primer síntoma de agresividad de su oponente. El valor de $\varepsilon > 0$ en la Figura 9.11 es muy pequeño. Lo incluimos para dar a *halcón* una pequeña ventaja sobre *vengador*, ya que un dodo halcón tendrá la iniciativa en un enfrentamiento. Análogamente, *vengador* tiene una ligera ventaja sobre *paloma*[41].

	D	H	B	R
D	1 1	2 0	2 0	$1+\varepsilon$ $1-\varepsilon$
H	0 2	-1 -1	0 2	$-1-\varepsilon$ $-1+\varepsilon$
B	0 2	2 0	1 1	2 0
R	$1-\varepsilon$ $1+\varepsilon$	$-1+\varepsilon$ $-1-\varepsilon$	0 2	1 1

Figura 9.11. Exhibicionismo en el gallina.

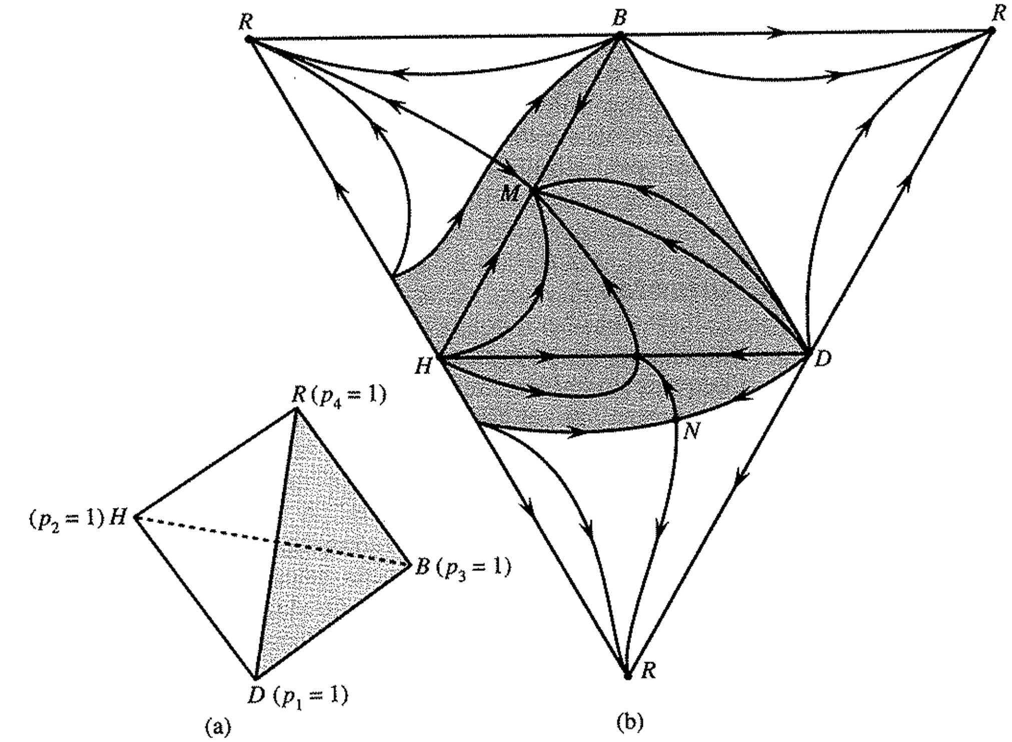


Figura 9.12. La dinámica de los replicadores para el gallina enriquecido.

La Figura 9.6(c) muestra cómo representar un estado de la población $p = (p_1, p_2, p_3)^\top$ como un punto en un triángulo. Aquí hemos de enfrentarnos con un estado de la población cuatridimensional $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)^\top$. Este se puede representar como un punto en un tetraedro, como muestra la Figura 9.12(a). La Figura 9.12(b) muestra las caras desdobladas del tetraedro en las que se indican las trayectorias de la dinámica del replicador[42].

La Figura 9.12(b) muestra tres puntos estacionarios M, N y R. El primero corresponde a una población polimórfica compuesta por mitades de halcones y fanfarrones. El segundo, a una mezcla polimórfica de halcones, palomas y

[41] Sin estos toques realistas adicionales, la dinámica de los replicadores no converge necesariamente.

[42] Este diagrama está inspirado por el matemático Zeeman, que desarrolló el modelo original de Maynard Smith.

vengadores. El tercero, a una población formada de vengadores. Según la Proposición 9.6.2, cada uno de estos puntos estacionarios corresponde a un equilibrio de Nash del gallina enriquecido. El punto estacionario no es un atractor local. Por tanto, la Proposición 9.6.2 nos dice que no corresponde a una estrategia evolutivamente estable. Tanto M como R son atractores asintóticos. Esto no significa necesariamente que corresponden a estrategias evolutivamente estables, pero en este caso sí ocurre así (Ejercicio 9.8.27).

9.7.2. Dodos charlantes

La primera cosa a destacar es que la cooperación no triunfa necesariamente. El equilibrio halcón-fanfarrón M es equivalente al equilibrio halcón-paloma descubierto para el gallina ordinario en la Sección 9.5.4. La única diferencia es que los fanfarrones sustituyen a las palomas.

Esta observación nos permite un comentario sobre la charlatanería (Sección 7.5.3) en el reino animal. A veces las exhibiciones que se pueden observar son realmente elaboradas, pero si la exhibición no da información concreta sobre las características físicas del que se exhibe[43], entonces con frecuencia el oponente no parece quedarse muy impresionado por este equivalente animal de la charla de café. Presumiblemente, los replicadores que se dejaron engañar ya no sobreviven, de la misma forma que el replicador D (paloma) no sobrevive en el equilibrio halcón-fanfarrón.

9.7.3. Dominio fuerte-pero-silencioso

Al estudiar la evolución de la cooperación, el equilibrio que resulta interesante es aquel en el que todos los dodos hospedan el replicador R (vengador). En el atractor R de la Figura 9.12, un kibitzer nunca verá una lucha. Todos los juegos se resolverán con ambos dodos comportándose como palomas y dividiéndose los recursos entre ellos. Pero, ¿cómo puede llegar a dominar el fuerte-pero-silencioso replicador R? Si en el instante cero la población sólo contiene un número positivo de replicadores D, H y B, entonces el estado de la población inicial se encontrará dentro del triángulo DHB de la Figura 9.12, es decir, en el campo de atracción del atractor M. Si un replicador mutante R apareciera y llegara a hacerse con una pequeña parte de la población, esto no sería suficiente para escaparse del campo de atracción. Así el replicador R terminaría extinguiéndose.

Hay varias maneras de que un número suficiente de replicadores R aparezcan en escena para sacar el estado de la población fuera del campo de

[43] Es decir, información que no puede ser simulada por un animal que no tiene esas características. Algunas arañas, por ejemplo, parece que proporcionan información a su oponente sobre su peso tocando (como un instrumento de cuerda) la tela de araña cuya posesión se disputan.

atracción de M. La más simple supone que todas las mutaciones empezaron a darse en una localidad específica. Cuando los huéspedes que llevan el replicador mutante se mueven, este se difundirá por todo el hábitat, si tiene éxito. Pero, para empezar, los mutantes se encontrarán solamente en un área restringida. En esa área, el mutante no será el huésped de una fracción despreciable de la población *local*. Por ejemplo, aunque los miembros de su familia constituyen una fracción despreciable de la población mundial, con toda seguridad no constituyen una fracción despreciable de la gente que usted se encuentra en su casa. El estado de la población *local* puede así encontrarse fuera del campo de atracción de M. Si es así, todos los replicadores excepto R serán expulsados *localmente*. Entonces, el área a la que el análisis anterior se aplica se expandirá. Finalmente, se expandirá hasta incluir todo el hábitat. Entonces todos los replicadores excepto el R estarán eliminados y la evolución habrá creado un mundo cooperativo para los dodos.

9.7.4. La Olimpiada de Axelrod

En su *Evolution of Cooperation*, Robert Axelrod describe dos competiciones informáticas en las que invitó a varias personas a presentar programas informáticos que habían de competir entre sí en el dilema del prisionero repetido. La estrategia TIT-FOR-TAT de la Figura 8.5(d) ganó en ambas ocasiones. El siguiente paso fue simular el efecto de celebrar varias competiciones. Empezó con una población inicial en la que cada una de las 63 estrategias usadas en la segunda competición era igualmente numerosa. Después usó una versión de la dinámica de los replicadores para intentar predecir el perfil de las estrategias que podrían ser presentadas a posteriores competiciones. La idea es que las estrategias que no han tenido éxito en el pasado probablemente no serán populares, como candidatos, en el futuro. A largo plazo, el proceso se estabilizó en un perfil polimórfico en el que TIT-FOR-TAT tenía la mayor parte[44].

Como consecuencia del estudio de Axelrod, algunos autores usan la frase TIT-FOR-TAT como sinónimo de un acuerdo cooperativo autovinculante. Es indudablemente cierto que TIT-FOR-TAT encierra de forma muy elegante

[44] La metodología de Axelrod ha sido criticada. En particular, aunque la segunda competición fue anunciada como un dilema del prisionero de horizonte infinito, su simulación evolutiva usó una versión de horizonte *finito*. Si *todas* las estrategias puras para este dilema del prisionero de horizonte finito se hubieran encontrado en la población inicial, entonces la dinámica de los replicadores hubiera convergido necesariamente hacia un estado de la población en el que todos juegan *halcón*. Sin embargo, reconstrucciones de su simulación usando el dilema del prisionero de horizonte *infinito* que había sido anunciado dan básicamente la misma conclusión que la dada en el texto. Por otra parte, estas simulaciones no muestran que tit-for-tat salga la primera en la mayoría de ocasiones, cuando se usan combinaciones distintas de las 63 estrategias originales. De hecho, TIT-FOR-TAT solamente gana aproximadamente el 26 % de las veces en simulaciones en las que la combinación inicial es escogida al azar.

varias ideas estudiadas en este capítulo y el precedente. Si ambos jugadores usan TIT-FOR-TAT, la cooperación se sostiene porque ninguno de los jugadores ganará nada desviándose del acuerdo. Cualquier desviación así será castigada. Al mismo tiempo, TIT-FOR-TAT es un pariente lo bastante cercano de la estrategia *vengador* estudiada en la Sección 9.7.1 para que quede claro cómo ha de ser una historia plausible en la que fuerzas evolutivas pueden conducir a una población en la que todos jueguen TIT-FOR-TAT.

Sin embargo, no hay nada inevitable acerca de TIT-FOR-TAT, ni siquiera cuando restringimos nuestra atención al dilema del prisionero de horizonte infinito. Lo que la evolución produce será en gran medida un accidente histórico. En particular, no deberíamos dar por descontado que la evolución eliminará necesariamente estrategias «malas» que, al revés de TIT-FOR-TAT, empiezan por jugar *halcón*[45]. Estrategias así no tienen por qué ser estúpidas. Por ejemplo, la estrategia TAT-FOR-TIT de la Figura 8.14 es «mala», pero el par (TAT-FOR-TIT, TAT-FOR-TIT) es un equilibrio de Nash que da un resultado cooperativo a largo plazo (Ejercicios 8.6.15 y 8.6.21).

9.8. Ejercicios

1. La posición inicial para el solitario de Schelling en la Figura 9.1(b) tiene 26 fichas negras y 26 blancas. ¿Es posible encontrar una configuración estable con el mismo número de fichas blancas y negras en la que todas las fichas negras están en casillas negras y todas las fichas blancas en casillas blancas?

Econn

2. Los Ejercicios 7.9.13 y 7.9.14 piden las curvas de reacción y los equilibrios de Nash para dos modelos de Cournot con diferentes producciones. Dibujar las curvas de reacción para ambos casos. Encontrar algunas trayectorias para la libración descrita en la Sección 9.3.1. ¿Cuáles son los campos de atracción para los equilibrios de Nash?

Econ

3. El Ejercicio 7.9.18 pide un análisis de Bertrand de los modelos del ejercicio anterior. En un modelo de Bertrand, cada empresa elige el *precio* al que venderá sus productos (Ejercicio 7.9.17). Dibujar las curvas de reacción de Bertrand para cada modelo. Encontrar algunas trayectorias para una libración que es la misma que la de la Sección 9.3.1, exceptuando que cada empresa elige el *precio* en el período actual en la hipótesis de que la otra empresa elegirá el mismo *precio* que eligió en el período precedente.

Econ

4. Consideremos la libración siguiente. Ambos jugadores casi siempre hacen exactamente lo mismo que hicieron en el período anterior. Sin embargo, en cada período existe una pequeña probabilidad de que una campana suene en la cabeza de alguno de los jugadores. Si suena, el jugador toma nota de la acción del otro jugador en el período precedente y adopta una respuesta óptima a ella.

   Demostrar que esta nueva libración siempre converge en los dos modelos del duopolio de Cournot de la Sección 9.3.1. Describir la naturaleza de los accidentes históricos que determinan hacia dónde converge la libración en el segundo modelo.

Econ

5. Investigar una libración menos ingenua para el segundo modelo de Cournot de la Sección 9.3.1. Los jugadores son ahora un poco más sofisticados y no se limitan a predecir que el oponente hará lo mismo que hizo en el período precedente. En lugar de ello, cada empresa predice que el oponente producirá el promedio de lo que produjo en los dos últimos meses. Cada empresa da entonces una respuesta óptima a su predicción de la producción del oponente. Hallar la trayectoria que resulta cuando el par de productos en el instante 0 es $\tilde{p}$ en la Figura 9.3(a) y el par de productos en el instante 1 es $\tilde{r}$. ¿Converge esta trayectoria?

Econ

6. Repetir el Ejercicio 9.8.5 con jugadores que son más sofisticados todavía. Estos predicen que la producción de la empresa oponente será $2a/3 + b/3$, donde a es la producción del oponente en el último período y b en el penúltimo.
7. Dibujar un diagrama para los campos de atracción y las trayectorias más normales para la libración de «juego ficticio» (Sección 9.3.3) en el caso de cada uno de los siguientes juegos:
   a) Dilema del prisionero (Figura 7.3(b))
   b) Gallina (Figura 7.3(c))
   c) Batalla de los sexos (Figura 7.24(a))
   d) Batalla de los sexos australiana (Figura 7.24(b))

   ¿Cuáles serían las diferencias en los diagramas si se usará la libración de la Sección 9.4?

Mates

8. Demostrar que las consideraciones de la Sección 9.3.3 no varían si el baile de Shapley es sustituido por el juego de piedra-tijeras-papel de la Figura 9.10(b).

Mates

9. En la historia de la Sección 9.4, los jugadores veteranos se retiran de la población jugadora en la misma proporción que son sustituidos por novatos. El tamaño N de la población, por tanto, no varía. Consideremos un modelo distinto en el que los veteranos nunca

[45] *Evolution and the Theory of Games*, de Maynard Smith, cita a Axelrod atribuyéndole la prueba de que tit-for-tat es una estrategia evolutivamente estable para el dilema del prisionero infinitamente repetido, en el supuesto de que éste se juega con un factor de descuento suficientemente grande. Este resultado es falso, porque una invasión mutante por cualquier otra máquina «buena» obviamente no será expulsada. Lo que Axelrod prueba es que tit-for-tat es, en sus palabras, «colectivamente estable». Esto sólo significa que es un equilibrio de Nash contra sí misma (para pagos que son el límite de los promedios), como se ha probado en la Sección 8.4.3. Axelrod observa, que, con una excepción, las proposiciones de su libro *Evolution of Cooperation*, continúan siendo válidas si la estabilidad colectiva es sustituida por la estabilidad evolutiva, a condición de sólo considerar máquinas «buenas». Sin embargo, incluso si pudiéramos excluir de nuestra consideración máquinas «malas», esto no implica que la estabilidad colectiva es un sustituto adecuado para la estabilidad evolutiva.

desaparecen o mueren, pero los novatos continúan incorporándose a la población al mismo ritmo que antes.

a) Si la población en el instante t es $N(t)$, ¿por qué la población en el instante $t + \tau$ será aproximadamente $N(t)(1 + \lambda\tau)$?

b) Obtener ecuaciones diferenciales para la nueva libración.

c) ¿Por qué estas nuevas ecuaciones diferenciales conducen a las mismas trayectorias que las ecuaciones diferenciales de antes?

10. ¿A qué se reduce la ecuación del replicador (9.7) cuando el juego subyacente no es el gallina, sino el dilema del prisionero de la Figura 7.3(b)? Explicar por qué las soluciones de la ecuación tienen gráficos como los de la Figura 9.8.

11. Demostrar que la ecuación del replicador (9.7) no cambia si cada pago x de la matriz del gallina de la Figura 9.7(a) es sustituido por $ax + b$, donde $a > 0$ y b son constantes.

12. La Figura 9.13(a) da un juego general bimatricial simétrico 2×2. En este juego, demostrar que las ecuaciones del replicador (9.7) para las fracciones p_1 y p_2 de la población que usan estrategias s_1 y s_2, respectivamente, son:

$$p'_1 = p_1(1 - p_1)\{p_1(a - c) + (1 - p_1)(b - d)\}$$
$$p'_2 = p_2(1 - p_2)\{p_2(d - b) + (1 - p_2)(c - a)\}$$

a) Explicar por qué $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = (1, 0)$ siempre es un punto estacionario de la dinámica de los replicadores. Demostrar que es un atractor asintótico si y sólo si (i) $a > c$, o (ii) $a = c$ y $b > d$.

b) Explicar por qué $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = (0, 1)$ siempre es un punto estacionario de la dinámica de los replicadores. Demostrar que es un atractor asintótico si y sólo si (i) $d > b$, o (ii) $d = b$ y $c > a$.

c) Explicar por qué cualquier par $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ es un punto estacionario

(a)

	s_1	s_2
s_1	a, a	b, c
s_2	c, b	d, d

(b)

	s_1	s_2	s_3
s_1	0, 0	6, −3	−4, −1
s_2	−3, 6	0, 0	5, 3
s_3	−1, −4	3, 5	0, 0

Figura 9.13. Problemas de estabilidad evolutiva.

de la dinámica de los replicadores si $a = c$ y $d = b$. Explicar por qué ninguno de estos puntos estacionarios es un atractor asintótico (aunque son atractores locales).

d) Supongamos que $(a, d) \neq (c, b)$. Sea $\tilde{p}_1 = (d - b)/(a - c + d - b)$ y $\tilde{p}_2 = 1 - \tilde{p}_1$. Explicar por qué $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ es un punto estacionario de la dinámica de los replicadores si y sólo si o bien $a \geqslant c$ y $d \geqslant b$, o bien $a \leqslant c$ y $d \leqslant b$.

e) Demostrar que un punto estacionario $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ del tipo considerado en el apartado *d*) es un atractor asintótico si y sólo si $a < c$ o $d < b$.

f) Si un punto estacionario $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ es completamente mixto, explicar por qué es un atractor asintótico si y sólo si $a < c$ y $d < b$. (Recordar que una estrategia completamente mixta usa cada una de las estrategias puras con probabilidad estrictamente positiva.)

13. Demostrar que cualquier equilibrio de Nash del juego general bimatricial simétrico 2×2 de la Figura 9.13(a) es un punto estacionario de su dinámica de los replicadores. Dar un contraejemplo de la proposición que afirma que un punto estacionario de la dinámica de los replicadores siempre es un equilibrio de Nash.

14. Demostrar las siguientes afirmaciones para el juego general bimatricial simétrico 2×2 de la Figura 9.13(a):

a) La estrategia pura s_1 es evolutivamente estable si y sólo si (i) $a > c$, o (ii) $a = c$ y $b > d$.

b) La estrategia pura s_2 es evolutivamente estable si y sólo si (i) $d > b$, o (ii) $d = b$ y $c > a$.

c) Una estrategia completamente mixta es evolutivamente estable si y sólo si $a < c$ y $d < b$.

15. Usar los Ejercicios 9.8.12 y 9.8.14 para demostrar que un estado de población es un atractor asintótico para el juego general bimatricial simétrico 2×2 de la Figura 9.13(a) si y sólo si la estrategia correspondiente es evolutivamente estable.

16. Demostrar que sólo cuando $a = c$ y $d = b$, deja de existir una estrategia evolutivamente estable para el juego general bimatricial simétrico 2×2 de la Figura 9.13 (a).

17. Demostrar que el juego de piedra-tijeras-papel de la Figura 9.10(b) no tiene una estrategia evolutivamente estable.

18. ¿Por qué una estrategia fuertemente dominada no puede ser evolutivamente estable? ¿Es posible que una estrategia débilmente dominada sea evolutivamente estable?

19. La estabilidad evolutiva se ha estudiado en este capítulo suponiendo que ambos jugadores (I y II) provenían de la *misma* población. Otra posibilidad es que el jugador I provenga de una población y que la jugadora II provenga de otra población completamente separada de la primera. Las mutaciones se darán en sólo una de

estas poblaciones. Explicar por qué la condición de estabilidad evolutiva de la Sección 9.6.1 es en este caso

$$f(n, n) > f(m, n),$$

en lugar de la fórmula más complicada (9.9). ¿Cuál es la versión correspondiente del Lema 9.6.1? Relacione la respuesta con el concepto de equilibrio de Nash fuerte[46].

20. La Sección 9.6 discute la dinámica de los replicadores para un estado de la población $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ cuando la matriz de pagos $n \times n$ del jugador I en el juego simétrico subyacente G es A. Demostrar que la ecuación del replicador (9.7) se reduce a

$$p_i' = p_i\{(Ap)_i - p^TAp\},$$

donde $(Ap)_i$ designa la i-ésima coordenada del vector columna $n \times 1$ Ap.

21. Explicar por qué $A^T = -A$ en un juego bimatricial simétrico de suma cero. Deducir que $p^TAp = 0$ para todo p. A partir de aquí, demostrar que la ecuación del replicador del ejercicio anterior se reduce a $p_i' = p_i(Ap)_i$ en el caso de suma cero.

Mates

22. Sea $\tilde{p}$ una estrategia completamente mixta y evolutivamente estable para un juego bimatricial simétrico en el que la matriz de pagos $n \times n$ del jugador I es A.
   a) Explicar por qué existe una constante w tal que $(A\tilde{p})_i = w$ para todos los valores de i. Deducir que $\tilde{p}^TA\tilde{p} = p^TA\tilde{p}$ para todo p.
   b) Explicar por qué cualquier p es una respuesta óptima alternativa a $\tilde{p}$.
   c) Deducir que $\tilde{p}^TAp > p^TAp$ para todo $p \neq p$.
   d) Si el juego es de suma cero, $A^T = -A$. Deducir que $\tilde{p}^TA\tilde{p} < p^TAp$ para todo p. Usar este hecho y el ejercicio anterior para demostrar que un juego simétrico de suma cero no puede tener una estrategia completamente mixta y evolutivamente estable.

23. Demostrar que las ecuaciones del replicador para el juego piedra-tijeras-papel de la Figura 9.10 son

$$p_1'/p_1 = p_2 - p_3,$$
$$p_2'/p_3 = p_3 - p_1,$$
$$p_3'/p_3 = p_1 - p_2.$$

Demostrar que el único punto estacionario para estas ecuaciones es $\tilde{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Comprobar que $(\tilde{p}, \tilde{p})$ es un equilibrio simétrico de Nash para el juego.

[46] Cada una de las dos estrategias es una respuesta óptima a la otra en sentido fuerte. Esto es, cada estrategia es *estrictamente* mejor que cualquier otra.

Mates

24. Sumar las tres ecuaciones del ejercicio anterior. A partir de lo obtenido, demostrar que las trayectorias tienen ecuaciones de la forma $p_1p_2p_3 = c$, donde c es una constante cuyo valor depende del punto inicial. (No olvidar que sólo se admiten estados $p = (p_1, p_2, p_3)$ que cumple $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant 0$ y $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.)
   a) Demostrar que $p_1p_2p_3$, condicionado por $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, alcanza un máximo estricto de 1/27 cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Deducir que ninguna trayectoria $p_1p_2p_3 = c$ con $c < 1/27$ se aproxima a $p = (1/3, 1/3, 1/3)$. ¿Por qué implica esto que no hay atractores asintóticos en este modelo?
   b) Si $0 \leqslant c \leqslant 1/27$, designemos por $p_1(c)$ el menor valor de p_1 que satisface $p_1p_2p_3 = c$ y $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Demostrar que $p_1(c)(1 - p_1(c))^2 = 4c$, y deducir que $p_1(c) \to 1/3$ cuando $c \to 1/27$. ¿Por qué implica esto que una trayectoria que se inicia cerca de $\tilde{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$ permanece en la proximidad de $\tilde{p}$? ¿Por qué es $\tilde{p}$ un atractor local pero no un atractor asintótico?
   c) Usar un diagrama triangular como los de la Figura 9.6 para dibujar esquemáticamente las trayectorias de la dinámica de los replicadores en el juego piedra-tijeras-papel.

25. Demostrar que s_1 es una estrategia evolutivamente estable para el juego de la Figura 9.13(b). Si $\tilde{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$, demostrar que $(\tilde{p}, \tilde{p})$ es un equilibrio de Nash para el juego, pero que $\tilde{p}$ no es una estrategia evolutivamente estable.

Mates

26. Ayudarse del Ejercicio 9.8.20 para escribir las ecuaciones del replicador para el juego de la Figura 9.13(b).
   a) ¿Por qué la $\tilde{p}$ del ejercicio anterior es un punto estacionario para estas dinámicas?
   b) Hacer un cambio de variable en las ecuaciones del replicador pasando de p a $q = p - \tilde{p}$. Usar que $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ para eliminar q_3 de las dos primeras ecuaciones. De aquí, reducir el sistema a la forma

$$q_1' = \frac{17}{9}q_1 + \frac{27}{9}q_2 + \varepsilon_1(q_1, q_2),$$

$$q_2' = -\frac{19}{9}q_1 + \frac{23}{9}q_2 + \varepsilon_2(q_1, q_2),$$

donde los errores $\varepsilon_i(q_1, q_2)$ y $\varepsilon_2(q_1, q_2)$ son cuadráticos, y por tanto, pequeños cuando q está próximo a 0[47].

[47] Acabamos de «linealizar» el sistema de ecuaciones diferenciales. Siempre que q permanezca próximo a 0, su trayectoria será aproximadamente la misma que la trayectória obtenida del sistema lineal que se obtiene suprimiendo los errores ε_1 y ε_2.

	s_1	s_2	s_3
s_1	$0,\ 0$	$10,\ 10$	$1,\ 1$
s_2	$10,\ 10$	$0,\ 0$	$1,\ 1$
s_3	$1,\ 1$	$1,\ 1$	$1,\ 1$

(a)

	Paloma	*Mix*	*Halcón*
Paloma	$1,\ 1$	$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$	$0,\ 2$
Mix	$\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$
Halcón	$2,\ 0$	$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$	$-1,\ -1$

(b)

Figura 9.14. Más problemas de estabilidad evolutiva.

c) Comprobar que los valores propios de la matriz de coeficientes en el sistema de ecuaciones diferenciales del apartado *b*) son $1/3(-1 \pm i\sqrt{2})$.

d) Los valores propios obtenidos en el apartado *c*) tienen una parte real negativa. ¿Por qué implica esto que $\tilde{p}$ es un atractor asintótico, aunque no sea una estrategia evolutivamente estable?

27. En el juego del gallina enriquecido de la Figura 9.11,

a) Demostrar que R es una estrategia evolutivamente estable.

b) Demostrar que la estrategia mixta en la que H y B se usan con probabilidad 1/2 es una estrategia evolutivamente estable.

Mates 28. En el juego de la Figura 9.14(a), demostrar que s_3 es estable frente a una invasión de s_1 o de s_2 por separado, pero no frente a una invasión simultánea de ambos.

Mates 29. La estrategia mixta $\tilde{p}$ en la que *paloma* y *halcón* se usan ambos con probabilidad 1/2 es una estrategia evolutivamente estable para el juego del gallina dado en la Figura 9.7(a). El juego de la Figura 9.14(b) se construye a partir del gallina introduciendo una nueva estrategia pura *mix*. Los pagos asignados a la estrategia pura *mix* en el nuevo juego son los mismos que se obtendrían al usar la estrategia mixta $\tilde{p}$ en el gallina.

a) Demostrar que *mix* no es evolutivamente estable en el nuevo juego.

b) Demostrar que la estrategia mixta en la que *paloma y halcón* se usan ambos con probabilidad 1/2 no es evolutivamente estable en el nuevo juego

Mates 30. El juego del gallina de la Figura 7.3(c) va acompañado de una historia sobre coches que se aproximan corriendo en direcciones contrarias en una calle estrecha, sin que ninguno de los dos conductores quiera mostrar debilidad apartándose. Es cierto que el gallina recoge lo esencial de esta situación estratégica, pero la siguiente variante de un juego llamado la guerra de desgaste lo recoge mejor. Es un juego de tiempos, como el duelo o la ruleta rusa.

Como en el juego de la ruleta rusa estudiado en la Sección 4.7, supondremos que los resultados que un jugador puede conseguir son muerte, vergüenza o triunfo. Ambos jugadores asignan 0, a y 1 como pagos a estos resultados, donde $0 < a < 1$. Las decisiones se toman en los instantes $t_0, t_1, t_2, \ldots$, donde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < T$ y $t_k \to T$ cuando $k \to \infty$. En estos instantes, ambos jugadores deciden si continuar o retirarse por miedo. Un jugador que se retira se avergüenza. Un jugador que continúa cuando el otro se retira, triunfa. La colisión conduce a la muerte cierta. Si ambos jugadores continúan hasta el instante t_k sin colisionar, la probabilidad de una colisión entre el instante t_k y el instante t_{k+1} es $\pi(t_k)$. La función $\pi : [0, T] \to [0, 1]$ es continua y estrictamente creciente con (0) = 0 y (*T*) = 1.

a) ¿Por qué se dejan de lado los instantes posteriores a T?

b) Demostrar que es un equilibrio de Nash que el primer jugador se retire siempre y que la jugadora II aguante siempre.

c) Supongamos que ambos jugadores han aguantado hasta el instante k. Si el jugador I cree que la probabilidad de que la jugadora II se retire es ahora $p(t_k)$, ¿por qué será indiferente entre retirarse ahora y retirarse en el instante t_{k+1} si

$$a = p(t_k) + (1 - \pi(t_k))a?$$

d) ¿Por qué es un equilibrio de Nash simétrico que ambos jugadores se retiren en el instante t_k con probabilidad $p(t_k) = a\pi(t_k)$, salvo que alguno se haya retirado previamente?[48].

e) ¿Cuál es la probabilidad de colisión si se usan las estrategias de equilibrio de Nash simétrico? Si no hay colisión, ¿cuál es la probabilidad de que alguien se retire antes del instante t? Tal vez resultará más cómodo dar las respuestas para una versión del modelo con tiempo continuo.

Mates 31. En la Sección 9.7.1 introdujimos una versión enriquecida del gallina. En el Ejercicio 9.8.30 introdujimos una versión dinámica del gallina. ¿Qué correspondería a las estrategias *paloma*, *halcón* y *fanfarrón* de la Sección 9.7.1 en el juego del Ejercicio 9.8.30?

[48] Las estrategias mixtas que los jugadores usan en este equilibrio simétrico no se describen dando directamente las probabilidades asignadas a cada estrategia pura. En lugar de ello, las probabilidades quedan determinadas indirectamente en términos de las probabilidades condicionales con las que se toman las posibles decisiones en los nodos de decisión, en el supuesto que los nodos se alcanzaran. En la Sección 10.4.3 aprenderemos que estas especificaciones definen una *estrategia de comportamiento*.

Los equilibrios simétricos de Nash en la versión del gallina estudiada en el ejercicio anterior requieren que los jugadores usen estrategias mixtas (Ejercicio 9.8.30(d)). Modificar el juego del Ejercicio 9.8.30 de manera que cada jugador observa no sólo lo que hizo el oponente en el período de tiempo que acaba de terminar, sino también la *probabilidad* que el oponente asignaba a aguantar o a retirarse en ese período. Se puede considerar entonces que una estrategia de *vengador* es una que asigna una probabilidad alta p a aguantar en cualquier período[49], suponiendo que el oponente ha estado aguantando con probabilidad p en el pasado. Si el oponente no se comporta así, la estrategia *vengador* requiere pasarse a la estrategia de un halcón en todos los instantes posteriores.

a) En el contexto de una competición entre animales, ¿tiene sentido la hipótesis de que los jugadores pueden observar la probabilidad con la que se usan las acciones?

b) Demostrar que si el intervalo temporal entre etapas sucesivas es suficientemente pequeño y el valor de p es suficientemente grande, entonces dos jugadores que usen la estrategia *vengador* conseguirán prácticamente lo mismo que dos jugadores que usen ambos *paloma.*

c) Usar el modelo propuesto en este ejercicio para evaluar la plausibilidad de los pagos en la matriz del gallina enriquecido de la Figura 9.11.

[49] Obsérvese que esto no implica que la probabilidad de que dos vengadores colisionen desastrosamente sea alta. Incluso si la probabilidad de continuar en el k-ésimo período (si éste se alcanza) fuera 0,99, la probabilidad de que un jugador se retirará en algún instante de los cien primeros períodos es $1 - (0{,}99)^{100}$, que es aproximadamente 0,6.

CAPITULO

10

Saber cuál es tu sitio

10.1. Bob es tu tío

La ilustración que abre este capítulo muestra tres viajeros en un vagón de tren victoriano, Bob, su sobrina Alice y una sirvienta de toda confianza llamada afectuosamente Nanny. Todos tienen la cara sucia. Sin embargo, y a pesar de que cualquier viajero victoriano consciente de aparecer en público con la cara sucia lo estaría, nadie está avergonzado. Podemos deducir, por tanto, que ninguno de los viajeros sabe que su cara está sucia, aunque todos pueden ver claramente las caras sucias de sus compañeros de viaje.

Un guarda del ferrocarril mira por la ventana y anuncia que alguien en el vagón tiene la cara sucia. El empleado es la clase de persona en la que se puede confiar que anunciará una cosa así si y solamente si es cierta. Uno de los viajeros se ruboriza. ¿Por qué? ¿Acaso el guarda no les ha dicho simplemente algo que *ya sabían*?

Para entender lo que pasa es necesario examinar los elementos esenciales del razonamiento que permite deducir que uno de los viajeros debe ruborizarse. Si, ni Bob ni Nanny se ruborizan, Alice razonará así:

> *Alice:* Supongamos que mi cara está limpia. Entonces Bob razonaría así:
>> *Bob:* Veo que la cara de Alice está limpia. Supongamos que mi cara también está limpia. Entonces Nanny razonaría así:
>>> *Nanny:* Veo que las caras de Alice y Bob están limpias. Si mi cara estuviera limpia, ninguna cara estaría sucia, pero sé que esto es falso. Luego mi cara está sucia y debo ruborizarme.
>>
>> *Bob:* Ya que Nanny no se ha ruborizado, mi cara debe estar sucia. Luego debo ruborizarme.
>
> *Alice:* Ya que Bob no se ha ruborizado, mi cara debe estar sucia. Luego debo ruborizarme.

Lo que el guarda añadió a lo que los viajeros ya sabían es información sobre lo que los viajeros sabrían bajo distintas circunstancias hipotéticas. Así, Alice necesita saber lo que Bob sabría si ella tuviera la cara limpia. Además, ella necesita saber lo que Bob sabría sobre lo que Nanny sabría si Alice y Bob tuvieran las caras limpias. Es *esta* información la que el empleado del ferrocarril proporcionó[1]

Dicho brevemente, el anuncio del guarda garantiza que será conocimiento común que hay un viajero con la cara sucia siempre que esto sea realmente cierto. Nos hemos encontrado con la idea de conocimiento común en distintos capítulos. Este capítulo empieza usando la historia de Alice, Bob y Nanny como una percha donde colgar una discusión general sobre cómo la teoría de juegos se enfrenta a los problemas del conocimiento y la informa-

---

[1] Obsérvese que no se afirma que *todos* los viajeros se ruborizarán necesariamente. De hecho la información proporcionada es insuficiente para obtener esta conclusión. (Véase la Sección 10.3.4.)

ción dentro de un juego[2]. Sobre este tema daremos más detalles de los que hemos dado para otros temas en este libro porque aquí la teoría todavía no forma parte de la literatura general. El capítulo termina con una revisión en profundidad del concepto de conocimiento común.

10.2. Conocimiento

Filo 10.4 ⟶

Lo que caracteriza las discusiones filosóficas sobre el conocimiento es una terminología pretenciosa. El tema en sí mismo es llamado *epistemología*. En este contexto, el humilde espacio de muestras Ω de la Sección 2.1.1 se convierte en un conjunto de posibles *estados del mundo*. El propio conjunto Ω a veces es llamado el *universo del discurso*. Como antes, un subconjunto E de Ω se llama simplemente un *suceso*.

Si el tema que se discute es el lanzamiento de un dado, el universo del discurso será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si el resultado de tirar un dado es 6, entonces $\omega = 6$ es el estado del mundo. Cuando el verdadero estado del mundo es ω, se dice que un suceso E ha ocurrido si y sólo si $\omega \in E$. Por ejemplo, el suceso $E = \{2, 4, 6\}$, que salga un número par, ocurre cuando el verdadero estado del mundo es $\omega = 6$.

10.2.1. Operadores de conocimiento

Lo que Alice sabe se puede concretar por medio de un operador de conocimiento $\mathcal{K}$. Para cada suceso E, el conjunto $\mathcal{K}E$ es el conjunto de estados del mundo en los que Alice sabe que E ha ocurrido. Con mayor brevedad, $\mathcal{K}E$ es el suceso que Alice sabe E.

Para la historia de los viajeros con la cara sucia, se requiere un conjunto con ocho estados. Los numeraremos como en la Figura 10.1. El suceso que la cara de Alice está sucia es $D_A = \{2, 5, 6, 8\}$. Si el ruborizarse no fuera parte de la historia, ella sólo sabría que su cara está sucia después del

	1	2	3	4	5	6	7	8
Alice	Limpia	Sucia	Limpia	Limpia	Sucia	Sucia	Limpia	Sucia
Bob	Limpia	Limpia	Sucia	Limpia	Sucia	Limpia	Sucia	Sucia
Nanny	Limpia	Limpia	Limpia	Sucia	Limpia	Sucia	Sucia	Sucia

Figura 10.1. Estados del mundo victorianos.

[2] Esta parte del capítulo está basada en un artículo escrito conjuntamente con Adam Brandenburger.

(K0)	$\mathcal{K}\Omega = \Omega$	(P0)	$\mathcal{P}\emptyset = \emptyset$
(K1)	$\mathcal{K}(E \cap F) = \mathcal{K}E \cap \mathcal{K}F$	(P1)	$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}E \cup \mathcal{P}F$
(K2)	$\mathcal{K}E \subseteq E$	(P2)	$\mathcal{P}E \supseteq E$
(K3)	$\mathcal{K}E \subseteq \mathcal{K}^2E$	(P3)	$\mathcal{P}E \supseteq \mathcal{P}^2E$
(K4)	$\mathcal{P}E \subseteq \mathcal{K}\mathcal{P}E$	(P4)	$\mathcal{K}E \supseteq \mathcal{P}\mathcal{K}E$

Figura 10.2. Conocimiento y posibilidad.

anuncio del guarda cuando el verdadero estado del mundo fuera $\omega = 2$, porque este es el único estado en el que los otros dos viajeros tienen las caras limpias. Luego, bajo estas circunstancias, $\mathcal{K}D_A = \{2\}$. Pero el verdadero estado del mundo viene dado por $\omega = 8$. Sin la componente del ruborizarse, por tanto, Alice no sabría que ella tiene la cara sucia porque entonces sería cierto que $8 \notin \mathcal{K}D_A$.

Las propiedades que los especialistas en teoría de juegos asumen sobre el conocimiento aparecen listadas en la Figura 10.2. Las propiedades (K0) y (K1) son hipótesis de contabilidad[3]. Se sigue de la propiedad (K1) que $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{K}E \subseteq \mathcal{K}F$ (porque $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cap F = E$). La propiedad (K2) dice que Alice no puede saber nada que no ha ocurrido realmente. En la propiedad (K3), $\mathcal{K}^2E$ significa $\mathcal{K}(\mathcal{K}E)$. $\mathcal{K}^2E$ es el suceso que Alice sabe que ella sabe que E ha ocurrido. La propiedad (K3) dice que Alice no puede saber algo sin saber que lo sabe.

Para interpretar (K4), es necesario discutir el operador de *posibilidad* $\mathcal{P}$. No saber que algo no ha ocurrido es lo mismo que pensar que es posible que ocurriera. El operador de posibilidad se define, por tanto, por $\mathcal{P}E = {\sim}\mathcal{K}{\sim}E$, donde ${\sim}F$ significa el complementario del conjunto F, como se ha explicado en la Sección 1.7. Así pues, la propiedad (K4) dice que si Alice piensa que algo es posible, entonces ella sabe que piensa que es posible. La lista (P0)-(P4) de propiedades del operador de posibilidad son deducciones directas de (K0)-(K4).

Las hipótesis (K0)-(K4) son demasiado fuertes para ser de aplicación general en todas las situaciones en las que hay que hablar de conocimiento. En la práctica, las hipótesis sólo tienen sentido cuando el universo del discurso es lo bastante pequeño para poder enumerar todas las posibilidades antes de decidirse por una acción, y para poder explorar detalladamente todas las implicaciones de todas las posibilidades, de manera que puedan ser adecuadamente designadas y colocadas en sus casillas correspondientes. El estadístico Savage (Sección 3.6.2) llamó hipótesis del *mundo pequeño* a esta condición previa sobre el tipo de universo del discurso a considerar.

La lengua inglesa reconoce débilmente que debería hacerse alguna distinción entre las discusiones sobre el conocimiento en mundos grandes y pequeños. Por ejemplo, (K4) parece muy plausible cuando se expresa en términos

[3] En el texto damos por supuesto que Ω es un conjunto finito. Si hay que considerar conjuntos Ω infinitos, (K1) debe ser sustituido por la condición que, para cualquier conjunto de índices I, $\mathcal{K} \cap_{i\in I} E_i = \cap_{i\in I} \mathcal{K}E_i$.

de lo que Alice piensa que es *posible*. Pero supongamos que decidimos interpretarla como si dijera que si algo es *concebible* para Alicia, entonces ella sabe que es concebible. En este caso estamos diciendo que Alice *ya* ha concebido cualquier cosa que ella es capaz de concebir. Este enunciado solamente se puede defender para un mundo pequeño.

Afortunadamente, las cosas posibles que pueden ocurrir en un juego están claramente controladas por las reglas del juego. Estas reglas, por tanto, crean precisamente la clase de microcosmos al que se puede aplicar la hipótesis del mundo pequeño[4].

10.2.2. Truismos

Para Alice, un *truismo* es algo que no puede ser verdad sin que ella lo sepa. Más exactamente, T es un truismo si y sólo si $\mathcal{K}T \supseteq T$.

Por ejemplo, si se puede confiar en que el guarda del ferrocarril anunciará que alguien tiene la cara sucia si y sólo si es cierto, entonces es un truismo para Alice que alguien tiene la cara sucia. Si pensamos en los truismos como expresando la esencia de lo que ocurre al observar algo directamente, entonces en cierto sentido todo el conocimiento se deriva de truismos. El siguiente teorema expresa esto formalmente. No es un resultado que tenga mucha sustancia, pero su demostración nos permitirá familiarizarnos con el uso de las propiedades (K0)-(K4).

Teorema 10.2.1. Alice sabe que E ha ocurrido si y sólo si ha ocurrido un truismo T que implica E.

Demostración. Decir que E ha ocurrido significa que que el verdadero estado del mundo ω satisface $\omega \in E$. Decir que Alice sabe que E ha ocurrido significa que $\omega \in \mathcal{K}E$. Tomemos $T = \mathcal{K}E$. Entonces por (K2), $E \supseteq T$. Además, T es un truismo porque $T = \mathcal{K}E \supseteq \mathcal{K}^2E = \mathcal{K}T$, por (K3). Si $\omega \in \mathcal{K}E$, podemos hallar un truismo T tal que $\omega \in T$ y $E \supseteq T$. Luego ha ocurrido un truismo que implica E. Con esto hemos demostrado la parte *sólo si* del teorema. Para la parte *si*, empecemos con un truismo T para el cual $\omega \in T$ y $E \supseteq T$. Ya que $E \supseteq T, \mathcal{K}E \supseteq \mathcal{K}T$, por (K1). Puesto que T es un truismo. $\mathcal{K}T \supseteq T$. Luego $\mathcal{K}E \supseteq \mathcal{K}T \supseteq T$, y $\omega \in T$ implica que $\omega \in \mathcal{K}E$. Luego Alice sabe que E ha ocurrido. □

10.3. Posibilidad

Recordemos que $\mathcal{P}E$ es el conjunto de estados del mundo en los que Alice piensa que el suceso E es posible. O sea, $\mathcal{P}\{\omega\}$ es el suceso que Alice piensa que es posible que ω haya ocurrido.

[4] Como se observa en la Sección 10.8.2, esto no se aplica a un mundo suficientemente grande para dar cabida a los procesos mentales de los jugadores.

Teorema 10.3.1. El menor de los truismos que contiene a ω es $\mathcal{P}\{\omega\}$.

Demostración. Que $\omega \in \mathcal{P}\{\omega\}$ se sigue inmediatamente de (P2). Que $\mathcal{P}\{\omega\}$ es un truismo se sigue inmediatamente de (K4). Falta por demostrar que $\mathcal{P}\{\omega\}$ es el menor truismo que contiene a ω.

Supongamos que T es otro truismo que contiene a ω. Hemos de demostrar que $T \supseteq \mathcal{P}\{\omega\}$. Que $\omega \in T$ y $\mathcal{K}T \supseteq T$ se pueden reescribir $\mathcal{K}T \supseteq T \supseteq \{\omega\}$. Se sigue entonces que

$$\mathcal{P}\mathcal{K}T \supseteq \mathcal{P}T \supseteq \mathcal{P}\{\omega\} \qquad \text{(por (P1))}$$
$$T \supseteq \mathcal{K}T \supseteq \mathcal{P}\mathcal{K}T \qquad \text{(por (P4) y (K2))}$$

Luego $T \supseteq \mathcal{P}\{\omega\}$ y $\mathcal{P}\{\omega\}$ es menor que cualquier otro truismo T. □

10.3.1. Conjuntos de posibilidades

Sea $P(\omega)$ el conjunto de estados que Alice piensa que son posibles cuando ocurre ω. Como veremos, esta idea está íntimamente relacionada con la noción de conjunto de *información* que encontramos en la Sección 3.3.1. Sin embargo, llamaremos a $P(\omega)$ un *conjunto de posibilidades*. Si ω ha ocurrido, Alice no tiene por qué saber que ω ha ocurrido. Con seguridad, sólo podrá decir que ha ocurrido algo en $P(\omega)$.

Resulta que $P(\omega) = \mathcal{P}\{\omega\}$. Recordemos que $\mathcal{P}\{\omega\}$ es el conjunto de estados en los que Alice piensa que ω es posible. Afirmamos ahora que $\mathcal{P}\{\omega\}$ también es el conjunto de estados que Alice piensa que son posibles cuando ω ocurre.

Para verlo, imaginemos que ω ha ocurrido. Si $\omega \in T$ y T es un truismo, entonces Alice sabe que todo lo que está fuera de T es imposible. Luego $P(\omega)$ debe ser un subconjunto de todos los truismos que contienen a ω. Pero el mismo $P(\omega)$ debe ser un truismo, porque Alice no puede dejar de saber qué es lo que ella considera posible. Luego $P(\omega)$ es el menor truismo que contiene a ω, es decir, $\mathcal{P}\{\omega\}$.

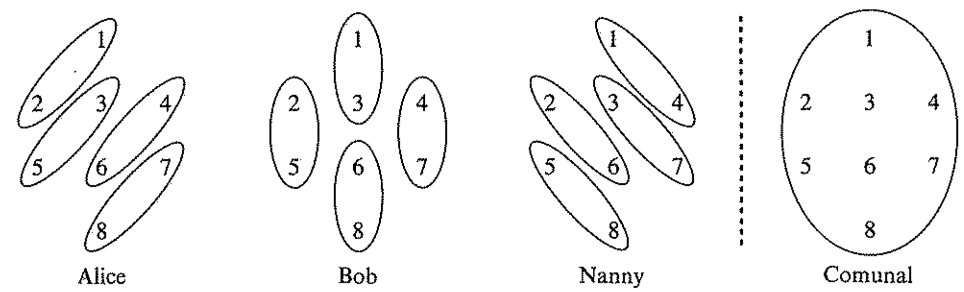


Figura 10.3. Conjuntos de posibilidades *antes* de que el guarda hable.

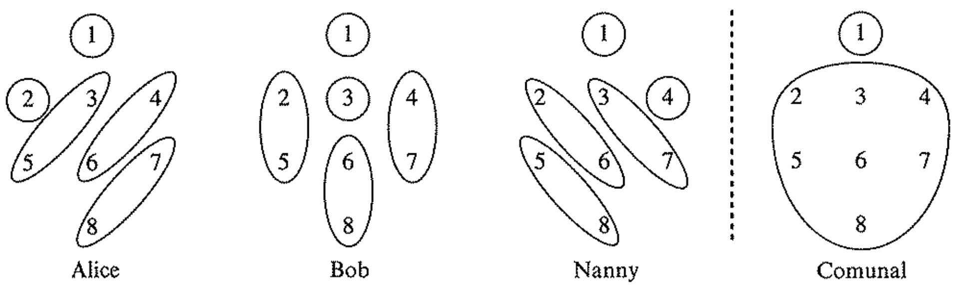


Figura 10.4. Los conjuntos de posibilidades *después* de que el guarda habla y *antes* de que nadie se ruborice.

La historia de los viajeros con las caras sucias proporciona algunos ejemplos de conjuntos de posibilidades. Recordemos de la Sección 10.2 que el universo del discurso es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. La Figura 10.3 muestra los conjuntos de posibilidades para cada uno de los viajeros antes de que el guarda hable. (Ignórese por el momento la cuarta columna.) Por ejemplo, con independencia de lo que Alice ve cuando mira las caras de sus compañeros de viaje, para ella la posibilidad de que su propia cara esté limpia o sucia continúa abierta. Así, escribiendo P_A para indicar que estamos hablando de lo que Alice piensa que es posible, $P_A(1) = P_A(2) = \{2\}$[5].

La Figura 10.4 muestra los conjuntos de posibilidades para los viajeros *después* de que el guarda haya hablado, pero *antes* de que el rubor se asome a la cara de nadie. (Ignórese de nuevo la cuarta columna.) Cuando Alice ve dos caras limpias, puede deducir el estado de su propia cara a partir de que el guarda diga, o no diga, algo. Así, $P_A(1) = \{1\}$ y $P_A(2) = \{2\}$.

Conocimiento y posibilidad. El teorema siguiente permite que la descripción del conocimiento de una persona por medio de conjuntos de posibilidades simplifique las cosas enormemente.

Teorema 10.3.2. Alice sabe que E ha ocurrido en el estado ω si y sólo si $E \supseteq P(\omega)$.

Demostración. Si $E \supseteq P(\omega)$, entonces el Teorema 10.2.1 nos dice que Alice sabe E en el estado ω porque $P(\omega)$ es un truismo que contiene a ω. Por otra parte, si Alice sabe que E ha ocurrido, debe haber un truismo T tal que $\omega \in T$ y $E \supseteq T$. Pero $P(\omega)$ es el menor truismo que contiene a ω. Luego $E \supseteq T \supseteq P(\omega)$. □

[5] Puesto que sabemos que el estado *real* del mundo es $\omega = 8$, ¿por qué la Figura 10.3 contiene conjuntos de posibilidad distintos de $P_A(8)$, $P_B(8)$ y $P_N(8)$? La razón para no dejar de lado lo que la gente creería si el estado actual fuera distinto de $\omega = 8$ es que así podemos seguir el razonamiento de alguien que no comparte nuestro punto de vista omnisciente, y no conoce, por tanto, el verdadero estado del mundo. El argumento que Alice usó en la Sección 10.1 es un buen ejemplo. Se vio obligada a considerar varias hipótesis sobre lo que otros jugadores podrían estar pensando sobre el verdadero estado antes de alcanzar la conclusión de que su cara estaba sucia.

10.3.2. Particiones

Mates 10.3.3 →

Una característica importante de los conjuntos de posibilidades en las Figuras 10.3 y 10.4 es que constituyen una partición del conjunto Ω. En general, una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cuya unión es Ω es una *partición* de Ω si elementos distintos de $\mathcal{C}$ no tienen elementos en común.

El siguiente teorema dice que la colección de todos los conjuntos de posibilidades $P(\omega)$ particiona el conjunto Ω.

Teorema 10.3.3

$$P\{\omega_1\} \neq P\{\omega_2\} \quad \Rightarrow \quad P\{\omega_1\} \cap P\{\omega_2\} = \emptyset$$

Demostración. Probaremos el teorema[6] demostrando que si $\mathcal{P}\{\omega_1\}$ y $\mathcal{P}\{\omega_2\}$ tienen un elemento ζ en común, entonces $\mathcal{P}\{\omega_1\} = \mathcal{P}\{\omega_2\}$.

La afirmación $\zeta \in \mathcal{P}\{\omega_1\}$ significa que Alice piensa que ω_1 es posible cuando ocurre ζ. La afirmación $\omega_1 \in P(\zeta)$ también significa que Alice piensa que ω_1 es posible cuando ζ ocurre. Ya que $P(\zeta) = \mathcal{P}\{\zeta\}$, se sigue que $\zeta \in \mathcal{P}\{\omega_1\}$ si y sólo si $\omega_1 \in \mathcal{P}\{\zeta\}$.

El siguiente paso es observar que si $\zeta \in \mathcal{P}\{\omega_1\}$, entonces $\mathcal{P}\{\omega_1\} \supseteq \mathcal{P}\{\zeta\}$ (por (P1) y (P3)). Pero $\omega_1 \in \mathcal{P}\{\zeta\}$, luego también es cierto que $\mathcal{P}\{\zeta\} \supseteq \mathcal{P}\{\omega_1\}$. De aquí, $\mathcal{P}\{\zeta\} = \mathcal{P}\{\omega_1\}$.

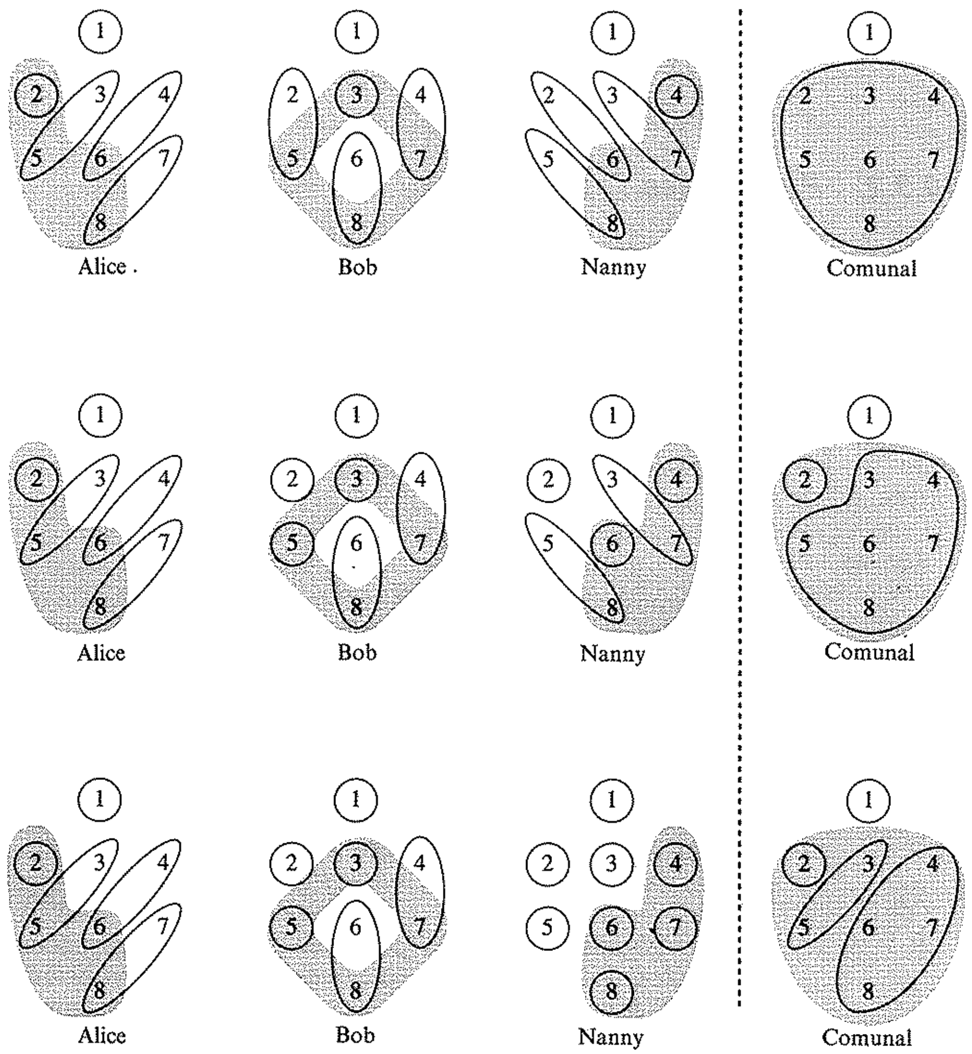
Así pues, si $\zeta \in \mathcal{P}\{\omega_1\}$ y $\zeta \in \mathcal{P}\{\omega_2\}$, entonces $\mathcal{P}\{\omega_1\} = \mathcal{P}\{\zeta\} = \mathcal{P}\{\omega_2\}$. □

Algunas particiones de posibilidades se pueden comparar. Una partición $\mathcal{C}$ es un *refinamiento*, o es *más fina* que una partición $\mathcal{D}$, si cada conjunto de $\mathcal{C}$ es un subconjunto de un conjunto en $\mathcal{D}$. En las mismas circunstancias, se dice que $\mathcal{D}$ es *más basta* que $\mathcal{C}$. Por ejemplo, la partición de Alice de la Figura 10.4 es refinamiento de su partición en la Figura 10.3. De forma equivalente, su partición en la Figura 10.3 es más basta que su partición en la Figura 10.4. Esto refleja el hecho que está mejor informada en el último caso.

10.3.3. Refinar el conocimiento

En general, cuando la gente consigue más información, sus particiones de posibilidades se hacen más finas. La Figura 10.5(a) ilustra este punto. Se ha construido suponiendo que la oportunidad de ruborizarse va pasando en

[6] La proposición $A \Rightarrow B$ es equivalente a su contrarrecíproca (no B) $\Rightarrow$ (no A).



(a)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Alicia se ruboriza	No	Sí	No	No	No	No	No	No
Bob se ruboriza	No	No	Sí	No	Sí	No	No	No
Nanny se ruboriza	No	No	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí

(b)

Figura 10.5. Ruborizarse sucesivamente.

sucesión de uno a otro de los tres viajeros, empezando con Alice. Esto proporciona la siguiente secuencia de sucesos.

Paso 1. Antes de que el guarda tenga oportunidad de hablar, la situación del conocimiento es la que muestra la Figura 10.3.

Paso 2. Después de que el guarda ha tenido oportunidad de hablar, la situación es la ilustrada en la Figura 10.4. Esta ha sido repetida como primera fila de la Figura 10.5(a), pero indicando por medio de una trama los estados en los que algún viajero tiene la cara sucia. (Ignórese la cuarta columna de la figura hasta la Sección 10.6.4.)

Paso 3. Aquí Alice tiene la oportunidad de ruborizarse (pero no Bob ni Nanny). Sólo se ruborizará en el estado 2, porque este es el único estado en que ella sabe que su cara está sucia. La información de Alice no cambia, tanto si se ruboriza como si no. Sin embargo, Bob y Nanny aprenden algo de su comportamiento. Si Alice se ruboriza, el verdadero estado debe ser $\omega = 2$. Esto permite a Bob dividir su conjunto de posibilidades $\{2, 5\}$ en dos subconjuntos $\{2\}$ y $\{5\}$. Obsérvese que, como el perro que no ladró en el cuento de Sherlock Holmes, ver que Alice no se ruboriza es una información tan útil para Bob, cuando su conjunto de posibilidades es $\{2, 5\}$, como ver que sí lo hace. Que no se ruborice excluye entonces la posibilidad de que el verdadero estado sea $\omega = 2$. Por tanto debe ser $\omega = 5$. Nanny hace inferencias parecidas y es capaz de dividir su conjunto de posibilidades $\{2, 6\}$ en $\{2\}$ y $\{6\}$. El resultado aparece en la segunda fila de la Figura 10.5(a).

Paso 4. Ahora Bob tiene la oportunidad de ruborizarse (pero no Alice ni Nanny). Bob sólo se ruboriza en los estados 3 y 5. Esto es muy informativo para Nanny, cuya nueva partición de posibilidades se hace lo más fina que se puede llegar a hacer. Alice, sin embargo, no aprende nada. En particular, su conjunto de posibilidades $\{3, 5\}$ no se puede refinar porque Bob se ruborizará tanto en el estado 3 como en el estado 5. El resultado se da en la tercera fila de la Figura 10.5(a).

Paso 5. Ahora Nanny tiene la oportunidad de ruborizarse (pero no Alice ni Bob). Se ruboriza en los estados 4, 6, 7 y 8. Sin embargo, ni Alice ni Bob pueden refinar sus particiones de posibilidades a partir de esta información.

Paso 6. Ahora Alice tiene la oportunidad de ruborizarse de nuevo. Sólo se ruboriza en el estado 2. Esto no ayuda ni a Bob ni a Nanny.

Paso 7. Ahora Bob tiene la oportunidad de ruborizarse de nuevo. Sólo se ruboriza en los estados 3 y 5. Esto no ayuda ni a Alice ni a Nanny.

No es necesario examinar más pasos ya que los pasos 5, 6 y 7 se repetirán una y otra vez. Por tanto, la situación informacional final es la que muestra la tercera fila de la Figura 10.5(a).

10.3.4. ¿Quién se ruboriza?

La discusión anterior nos permite decir algo sobre quién se ruboriza en la historia de los viajeros con la cara sucia. Recordemos que las personas que saben que tienen la cara sucia se ruborizan necesariamente. La tabla de ruborizados de la Figura 10.5(b) puede, por tanto, construirse usando la tercera fila de la Figura 10.5(a). Por ejemplo, el conjunto de posibilidades de Bob cuando $\omega = 8$ es $P_B(8) = \{6, 8\}$. El suceso de que él tiene la cara sucia es $D_B = \{3, 5, 7, 8\}$. Luego es falso que $D_B \supseteq P_B(8)$. De aquí que, por el Teorema 10.3.2, Bob no se ruboriza cuando el verdadero estado es $\omega = 8$. Sin embargo, $P_N(8) = \{8\}$ y $D_N = \{4, 6, 7, 8\}$. Luego $D_N \supseteq P_N(8)$ y Nanny se ruboriza cuando el verdadero estado es $\omega = 8$.

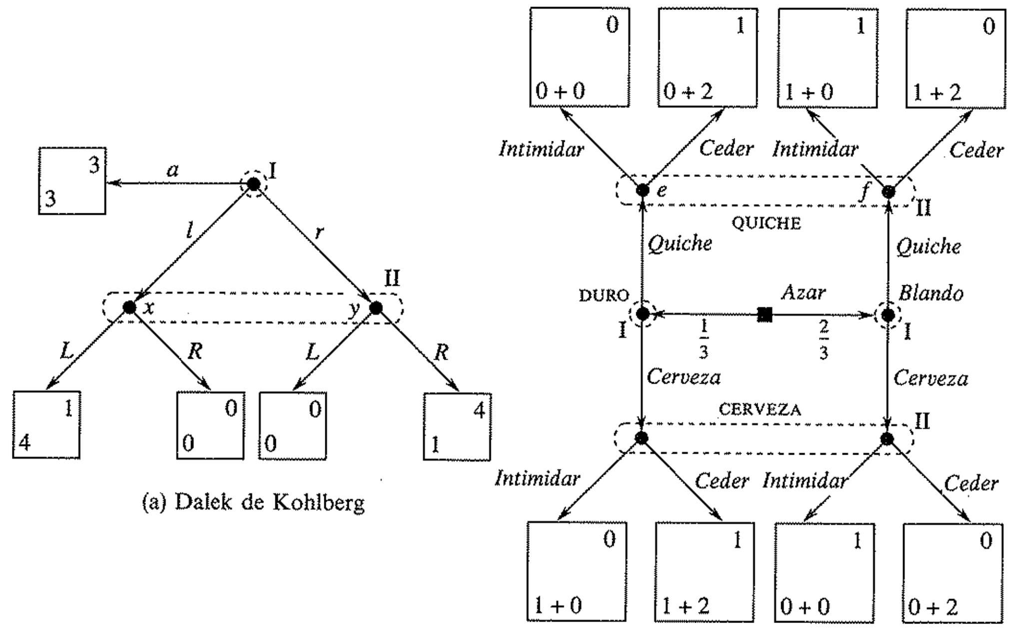
Sin embargo, la historia del ruborizarse por turno es sólo una de entre muchas historias que se pueden contar y que son consistentes con las especificaciones informacionales dadas en el cuento de los viajeros con la cara sucia. Los Ejercicios 10.9.13 y 10.9.14 exploran otras posibilidades. Siempre hay alguien que se ruborice, pero *quién* sea, depende del funcionamiento del mecanismo ruborizador.

10.4. Conjuntos de información

Ha llegado el momento de poner en relación lo que hemos aprendido sobre la teoría del conocimiento con la teoría de juegos. El primer tema a estudiar es la noción de un *conjunto de información.* Los conjuntos de información fueron introducidos en la Sección 3.3.1, y desde entonces los hemos utilizado sin analizar sus propiedades. Sin embargo, ahora que los conjuntos de posibilidades son parte de nuestro léxico, es factible discutir las implicaciones de modelizar el conocimiento de los jugadores durante un juego por medio de conjuntos de información.

La propiedad más importante de los conjuntos de información es que no pueden solaparse. Más exactamente, los conjuntos de información de un jugador deben ser una partición del conjunto de nodos de decisión del jugador. Después del Teorema 10.3.3, sabemos que esto simplemente refleja que las hipótesis estándar listadas en la Figura 10.2.1 son las hipótesis que hay que hacer sobre lo que un jugador sabe acerca de dónde él y la jugadora II se encuentran dentro del juego.

La Figura 10.6 muestra los conjuntos de información usados en dos juegos bien conocidos. En un juego de *información perfecta,* cada conjunto de información contiene exactamente un nodo de decisión. Así, cuando un jugador toma una decisión en un juego de información perfecta, él o ella sabe todo lo que ha ocurrido hasta ese momento en el juego. Un ejemplo de juego de *información imperfecta* es el juego del dalek de Kohlberg de la Figura 10.6(a). Cuando la jugadora II decide entre L y R, lo único que sabe es que el jugador I empezó no escogiendo a. Si lo hubiera hecho, ella no



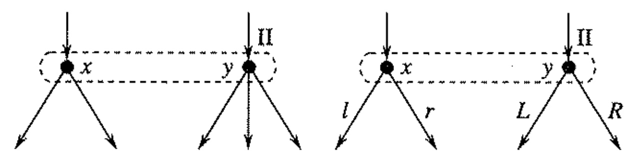
(a) Dalek de Kohlberg

(b) Quiche de Kreps

Figura 10.6. Juegos de información imperfecta.

hubiera tenido que tomar una decisión. Esta, sin embargo, no sabe si él eligió l o r. Si eligió l, entonces ella está eligiendo en el nodo x. Si él eligió r, entonces ella está decidiendo en el nodo y. Su conjunto de posibilidades es, por tanto, $\{x, y\}$. Ella puede tener razones para pensar que una de las dos posibilidades es más probable que la otra, pero lo que ella *sabe* es simplemente que está decidiendo en uno de estos dos nodos.

No se puede elegir una partición cualquiera del conjunto de nodos de decisión de un jugador y esperar obtener un juego en el cual los conjuntos de información tienen sentido. En particular, ninguna de las situaciones de la Figura 10.7 es admisible, si $\{x, y\}$ ha de ser interpretado como un conjunto de información. En la Figura 10.7(a), la jugadora II puede averiguar en qué nodo se encuentra contando los nodos de que dispone. En la Figu-



(a) (b)

Figura 10.7. Conjuntos de información ilegales.

ra 10.7(b), podría deducir dónde se encuentra a partir de las etiquetas usadas para describir sus opciones.

10.4.1. Memoria perfecta

La palabra «perfecta» se usa demasiado en teoría de juegos. En particular, es fácil confundir un juego de memoria perfecta con un juego de información perfecta. Sin embargo, los dos juegos de la Figura 10.6 son juegos de memoria perfecta, pero ninguno de ellos es de información perfecta.

En un juego de memoria perfecta, nadie olvida nunca lo que alguna vez llegó a saber. La Figura 10.8 muestra dos juegos de un jugador que *no* son de memoria perfecta. El único jugador será llamado en ambos casos Terence, en honor de un economista de Oxford cuyo carácter despistado es famoso. En la Figura 10.8(a), se supone que cuando llega al nodo y Terence ya ha olvidado que había tomado una decisión en el juego. Si recordara que ya había visitado el conjunto de información $\{x, y\}$, sabría necesariamente que ahora ha de encontrarse en su segundo nodo.

En la Figura 10.8(b), que muestra un juego que empieza con una jugada al azar, Terence habrá olvidado en el nodo X que acaba de escoger la acción r. De no ser así sabría que se encuentra en el nodo X.

Filo 10.4.3 →

Puede ser útil relacionar la noción de memoria perfecta con las consideraciones sobre el conocimiento exploradas en secciones anteriores. Con este fin, supongamos que el espacio de estados Ω es el conjunto de estrategias puras de Terence en el juego de la Figura 10.8(a). Recordemos que una estrategia pura para un jugador asigna una acción a cada uno de sus conjuntos de información. En este caso, hay dos conjuntos de información, y el conjunto de estrategias puras es $\Omega = \{lL, lR, rL, rR\}$. Imaginemos que Terence ha consultado con un especialista en teoría de juegos que, sabiendo que Terence es despistado, le ha puesto por escrito su consejo sobre la estrategia pura a seguir y le ha sujetado el papel a la camisa con un imperdible.

La primera vez que Terence ha de tomar una decisión, consulta el papel y actúa de acuerdo con sus instrucciones. A continuación, sin embargo, se olvida de lo que el papel dice y de que ya ha tomado una decisión en el juego. Después se le requiere que tome una segunda decisión. Sin embargo, aunque Terence es un despistado tiene una mente penetrante. Por tanto, se pregunta a sí mismo qué puede deducir sobre lo que está escrito en el papel a partir de la naturaleza de la decisión que ahora le dicen que debe tomar.

Terence estará en el nodo z si y sólo si lL o lR está escrito en el papel. Puede deducir que se encuentra en el nodo z por el hecho de que ahora ha de elegir entre L y R. Así, dos de sus conjuntos de posibilidades son $P(lL) = P(lR) = \{lL, lR\}$. Estará en el nodo y si y sólo si rL o rR está escrito en el papel. No puede deducir que está en el nodo y por el hecho de tener que escoger entre l y r. Esto también sería cierto en el nodo x. Así, $P(rL) = P(rR) = \{lL, lR, rL, rR\}$, como se indica en la Figura 10.8(c). Lo interesante aquí es

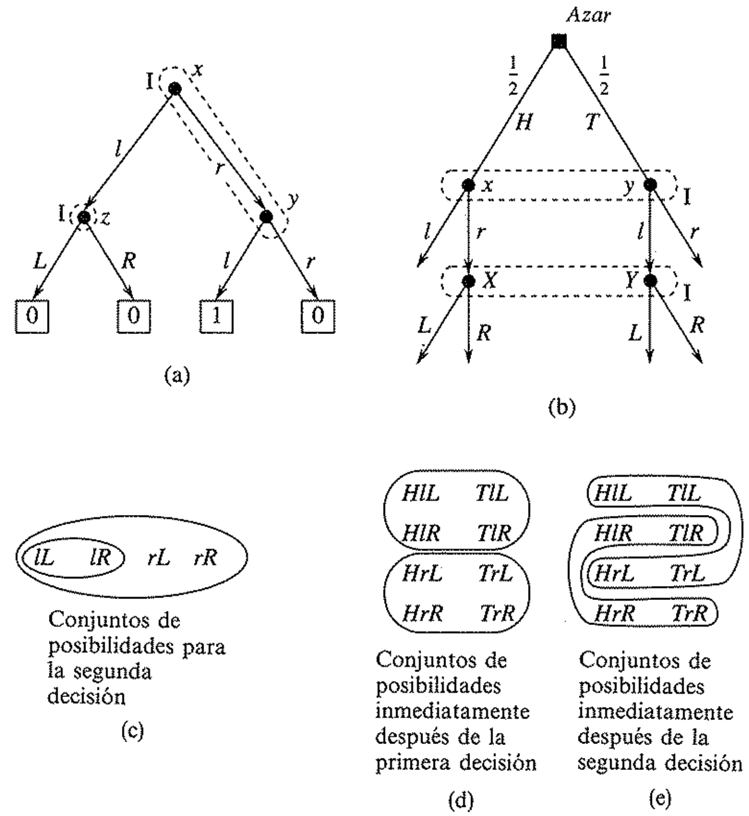


Figura 10.8. Jugadores desmemoriados.

que los conjuntos de posibilidades de Terence en esta etapa del juego no constituyen una partición de Ω. Luego Terence viola una de nuestras condiciones sobre el conocimiento.

Podemos proceder de forma similar con el juego de la Figura 10.8(b). Pero aquí Terence ha de tener presente no sólo que él no sabe lo que el especialista en teoría de juegos escribió en el papel enganchado a su camisa, sino también su ignorancia sobre si el azar ha elegido H o T. Así, Ω contiene los ocho elementos listados en la Figura 10.8(d). No hay violación de las condiciones sobre el conocimiento aquí, pero obsérvese que la partición de la Figura 10.8(e) no es un refinamiento de la partición de la Figura 10.8(d). Este es un caso evidente de olvido. Para uno que nunca olvida, las particiones posteriores siempre son refinamientos de las anteriores.

Poca gente se proclamaría perfectamente racional. Pero si lo fuéramos, no necesitaríamos andar por ahí con papeles colgando de la camisa. En el mundo idealizado de los especialistas en teoría de juegos, la memoria perfecta siempre debe darse por supuesta, salvo que se diga lo contrario. En un juego de memoria perfecta, los jugadores siempre serán capaces de deducir a partir de sus actuales circunstancias todo aquello que alguna vez supieron. Así, incluso si los jugadores llegaran a olvidar cosas, esto no les haría daño, siempre que tuvieran en cuenta todas las implicaciones de haber llegado a un determinado conjunto de información.

10.4.2. Agentes

Dado que generan estructuras de conocimiento incoherentes, no es probable que juegos como el de la Figura 10.8(a) lleguen a ser alguna vez útiles como modelos[7]. Pero modelos en los que aparece el olvido pueden ser útiles ocasionalmente. El bridge es un ejemplo.

El bridge se puede estudiar como un juego de cuatro jugadores. Entonces será un juego de información imperfecta y de memoria perfecta. Norte y Sur serán dos jugadores separados cuyas preferencias coinciden. A veces un conjunto de jugadores con estas características se llama un *equipo*. Este y Oeste también forman un equipo, pero con preferencias diametralmente opuestas a las del equipo Norte-Sur.

Alternativamente, el bridge se puede estudiar como un juego de dos jugadores y de suma cero. El jugador I es entonces quien dirige el equipo Norte-Sur. Norte y Sur son marionetas que sólo siguen sus instrucciones, dadas detalladamente antes de que empiece el juego. Se dice que Norte y Sur son los *agentes* del jugador I. Análogamente, Este y Oeste son agentes para la jugadora II. Esta formulación puede parecer más simple porque juegos con dos jugadores son más fáciles que juegos con cuatro. Pero obsérvese que, si el bridge se formula de acuerdo con el segundo modelo, es un juego de memoria imperfecta. El juego deja de tener sentido si, cuando el jugador I se pone en el lugar de Sur, pudiera recordar qué cartas tenía Norte un momento antes.

10.4.3. Estrategias de comportamiento

La razón por la que vale la pena distinguir los juegos de memoria perfecta de sus primos más desmemoriados es porque en aquéllos se puede trabajar con estrategias de comportamiento. Si recuerda qué es una estrategia de comportamiento, y que estas estrategias se pueden usar como sustitutos de las estrategias mixtas en juegos de memoria perfecta, entonces domina las ideas importantes en esta parte del capítulo. Un recuerdo perfecto de todos los detalles no es necesario para la mayoría de las cosas.

[7] No todos los especialistas en teoría de juegos están de acuerdo en esto. Mi mujer ni siquiera está de acuerdo en que gente plenamente racional pueda pasar sin notas colgadas de la camisa.

Una *estrategia pura* asigna una acción específica a cada uno de los conjuntos de información de un jugador. Por ejemplo, cuando $n = 10$, el jugador I tiene cinco conjuntos de información en el juego de la Figura 2.6. En cada conjunto de información, tiene dos opciones. Se sigue que tiene en total $2^5 = 32$ estrategias puras.

Una *estrategia mixta* p es un vector cuyas coordenadas corresponden a estrategias puras del juego. El uso por parte de un jugador de la estrategia mixta p le hace jugar su estrategia pura i-ésima con probabilidad p_i. Puesto que el duelo tiene 32 estrategias puras, sus estrategias mixtas son objetos incómodos que requieren la especificación de 32 probabilidades $p_1, p_2, ..., p_{32}$.

Una *estrategia de comportamiento*, como una estrategia pura, dice qué hacer en cada uno de los conjuntos de información de un jugador. Pero en lugar de elegir una acción específica en cada conjunto de información, asigna una *probabilidad* a cada una de las acciones disponibles. Nos podríamos imaginar a un jugador que usa una estrategia de comportamiento como si estuviera delegando sus decisiones a un ejército de agentes, uno para cada uno de los conjuntos de información del jugador. Cada agente recibe un papel en el que constan las probabilidades con que el agente debe seleccionar cada una de las acciones de que dispone en el conjunto de información del que el agente es responsable. Cada agente actúa entonces *independientemente* de los demás[8].

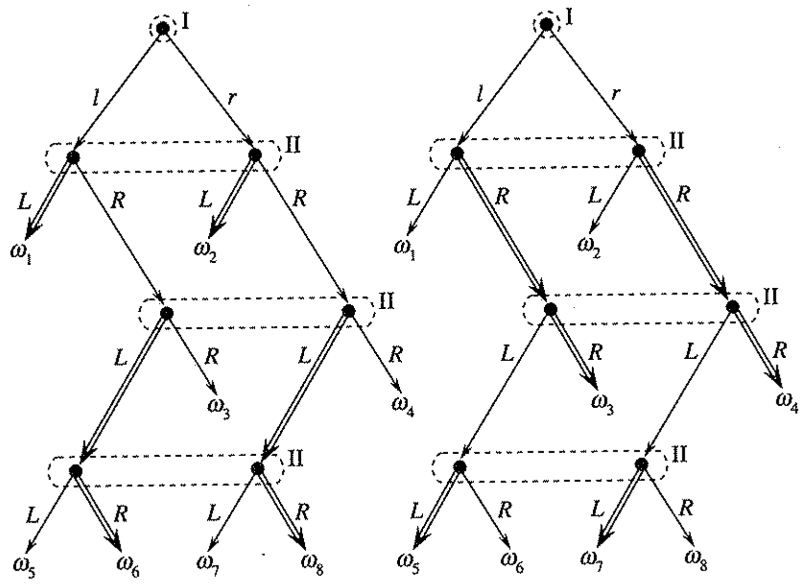
El uso de estrategias de comportamiento suele simplificar las cosas enormemente. Por ejemplo, en el duelo, un estrategia de comportamiento queda determinada sólo por cinco probabilidades $q_1, q_2, ..., q_5$, donde q_i es la probabilidad de que el jugador I dispare si alcanza el i-ésimo conjunto de información.

Un jugador que usa una estrategia de comportamiento retrasa su actividad aleatorizadora hasta el último momento. Sólo cuando llega a un conjunto de información, el jugador hecha mano del cubilete de dados o da vueltas a la rueda de una ruleta. Esto contrasta marcadamente con lo que hace un jugador que usa una estrategia mixta. Este jugador realiza todos sus movimientos al azar *antes* de que el juego empiece. Esto determina una estrategia a la que el jugador se adhiere durante todo el juego.

Dado que las estrategias mixtas y las de comportamiento son tan distintas, es sorprendente que en la práctica resulten ser equivalentes para juegos de memoria perfecta. El resultado que sigue expresa estte hecho rigurosamente. Para entender el resultado es necesario recordar que, una vez que los jugadores han elegido sus estrategias (ya sean puras, mixtas o de comportamiento), lo que queda determinado es una *lotería* sobre los resultados del juego.

Proposición 10.4.1 (Kuhn). En un juego de memoria perfecta, si el jugador i elige una estrategia s, que puede ser mixta o de comportamiento,

[8] Un economista diría que de esta forma el jugador descentraliza su proceso de toma de decisiones.



(a) (b)

Figura 10.9. El teorema de Kuhn.

entonces el jugador dispone de una estrategia t del otro tipo con la propiedad que, no importa cómo jueguen los oponentes, la lotería resultante sobre los resultados del juego es la misma para s y para t.

El teorema de Kuhn es una de esas proposiciones con muy poca sustancia, pero cuya prueba formal requiere organizar mucha notación matemática. Por esta razón nos limitaremos a ofrecer en su defensa un ejemplo de cómo funciona para el juego sencillo de la Figura 10.9. Aunque el juego es simple, exhibe todo lo que es importante en el teorema de Kuhn.

La Figura 10.9(a) muestra la estrategia pura de la jugadora II, *LLR*. La Figura 10.9(b) muestra su estrategia pura *RRL*. Nuestro objetivo es encontrar una estrategia de comportamiento b equivalente a la estrategia mixta m que asigna probabilidad 1/3 a *LLR* y 2/3 a *RRL*. La estrategia de comportamiento será especificada por tres probabilidades q_1, q_2 y q_3 que representan las probabilidades con que el jugador II usará R en cada uno de sus conjuntos de información.

Supongamos alcanzado el primer conjunto de información de la jugadora II. Si el movimiento al azar requerido por m provoca el uso de *LLR*, entonces jugará L en este conjunto de información. Si el azar conduce a *RRL*, entonces jugará R en este conjunto de información. Luego, en este conjunto de información, L se jugará con probabilidad 1/3 y R con probabilidad 2/3. Para imitar este comportamiento con la estrategia de comportamiento b, sólo es necesario tomar $q_1 = 2/3$. El segundo conjunto de información del jugador II nunca será alcanzado si el mecanismo al azar de m conduce a usar *LLR*. Por tanto, si se alcanza el segundo conjunto de información, el mecanismo aleatorio de m debe haber conducido a *RRL*. Luego en el segundo conjunto de información se jugará R con toda seguridad. Para imitar este comportamiento con b, tomemos $q_2 = 1$. El tercer conjunto de información no puede ser alcanzado al usar m. Luego q_3 se puede tomar igual a cualquier cosa. La Figura 10.10 muestra la lotería sobre resultados que se obtiene cuando la jugadora II usa b o m, y el jugador I elige l con probabilidad $1 - p$ y r con probabilidad p.

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
$\frac{1}{3}(1-p)$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{3}(1-p)$	$\frac{2}{3}p$	0	0	0	0

Figura 10.10. Una lotería sobre resultados.

10.5. Revisión bayesiana

En la teoría de juegos es necesario tener presente no sólo lo que los jugadores *saben*, sino también lo que *creen*. Como se ha explicado en la Sección 3.6.2, quienes toman decisiones que respetan ciertas condiciones de racionalidad se comportan *como si* maximizaran la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern relativa a la medida de probabilidad prob : $\Omega \to [0, 1]$. El número prob(E) se dice que es la probabilidad subjetiva a priori del suceso E. Describe lo que el jugador cree acerca del suceso E *antes* de disponer de información alguna.

Por ejemplo, en la historia de los viajeros con la cara sucia, Alice no podrá excluir ninguno de los estados posibles listados en la Figura 10.1 hasta entrar en el vagón del ferrocarril. Antes de entrar en él, ella no *sabe* nada sobre cuál es el verdadero estado. Pero esto no le impide tener *creencias*. Estas quedan resumidas en una medida de probabilidad definida sobre el conjunto Ω de todos los estados posibles. Por ejemplo, puede ser esta:

$$\text{prob}\{1\} = 0{,}2; \quad \text{prob}\{2\} = \text{prob}\{3\} = \text{prob}\{4\} = 0.15;$$
$$\text{prob}\{5\} = \text{prob}\{6\} = \text{prob}\{7\} = 0{,}1; \quad \text{prob}\{8\} = 0.05.$$

El suceso $D_A = \{2, 5, 6, 8\}$ que su propia cara esté sucia tiene una probabilidad a priori de prob(D_A) $= 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}4$. Esta es una probabilidad a priori porque representa su creencia sobre D_A antes de tener ninguna información.

Cuando entra en el vagón del ferrocarril, ve las caras de sus compañeros de viaje. Esto le hará actualizar su probabilidad para D_A. La nueva probabilidad será su probabilidad a posteriori de D_A, porque representa lo que ella cree *después* de obtener información. Si el verdadero estado es $\omega = 8$, sabrá, después de ver las caras de sus compañeros, que sólo los estados del conjunto $E = \{7, 8\}$ son posibles. (El suceso E es el conjunto de posibilidades $P_A(8)$ ilustrado en la Figura 10.3.) Su probabilidad a posteriori para D_A es, por tanto, la probabilidad condicional $\text{prob}(D_A|E)$. Las probabilidades condicionales se calculan como se ha explicado en la Sección 2.1.4. En este caso,

$$\text{prob}(D_A|E) = \frac{\text{prob}(D_A \cap E)}{\text{prob}(E)} = \frac{\text{prob}\{8\}}{\text{prob}\{7, 8\}} = \frac{0{,}05}{0{,}1 + 0{,}05} = 1/3$$

La probabilidad a priori de Alice para el suceso D_A, 2/5, se ha rebajado a una probabilidad a posteriori de 1/3.

Aunque la regla de Bayes no siempre se usa en este proceso, la deducción de probabilidades a posteriori a partir de probabilidades a priori después de recibir información se llama una *revisión bayesiana*. Frecuentemente, la medida de probabilidad a priori de Alice se denomina simplemente su *a priori*. Análogamente, su *a posteriori* no es donde se sienta, sino su medida de probabilidad a posteriori.

10.5.1. Los hombres de verdad no comen quiche

Mates

La quiche de Kreps de la Figura 10.6(b) es un ejemplo de un juego de señalización. Sin embargo, la versión estudiada en este capítulo no es muy interesante para obtener conclusiones sobre señalización porque, como veremos, sólo tiene un equilibrio de Nash. Se introduce aquí con dos objetivos. El primero es proporcionar un ejemplo serio de cómo se usa la revisión bayesiana en el cálculo de equilibrios en juegos de información imperfecta. El segundo es preparar el camino para el siguiente capítulo, donde usaremos ésta y otras versiones de la quiche para ilustrar de qué forma la teoría de juegos se enfrenta con el problema de la información *incompleta*[9].

En la quiche, el azar empieza por decidir si el jugador I será un «duro» o un «blando». En cualquier caso, el jugador I ha de enfrentarse a continuación con la jugadora II, que puede escoger entre *intimidar* al jugador I o *ceder* ante él. Ella cedería si supiera que el jugador I es un duro, pero lo intimidaría si supiera que es un blando. Sólo el jugador I sabe con qué temperamento la Naturaleza le ha dotado. Sin embargo, puede mandar señales al jugador II actuando como un duro o comportándose como un blando. Hemos estilizado las señales reduciéndolas a beber *cerveza* y comer *quiche*. Los tipos duros prefieren cerveza y los blandos prefieren quiche. Pero no tienen por qué

[9] Información incompleta no es lo mismo que información imperfecta. La primera se da, por ejemplo, cuando los jugadores no saben cuáles son las preferencias del otro.

	bb	*bd*	*db*	*dd*
qq	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$, $\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$, $\frac{1}{3}$
qb	0, $\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$, 0	$\frac{2}{3}$, 1	2, $\frac{1}{3}$
bq	1, $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$, 1	$\frac{7}{3}$, 0	3, $\frac{1}{3}$
bb	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$, $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$, $\frac{1}{3}$

Figura 10.11. La forma estratégica para la quiche.

consumir necesariamente lo que prefieren. Por ejemplo, un blando puede disimular que no le gusta la cerveza con la esperanza de que le confundan con un tipo duro.

La Figura 10.6(b) muestra que la Naturaleza escoge a los tipos duros con probabilidad 1/3 y a los blandos con probabilidad 2/3. Los conjuntos de información marcados DURO y BLANDO muestran que el jugador I sabe cuál es su propio temperamento. Los conjuntos de información marcados CERVEZA y QUICHE muestran que la jugadora II sólo sabe qué señal le ha mandado el jugador I, pero no si él es duro o blando. Los pagos se han escogido de manera que el jugador I consigue 2 si la jugadora II se somete a él, más 1 si él evita comer algo que no le gusta. La jugadora II consigue 1 por predecir correctamente el temperamento del jugador I.

El jugador I tiene cuatro estrategias puras[10]. Estas son:

(*quiche, quiche*); (*quiche, cerveza*); (*cerveza, quiche*) (*cerveza, cerveza*).

La jugadora II también tiene cuatro estrategias puras:

(*intimidar, intimidar*); (*intimidar, ceder*); (*ceder, intimidar*); (*ceder, ceder*).

El juego de la quiche tiene, por tanto, una forma estratégica 4×4 que hemos incluido en la Figura 10.11. Sin embargo, experiencias dolorosas nos han enseñado que a menudo estas formas estratégicas son difíciles y complicadas de calcular, y no siempre muy esclarecedoras una vez obtenidas. ¿Qué podemos hacer para no tener que usarlas?

¿Equilibrios de Nash con estrategias puras? Parece razonable empezar buscando equilibrios de Nash con estrategias puras. Si la jugadora II usa

[10] La decisión en su conjunto de información de la izquierda, duro, se escribe como el primer componente de cada par. Para las estrategias puras del jugador II, se escribe primero la decisión en su conjunto de información superior, quiche.

(*intimidar, intimidar*), la respuesta óptima del jugador I es (*cerveza, quiche*), porque si le van a intimidar en cualquier caso, no tiene sentido consumir algo aborrecible. Pero la respuesta óptima de la jugadora II a (*cerveza, quiche*) no es (*intimidar, intimidar*), sino (*intimidar, ceder*). Si el jugador I simplemente consume lo que le gusta, descubre su identidad y la jugadora II puede entonces explotar esta información. La conclusión es que no hay equilibrios de Nash en los que la jugadora II use (*intimidar, intimidar*).

Supongamos que la jugadora II usa (*intimidar, ceder*). Entonces la respuesta óptima del jugador I es (*cerveza, cerveza*). Le conviene beber cerveza, aunque sea un blando, porque de esta forma evita que le intimiden. Pero la respuesta óptima de la jugadora II a (*cerveza, cerveza*) no es (*intimidar, ceder*), sino (*???, intimidar*). Es decir, lo que ella debería hacer si el jugador I come quiche no está determinado. Sin embargo, ella debería intimidarlo, si él bebe cerveza. Para ver por qué, es necesario considerar cuáles serán sus creencias después de ver cómo su oponente se bebe de un trago una cerveza. Si fuera correcto[11] que el jugador I use (*cerveza, cerveza*), entonces que éste beba cerveza no proporciona ninguna información a la jugadora II. Las probabilidades a priori de éste, por tanto, no varían. El cree que él es duro con probabilidad 1/3 y que es blando con probabilidad 2/3. Pero sus pagos son de tal forma que siempre intimida cuando es más probable que él sea un blando. Luego (*???, intimidar*) es una respuesta óptima a (*cerveza, cerveza*). La conclusión es que no hay equilibrios de Nash en los que la jugadora II use (*intimidar, ceder*).

De hecho, no hay ningún equilibrio de Nash con estrategias puras. Esto se puede confirmar fácilmente con razonamientos similares a los que acabamos de dar aplicados a los casos en los que la jugadora II usa (*ceder, intimidar*) y (*ceder, ceder*). Por tanto, hemos de buscar un equilibrio con estrategias mixtas. El teorema de Nash (Teorema 7.7.1) nos asegura que la búsqueda tendrá éxito. Sin embargo, las estrategias mixtas son cosas complicadas. En un juego de memoria perfecta, como la quiche, se pueden sustituir por estrategias de comportamiento.

Estrategias de comportamiento. Una estrategia de comportamiento para el jugador I debe especificar la probabilidad B con la que beberá cerveza en el conjunto de información DURO, y la probabilidad b con la que beberá cerveza en el conjunto de información BLANDO. Las probabilidades correspondientes para comer quiche son $Q = 1 - B$ y $q = 1 - b$. Una estrategia de comportamiento para el jugador II debe especificar la probabilidad d con la que ella cederá en el conjunto de información QUICHE, y la probabilidad D con la que cederá en el conjunto de información CERVEZA.

Si la estrategia de comportamiento de equilibrio del jugador I (B, b) está escrita en un libro de teoría de juegos, la jugadora II sabrá cuál es. El puede usar este conocimiento para *revisar* sus creencias sobre el temperamento del jugador I. Si el jugador I usa (B, b), la probabilidad de que el nodo e sea

[11] Es decir, si estuviera escrito en un libro de teoría de juegos que todos pueden leer.

alcanzado en la Figura 10.6(b) es $1/3Q$. La probabilidad de alcanzar el nodo f es $2/3q$. De aquí que, en el conjunto de información quiche, las probabilidades a posteriori de la jugadora II son

$$\text{prob}(\text{I es duro} \mid \text{I come quiche}) = \frac{\text{prob}(e)}{\text{prob}(e) + \text{prob}(f)} = \frac{1/3/Q}{1/3Q + 2/3q}$$

$$\text{prob}(\text{I es blando} \mid \text{I come quiche}) = \frac{(\text{prob}(f)}{\text{prob}(e) + \text{prob}(f)} = \frac{2/3q}{1/3Q + 2/3q}$$

Recordemos que ella cede si piensa que es más probable que I sea duro. Por tanto cede en QUICHE cuando $Q > 2q$. Pero intimida en QUICHE cuando $Q < 2q$. Ella es indiferente entre intimidar y ceder cuando $Q = 2q$.

El mismo análisis se aplica al conjunto de información CERVEZA de la jugadora II. El cede en CERVEZA cuando $B > 2b$, pero intimida en CERVEZA cuando $B < 2b$. Es indiferente entre intimidar y ceder cuando $B = 2b$.

Como vimos al discutir las estrategias puras, la jugadora II debe aleatorizar en el equilibrio. Aleatorizar entre un conjunto de opciones sólo puede ser óptimo si el jugador o jugadora es indiferente sobre las opciones. Así, o bien $Q = 2q$, o bien $B = 2b$ (o ambos).

Consideremos primero el caso $Q = 2q$. Entonces $1 - B = 2(1 - b)$, o sea $2b = 1 + B$. Luego, $2b > B$. Se sigue que la jugadora II intimidará en CERVEZA. Pero entonces el jugador I no tiene nada a ganar bebiendo cerveza en BLANDO, luego seguro que comerá quiche. Luego $q = 1$. Pero entonces $Q = 2q = 2$, lo que es imposible. Se sigue que no puede haber equilibrios de Nash con $Q = 2q$.

La única posibilidad que queda es $B = 2b$. Entonces $(1 - Q) = 2(1 - q)$, o sea $2q = 1 + Q$. Luego $2q > Q$. Se sigue que la jugadora II intimidará en QUICHE. Pero entonces el jugador I no ganará nada comiendo quiche en DURO, luego seguro que beberá cerveza. Luego $B = 1$ y $b = 1/2B = 1/2$. Ya que $b = 1/2$, el jugador I está aleatorizando entre *quiche* y *cerveza* en BLANDO. Puesto que él consigue un pago de 1 al comer quiche en BLANDO, también debe conseguir un pago de 1 por beber cerveza. Luego la jugadora II debe estar aleatorizando en CERVEZA. De hecho, podemos considerar cierto que $1 = 0(1 - D) + 2D$. Por tanto, $D = 1/2$, y la jugadora II intimida con probabilidad 1/2 y cede con probabilidad 1/2 en CERVEZA.

Conclusión. Este método de eliminar sistemáticamente los posibles equilibrios de Nash es una técnica muy poderosa. Se consideran las posibilidades una por una y se investiga que se deduciría si la posibilidad *fuera* un equilibrio de Nash. Si se obtiene una contradicción, la posibilidad *no* es un equilibrio de Nash. Aquí el método nos ha llevado a un único equilibrio de Nash.

En este equilibrio, el jugador I seguro que bebe cerveza en DURO. La jugadora II seguro que intimida en QUICHE. El jugador I vacila en BLANDO. Con probabilidad 1/2 come quiche en concordancia con su naturaleza blanda. Pero con probabilidad 1/2 bebe cerveza y espera que le tomen por un tipo duro. Esto hace que la jugadora II tenga que adivinar en CERVEZA. En el equilibrio, ella intimida con probabilidad 1/2 y cede con probabilidad 1/2.

En términos de estrategias mixtas, el jugador I usa $(0, 0, 1/2, 1/2)^T$ y la jugadora II usa $(1/2, 1/2, 0, 0)^T$. Es fácil comprobar que esto es efectivamente un equilibrio de Nash usando la forma estratégica de la Figura 10.11[12]. Es incluso más fácil comprobar que no hay equilibrios de Nash con estrategias puras.

10.6. Conocimiento común

Filo 10.9 ⟶

El capítulo empezó con una discusión de teoría del conocimiento. Continuó explorando las implicaciones de algunas ideas básicas para la teoría de juegos. Esto nos llevó bastante lejos de nuestro tema. Ahora ha llegado el momento de volver a la teoría del conocimiento, ya que para progresar en la teoría de juegos debemos encararnos con la idea de conocimiento *común*.

Como siempre, la historia de los viajeros con la cara sucia nos servirá para ilustrar los conceptos necesarios. La Sección 10.1 subrayó la importancia de que el anuncio del guarda convirtiera en conocimiento común que alguien tenía la cara sucia. En capítulos anteriores mencionamos ocasionalmente y de pasada que esto o aquello se suponía que era conocimiento común. ¿Qué es conocimiento común y por qué es importante?

El filósofo David Lewis definió que algo era conocimiento común si todo el mundo lo sabe, todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe, todo el mundo sabe que todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe; y así sucesivamente. Esta sección describe de qué forma el especialista en teoría de juegos Robert Aumann[13] dio forma operativa a esta idea.

10.6.1. Conocimiento mutuo

Personas distintas saben cosas distintas. De aquí que para la historia de los tres viajeros con la cara sucia necesitemos tres operadores de conocimiento, $\mathcal{K}_A$, $\mathcal{K}_B$ y $\mathcal{K}_N$.

[12] Después de construir la forma estratégica, se pueden eliminar las estrategias dominadas hasta que sólo queda un juego bimatricial 2 × 2. Su equilibrio de Nash con estrategias mixtas es fácil calcular.

[13] A pesar del sombrero de papel, el tío Bob de la Sección 10.1 no quiere ser una caricatura de este distinguido profesor.

Algo es *conocimiento mutuo* si todo el mundo lo sabe. Más concretamente, si los individuos relevantes son Alice, Bob y Nanny, entonces el operador «todos saben» se define por

$$(\text{todos saben})E = \mathcal{K}_A E \cap \mathcal{K}_B E \cap \mathcal{K}_N E.$$

Así pues, E es conocimiento mutuo cuando el verdadero estado del mundo es ω si y sólo si $\omega \in (\text{todos saben})E$.

Por ejemplo, antes de que el guarda hablara, era conocimiento mutuo que alguien en el vagón de ferrocarril tenía la cara sucia. Para ver esto, recordemos que $D_A = \{2, 5, 6, 8\}$ es el suceso que la cara de Alice está sucia. Análogamente, $D_B = \{3, 5, 7, 8\}$ y $D_N = \{4, 6, 7, 8\}$ son los sucesos que Bob y Nanny tienen las caras sucias. El suceso que alguien tiene una cara sucia es, por tanto, $D = D_A \cup D_B \cup D_N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Obsérvese que $\mathcal{K}_A D = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{K}_B D = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $\mathcal{K}_N D = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. De aquí,

$$(\text{todos saben})D = \mathcal{K}_A D \cap \mathcal{K}_B D \cap \mathcal{K}_N D = \{5\ 6, 7, 8\}$$

El verdadero estado del mundo es realmente $\omega = 8$. Así pues, D es conocimiento mutuo porque $8 \in (\text{todos saben})D$.

El operador $\mathcal{K} = (\text{todos saben})$ satisface las propiedades (K0), (K1) y (K2) de la Figura 10.2.1, pero no satisface (K3). Por ejemplo, en el estado 5 de la Figura 10.3, todos saben que alguien tiene la cara sucia, pero Bob piensa que el estado 2 es posible. En el estado 2, Alice piensa que el estado 1 es posible. Ya que todos tienen la cara limpia en el estado 1, es por tanto falso que todos saben que alguien tiene la cara sucia en el estado 5. Para hallar un operador que satisfaga (K3) hemos de trabajar un poco más.

10.6.2. Operador de conocimiento común

Puesto que el operador (todos saben) satisface (K2) de la Figura 10.2.1, se sigue que

$$\begin{aligned} E &\supseteq (\text{todos saben})E \\ &\supseteq (\text{todos saben})^2 E \\ &\supseteq (\text{todos saben})^3 E \\ &\ \ \vdots \\ &\supseteq (\text{todos saben})^N E \\ &= (\text{todos saben})^{N+1} E \\ &= (\text{todos saben})^{N+2} E \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

¿Por qué las inclusiones se hacen identidades en el paso N-ésimo? La razón es simple. Si el conjunto finito Ω contiene sólo N elementos, en el paso N o antes se nos acabarán las cosas que podemos descartar para hacer de (todos saben)$^n E$ un conjunto estrictamente más pequeño.

El operador de conocimiento común[14] se define por

$$(\text{todos saben})^{\infty} E = (\text{todos saben})^{N} E.$$

El criterio de Lewis para que algo sea conocimiento común se puede expresar fácilmente. Un suceso E es conocimiento común cuando el verdadero estado es ω si y sólo si

$$\omega \in (\text{todos saben})^{\infty} E.$$

No es difícil comprobar que el operador $\mathcal{K} =$ (todos saben)$^{\infty}$ satisface (K3) de la Figura 10.2.1, así como (K0) – (K2). Es más complicado demostrar que también satisface (K4), pero también esto es cierto. Así pues, el operador de conocimiento común tiene las mismas propiedades que el operador de conocimiento de un individuo.

10.6.3. Truismos comunes

Vimos en la Sección 10.2.2 que era un truismo para Alice que alguien tiene la cara sucia, siempre que podamos confiar en que el guarda lo anunciara si y sólo si es cierto. Sin embargo, el suceso que alguien tiene la cara sucia es un truismo no sólo para Alice: es un truismo para todos. Esto hace de él un *truismo común*[15]. Más exactamente, la condición para que un suceso T sea un truismo común es que

$$(\text{todos saben})T \supseteq T. \tag{10.1}$$

Lema 10.6.1. Un suceso es un truismo común si y sólo si

$$(\text{todos saben})^{\infty} T \supseteq T. \tag{10.2}$$

Demostración. Si (10.1) se cumple, entonces se obtiene (10.2) porque el operador (todos saben) satisface (K2). Si (10.2) se cumple, entonces

$$T \supseteq (\text{todos saben})T \supseteq (\text{todos saben})^{\infty} T \supseteq T,$$

y, por tanto, $T =$ (todos saben)T. □

[14] Si Ω es un conjunto infinito, (todos saben)$^{\infty}E$ se puede definir como la intersección de todos los conjuntos (todos saben)$^n E$.

[15] La idea fue introducida por Milgrom, quien la llamó apropiadamente un *suceso público*. Desgraciadamente, no parece que esta terminología se pueda adaptar para preservar la analogía entre truismos y truismos comunes.

El operador de conocimiento común (todos saben)$^{\infty}$ tiene todas las propiedades (K0) – (K4) de un operador de conocimiento ordinario. El Lema 10.6.1 demuestra que un truismo común no es más que un truismo ordinario en el que el operador de conocimiento común ha sustituido al operador de conocimiento ordinario. Por tanto, podemos volver a las Secciones 10.2 y 10.3 y reformular sus resultados sobre el conocimiento de los individuos como resultados sobre el conocimiento común de conjuntos de individuos.

Proposición 10.6.1. Es conocimiento común que E ha ocurrido si y sólo si ha ocurrido un truismo común que implica E.

Demostración. Copiar la demostración del Teorema 10.2.1. □

La justificación del razonamiento de Alice. Finalmente es posible terminar el razonamiento de la Sección 10.1. El razonamiento de Alice depende de tres cosas. Necesita saber que allí hay un viajero con la cara sucia. Necesita saber que Bob lo sabe. Y necesita saber que Nanny sabe que Bob lo sabe. De hecho mucho más que esto es cierto. Ya hemos visto que la presencia de un viajero con la cara sucia es un truismo común a causa del guarda hablador. Por tanto se sigue de la Proposición 10.6.1 que la presencia de un viajero con la cara sucia es *conocimiento común* en el estado $\omega = 8$.

10.6.4. Conjuntos de posibilidades comunales

Recordemos que el operador de posibilidad $\mathcal{P}$ para individuos se define por $\mathcal{P}E = \sim\mathcal{K}\sim E$. Esto dice que algo es posible si no se sabe que no ha ocurrido. El operador de posibilidad M para comunidades se define por

$$\mathcal{M}E = \sim(\text{todos saben})^{\infty}\sim E$$

Proposición 10.6.2. El menor truismo común que contiene a ω es $\mathcal{M}\{\omega\}$.

Demostración. Copiar la demostración del Teorema 10.3.1. □

La notación $M(\omega)$ se usará para «el conjunto de estados que la comunidad en su conjunto no puede rechazar como irrelevantes para sus intereses». El conjunto $M(\omega)$ se llamará un conjunto de posibilidades comunales. Como en la Sección 10.3.1, $M(\omega)$ se puede identificar con el menor truismo común que contiene a ω, y por tanto $M(\omega) = \mathcal{M}\{\omega\}$.

La noción de posibilidad comunal es muy amplia. De la misma forma que es difícil que algo sea conocimiento común, es fácil que algo sea posible comunalmente. Por ejemplo, para que algo sea comunalmente posible es suficiente que Alice piense que es posible. Pero también es suficiente que Bob piense que es posible que Alice piense que es posible; o que Nanny

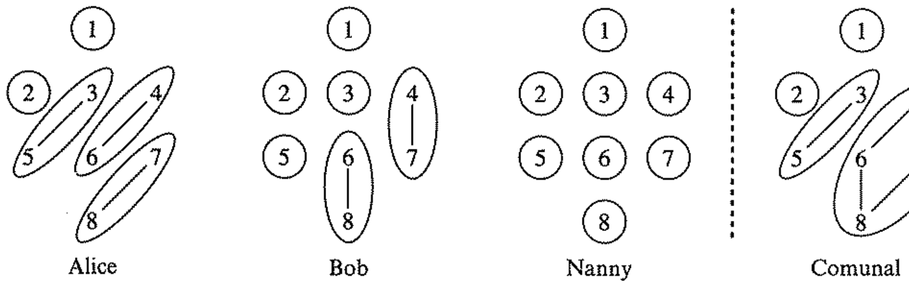


Figura 10.12. Conjuntos de posibilidades comunales.

piense que es posible que Bob piense que es posible que Alice piense que es posible. Y así sucesivamente.

La manera más fácil de seguir estas cadenas de posibilidades es con un diagrama. La Figura 10.12 muestra cómo hacerlo. Las particiones de posibilidades para Alice, Bob y Nanny son las de la tercera fila de la Figura 10.5(a). Los conjuntos de posibilidades comunales aparecen en la cuarta columna. Para hallar estos conjuntos, unir dos estados con una línea si pertenecen a un mismo conjunto de posibilidades por lo menos para un individuo. Por ejemplo, 4 y 7 quedan unidos porque ambos estan en uno de los conjuntos de posibilidades de Bob. Una vez trazadas todas estas uniones, dos estados pertenecen al mismo conjunto de posibilidades comunales si y sólo si están conectados por una cadena de uniones. Por ejemplo, 4 y 8 pertenecen al mismo conjunto de posibilidades comunales porque 4 está unido a 7 y 7 a 8.

La ventaja de pensar en conjuntos de posibilidades comunales es que éstos facilitan decir lo que es, o no es, conocimiento común. Todo lo que uno necesita saber para ello aparece en la siguiente proposición.

Proposición 10.6.3. Es conocimiento común que E ha ocurrido en el estado ω si y sólo si $E \supseteq M(\omega)$.

Demostración. Copiar la demostración del Teorema 10.3.2. □

Disponiendo de la Proposición 10.6.3, podemos volver a la historia de los viajeros con la cara sucia para seguir la evolución de lo que es conocimiento común a medida que pasa el tiempo. La cuarta columna de las Figuras 10.3, 10.4 y 10.5(a) muestra de qué forma cambian los conjuntos de posibilidades comunales a medida que la información se difunde por la comunidad. El suceso que hay una cara sucia es $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Esto se hace conocimiento común en la Figura 10.4 porque $D \supseteq M(8)$. El suceso que Nanny tiene la cara sucia es $D_N = \{4, 6, 7, 8\}$. Esto se hace conocimiento común en la tercera fila de la Figura 10.5(a). Sólo entonces es cierto que $D_N \supseteq M(8)$.

10.6.5. Encuentro

Mates 10.7 ⟶

La partición de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\}$ que aparece en la cuarta columna de la Figura 10.12 es el *encuentro*[16] de las particiones de posibilidades de Alice, Bob y Nanny. En general, el encuentro de una colección de particiones es la más fina de las particiones que son menos finas que las de la colección. El encuentro es la partición más fina que es simultáneamente menos fina que cada una de las particiones de la colección.

10.7. ¿Acuerdos sobre el desacuerdo?

En el Ejercicio 2.6.5, John cree que el demócrata ganará la elección con probabilidad 5/8. Mary cree que el demócrata ganará con probabilidad 1/4. Sus creencias no son secretas porque cada uno está dispuesto a aceptar apuestas basadas en ellas. Pero no creen las mismas cosas. Llegan a un «acuerdo sobre el desacuerdo» acerca de los posibles resultados del candidato demócrata.

La situación es algo paradójica. El Ejercicio 2.6.5 subraya el hecho que un tercero puede ganar dinero con seguridad apostando contra John y Mary de forma apropiada. Pero esto no es nada excepcional. Los corredores de apuestas se ganan la vida precisamente de esta forma.

Consideremos ahora el problema de dividir un dólar propuesto a John y Mary en la Sección 5.6. ¿Por qué no se ponen de acuerdo en que John debe quedarse el dólar entero si el demócrata gana, y que debe quedárselo Mary en caso contrario? Un acuerdo así da una ganancia esperada de 5/8 de dólar para John y de 3/4 de dólar para Mary. Ya que la suma de sus esperanzas supera el dólar a dividir, el acuerdo tiene el carácter de una máquina de movimiento perpetuo. De alguna forma, algo se crea de la nada. Su acuerdo sobre el desacuerdo viola el precepto económico fundamental de que no se puede comer gratis.

¿Es que las personas racionales pueden llegar a auténticos acuerdos sobre el desacuerdo? La historia siguiente nos ayudará a formular una respuesta.

10.7.1. Caza-criminales

Uno de los tres, Alice, Bob y Nanny, ha cometido un delito. Las únicas pistas son el estado de sus caras en el vagón del ferrocarril. John y Mary son contratados para resolver el misterio. La magnitud de sus honorarios limita el tiempo que pueden dedicar al caso. Por tanto, se ponen de acuerdo en

[16] A veces, la palabra *join* sustituye a *meet* [que hemos traducido por *encuentro* (*N. del T.*)]. Pero esto implica una ordenación bastante perversa del retículo de las particiones.

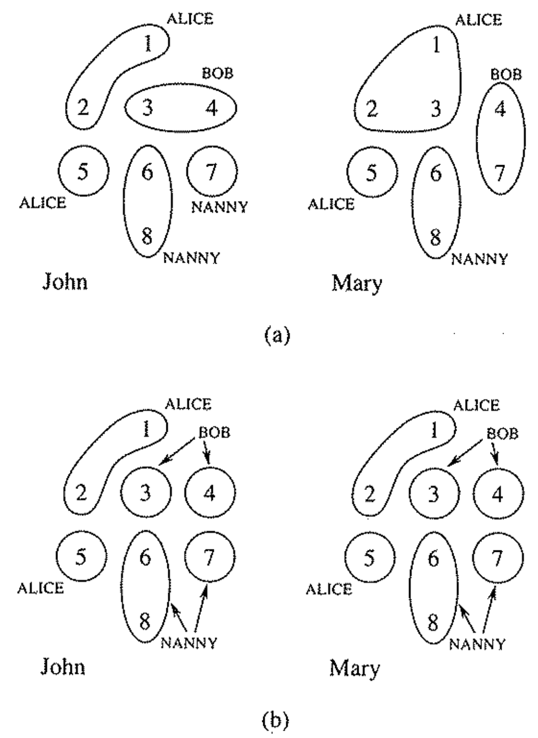


Figura 10.13. ¿Quién es el culpable?

que John seguirá una de las dos posibles líneas de investigación y Mary seguirá la otra. Al final de la investigación, cada investigador habrá reducido el espacio de estados $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a uno entre varios conjuntos de posibilidades. Sin embargo, puesto que ambos habrán recibido informaciones distintas en el curso de sus investigaciones separadas, la partición de posibilidades de John no será la misma que la de Mary. Puede darse el caso, por ejemplo, que al terminar sus pesquisas las particiones de posibilidades de John y de Mary sean como las de la Figura 10.13(a).

Obsérvese que cada conjunto de posibilidades $P(\omega)$ de la Figura 10.13 está marcado con el nombre de uno de los sospechosos. Esta es la persona a quien el investigador acusará si el verdadero estado es ω. Así, si el verdadero estado es $\omega = 8$, John acusará a Nanny porque $P_J(\omega) = \{6, 8\}$.

Es importante para la historia que John y Mary *razonen* de la misma forma. Tal vez fueron a la misma escuela de detectives (o leyeron el mismo libro de teoría de juegos). Damos por supuesto, por tanto, que si John y Mary llegan al mismo conjunto de posibilidades, ambos acusarán a la misma persona. Por ejemplo, $P_J(\omega) = P_M(\omega) = \{6, 8\}$ cuando $\omega = 8$. Luego tanto John como Mary acusarán a Nanny si $\omega = 8$.

Supongamos ahora que John y Mary discuten el caso *después* de que ambos han terminado sus pesquisas pero *antes* de hacer un informe con sus conclusiones. Cada uno simplemente le dice al otro a quien piensa acusar en base a la evidencia recogida hasta ese momento. ¿Pueden llegar a un acuerdo sobre el desacuerdo? Por ejemplo, si el verdadero estado es $\omega = 3$, ¿continuará John acusando a Bob mientras el dedo de Mary señala a Alice?

En las circunstancias de la Figura 10.13(a), la respuesta es *no*. Supongamos que el verdadero estado es $\omega = 3$, y que John y Mary simultáneamente nombran al sospechoso al que piensan acusar si no disponen de nueva información. Así, John nombra a Bob y Mary a Alice. El nombrar a los sospechosos es muy informativo para John y Mary, que usarán esta nueva información para hacer más finas sus particiones de posibilidades. Las nuevas particiones aparecen en la Figura 10.13(b). Estas particiones son la *misma* para John y para Mary. Luego los investigadores acusarán ahora a la misma persona. En la Figura 10.13(b), la persona acusada es Bob.

Lo importante aquí es que John, por ejemplo, sería estúpido si no reaccionara a la conclusión de Mary. Ella razona exactamente como razonaría él si éste dispusiera de la información de que dispone ella. Luego, cuando ella comunica sus conclusiones, éstas constituyen para John una evidencia tan fiable como la que él mismo ha reunido.

10.7.2. Llegar al consenso

La historia anterior hace ver por qué John y Mary podrían llegar a alcanzar el consenso sobre quien debe ser acusado. Robert Aumann explicó las circuntancias en las que este resultado se daría en el caso general. La versión que aquí ofrecemos de su idea se debe a Michael Bacharach. Lo que resulta ser importante es que las conclusiones de John y Mary sean *conocimiento común*. Otras condiciones aparecen a lo largo del análisis.

Supongamos que John y Mary han terminado sus investigaciones. Además, se han reunido y es conocimiento común entre ellos a quien tienen pensado acusar. ¿Puede cada uno de ellos, ahora, señalar con el dedo a una persona distinta?

Imaginemos que la partición final de posibilidades de John para Ω es ALICE, BOB_1, BOB_2, BOB_3, NANNY. Aquí, por ejemplo, BOB_2 representa un conjunto de posibilidades en el que John acusará a Bob. Supongamos que, cuando el verdadero estado es ω, John terminará por acusar a Bob. Entonces, según la Proposición 10.6.3,

$$\text{BOB}_1 \cup \text{BOB}_2 \cup \text{BOB}_3 \supseteq M(\omega).$$

Pero la partición M es menos fina que la partición de posibilidades de John. Por ejemplo, o bien $M(\omega) \supseteq \text{BOB}_2$ o bien $\sim M(\omega) \supseteq \text{BOB}_2$. Relaciones de inclusión semejantes se cumplen para los demás conjuntos de posibilidades de John. Se sigue que $M(\omega)$ debe ser la unión de algunos de los conjuntos de posibilidades en los que John acusa a Bob. Puede ser, por ejemplo,

$$M(\omega) = \text{BOB}_2 \cup \text{BOB}_3. \tag{10.3}$$

Para continuar, precisamos una hipótesis sobre la racionalidad de John[17]. En la escuela de detectives donde estudió, le enseñaron a decidir quién debía ser acusado en cualquier posible circunstancia. Si sus pesquisas le hacen concluir que el conjunto de posibles estados del mundo es E, lo que le enseñaron le permitirá saber a quien hay que acusar. Designemos a esta persona por $d(E)$. Por ejemplo, cuando $E = \text{ALICE}$, la persona a quien John acusará es $d(E) = $ Alice.

Sean E y F sucesos disjuntos. Esto significa que no pueden ocurrir simultáneamente. La regla de decisión de John ha de cumplir la siguiente propiedad. Si $d(E) = d(F)$, entonces $d(E \cup F) = d(E) = d(F)$. Si la regla de decisión de John viola esta condición, se podría llegar a encontrar en el juicio oral contestando al abogado defensor como sigue:

¿Acusa usted a mi cliente Bob? —*Sí.*
¿Cuándo le acusó, qué sabía usted sobre el estado de la cara de Alice? —*Nada.*
¿A quién habría acusado, si hubiera sabido que la cara de Alice estaba sucia? —*A Nanny.*
¿A quién habría acusado, si hubiera sabido que la cara de Alice estaba limpia? —*A Nanny.*
¿No está usted usando una regla de decisión irracional? —*Creo que sí.*

Volviendo a (10.3), podemos usar la condición de racionalidad que acabamos de discutir para concluir que

$$d(M(\omega)) = \text{Bob} \tag{10.4}$$

cuando es conocimiento común que John acusará a Bob.

Una segunda hipótesis es necesaria. Esta es que John y Mary razonan de la misma forma. Para ser más exactos, la condición es que ambos usen la *misma* regla de decisión. Así, si fuera conocimiento común que Mary acusará a Alice, entonces el mismo razonamiento que condujo a (10.4) dará

$$d(M(\omega)) = \text{Alice}. \tag{10.5}$$

Pero (10.4) y (10.5) no pueden ser ambos verdad, porque Alice no es la misma persona que Bob. Luego el razonamiento demuestra que si es conocimiento común a quien piensan acusar John y Mary, deben pensar en

[17] La hipótesis está íntimamente relacionada con el principio de lo seguro de Savage, mencionado en la Sección 3.6.2. No es sorprendente, por tanto, que personas bayesiano-racionales tomen necesariamente sus decisiones de acuerdo con él.

acusar a una misma persona. No pueden llegar a un acuerdo sobre el desacuerdo.

10.7.3. No hay comidas gratis

Según la doctrina de Harsanyi[18], las personas racionales han de tener necesariamente creencias comunes a priori. Es decir, la medida de probabilidad a priori de cada persona sobre el conjunto Ω es la misma. El argumento que se ofrece para sustentar esta afirmación es que los seres humanos racionales, como John y Mary en la sección anterior, necesariamente procesan datos de la misma forma. Si tienen creencias distintas, ha de ser porque tienen datos distintos. Sin embargo, *antes* de que pase nada, dos personas no pueden tener datos distintos. Así, según este razonamiento, sus creencias *a priori* deben ser las mismas. Por supuesto, no se sigue de aquí que, *después* de que uno o ambos han recibido información privada, sus creencias *a posteriori* serán necesariamente las mismas. Por ejemplo, las probabilidades a priori de John y Mary para la elección del demócrata podrían ser 1/2. Sin embargo, si a Mary le dicen en secreto que el demócrata está envuelto en un escándalo que mañana saldrá en primera página, su probabilidad *a posteriori* puede descender a 1/4. John puede haber oído algo escandaloso sobre el republicano y revisar hacia arriba su probabilidad a 5/8.

Si esta justificación de la doctrina de Harsanyi parece plausible, entonces también debería parecer plausible que fuera conocimiento común que todos tienen un común a priori. Después de todo, ya que la doctrina de Harsany se defiende con argumentos racionales, no puede ser correcta sin que la gente racional sepa que es correcta. Por tanto, debe ser un truismo común.

Las personas bayesiano-racionales obtienen sus probabilidades a posteriori revisando sus posibilidades a priori como se ha explicado en la Sección 10.5. Si es conocimiento común que todos son bayesiano-racionales y que se cumple la doctrina de Harsanyi, entonces se sigue que es conocimiento común que todos usan la *misma* regla de decisión para asignar probabilidades a sucesos. Por las razones dadas en la Sección 10.7.2, los jugadores no pueden en este caso llegar a un acuerdo sobre el desacuerdo sobre estas probabilidades (Ejercicio 10.9.29). Así, no puede llegar a ser *conocimiento común* que para John la probabilidad a posteriori de que el demócrata sea elegido es 5/8, mientras que para Mary es 1/4 sin que ninguno de ellos cambie sus creencias.

Por tanto, no hay comidas gratis para John y Mary. El simple hecho de que John esté dispuesto a apostar en términos que le serían desfavorables si las creencias de Mary fueran ciertas, habría de conducir a Mary a revisar

[18] Aunque Robert Aumann le colgó esta etiqueta, John Harsanyi no es en absoluto doctrinario.

sus creencias. Y análogamente para John cuando éste conoce los términos en los que Mary está dispuesta a apostar[19].

¿Debemos aceptar la doctrina de Harsanyi? Los lectores atentos habrán notado que el argumento ofrecido en su defensa abandona la hipótesis de Savage del mundo pequeño. El conjunto Ω sobre el que se definen las probabilidades a priori de los jugadores ni siquiera se especifica en términos precisos. A mi entender, este es un defecto decisivo. Prefiero defender la doctrina de Harsanyi como una hipótesis de trabajo a tomarla por un principio filosófico. De la misma forma que personas con preferencias intransitivas pueden ser explotadas por medio de la «bomba de dinero» descrita en la Sección 3.1.1, de la misma forma se puede explotar a grupos de personas que creen en comidas gratis comunales.

Como se ha observado al principio de la Sección 10.7, el Ejercicio 2.6.5 proporciona un ejemplo de cómo un extraño puede hacer un libro holandés (Sección 3.6.2) contra un grupo que llega a un acuerdo sobre el desacuerdo, y por tanto garantizar que sacará dinero del grupo pase lo que pase. Lo que el extraño ha de hacer es muy simple. En el ejemplo, John y Mary son neutrales al riesgo. John cree que el demócrata será elegido con probabilidad 5/8. Mary cree que el demócrata será elegido con probabilidad 1/4. El extraño propone una apuesta a John en la que John gana 3 dólares si el demócrata gana, pero paga 5 dólares al extraño si el republicano gana. En la evaluación de John, esta apuesta tiene una esperanza de cero y él estará dispuesto a aceptarla aunque el premio para él sólo fuera un penique. Simultáneamente, el extraño propone una apuesta a Mary en la que ella gana 2 dólares si el republicano gana, pero paga al extraño 6 dólares si gana el demócrata. Como en el caso de John, Mary aceptará la apuesta sin problemas. El extraño tiene asegurados unos ingresos de 3 dólares independientemente de quien gane la elección.

Este razonamiento no demuestra que un individuo cualquiera de un grupo que repetidamente llega a acuerdos sobre el desacuerdo necesariamente sufrirá cuando el grupo es explotado por un extraño. Sólo demuestra que el grupo en su conjunto no puede sobrevivir como una entidad económica si sus miembros tienen modelos del mundo inconsistentes que les llevan repetidamente a estimar probabilidades de forma distinta. Al asumir la doctrina de Harsanyi, los especialistas en teoría de juegos eliminan estos grupos explotables. Una teoría que no hiciera esto se podría aplicar más ampliamente, pero las cosas son suficientemente difíciles de por sí, incluso *aceptando* la doctrina de Harsanyi.

[19] Los economistas prefieren la versión de este resultado formulada por Paul Milgrom y Nancy Stokey. Es conocimiento común que dos agentes económicos aversos al riesgo tienen una probabilidad a priori común. Antes de recibir ninguna información, negocian un contrato de intercambio Pareto-eficiente. Los intercambios especificados incluirán activos cuyos valores dependen del resultado de sucesos sobre los cuales los agentes no están actualmente informados. Cada uno de ellos recibe entonces información privada. ¿Es posible que quieran renegociar el contrato ahora? La respuesta es no. Como ocurre con John y Mary, el mero hecho de que la otra persona quiera negociar es evidencia de que negociar no es una buena idea.

10.8. Conocimiento común en teoría de juegos

El filósofo Hobbes dijo que un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón. Esta lista de propiedades proporciona una percha adecuada sobre la que colgar una discusión de qué debe ser conocimiento común en un juego.

Fortaleza física. Esta determina lo que alguien puede o no puede hacer. Un atleta puede planear correr una milla en cuatro minutos, pero sería imposible para la mayoría ejecutar este plan. La teoría de juegos incorpora estas consideraciones en las *reglas del juego*. Estas determinan lo que es factible para un jugador. Más exactamente, un jugador queda limitado a escoger en el conjunto de sus estrategias en el juego. Esta sección tratará principalmente de por qué es importante que las reglas del juego sean *conocimiento común* entre los jugadores.

Pasión y experiencia. Estas corresponden a las preferencias y creencias de un jugador. En la mayoría de los casos, ambas deben ser conocimiento común para que sea posible realizar un análisis en términos de la teoría de juegos.

Razón. En problemas de decisión unipersonales, los economistas simplemente suponen que los jugadores maximizan sus pagos esperados dadas sus creencias. En un juego las cosas son más complicadas, porque la idea de equilibrio da por supuesto que los jugadores saben algo acerca de como razona todo el mundo. De este tema hablaremos muy poco porque exactamente quién ha de saber, cuánto es necesario saber y acerca de qué es necesario saberlo, continúa siendo un tema controvertido por ahora.

10.8.1. Conocimiento común de las reglas

¿Por qué las reglas del juego han de ser conocimiento común entre los jugadores? Usaremos el dilema del prisionero finitamente repetido de la Sección 8.3 para clarificar este punto. En el Ejercicio 8.6.6 vimos que todos los equilibrios de Nash en el dilema del prisionero repetido n veces daban que siempre se jugaba *halcón*[20]. Como en muchos resultados de la teoría de juegos, no es inmediatamente evidente que esta conclusión dependa de que el

[20] En la trayectoria de equilibrio. El Teorema 8.3.1 dice que, cuando se usa un equilibrio subjuego-perfecto, los jugadores siempre planean usar *halcón* dentro y fuera de la trayectoria de equilibrio.

valor de n debe ser *conocimiento común*. Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, si el valor de n no es conocimiento común existen equilibrios de Nash en los que los jugadores usan *paloma*, excepto posiblemente en la última etapa del juego.

Bendita ignorancia. A veces se afirma que las personas racionales no pueden dejar de aprovecharse del hecho de estar mejor informados. Esto es cierto en los problemas de decisión unipersonales. Sin embargo, grupos de personas pueden empeorar su situación si determinada información se hace conocimiento común. Como un ejemplo, consideremos el dilema del prisionero de la Figura 7.3(b) repetido diez veces. Ya que las reglas de un juego se supone que son conocimiento común, entonces será conocimiento común que la décima etapa será la última. En consecuencia, en un equilibrio de Nash, ambos jugadores jugarán *halcón* y cada uno conseguirá un pago de sólo 10, que es bajo.

Pero supongamos que no fuera conocimiento común que la décima etapa es la última. Para poder usar los instrumentos de la teoría de juegos, es becesario decir qué es lo que sería conocimiento común ahora. Consideremos, por tanto, la historia siguiente. Todos los detalles de la historia son conocimiento común entre los jugadores.

El jugador I sabe que está jugando una versión del dilema del prisionero repetido con $2m - 1$ ó $2m$ etapas. La jugadora II sabe que está jugando una versión del dilema del prisionero repetido con $2n$ o $2n + 1$ etapas[21]. En realidad, el juego tiene 10 etapas. Así el conjunto de posibilidades del jugador I es $\{9, 10\}$ y el de la jugadora II es $\{10, 11\}$. Pero el jugador I piensa que es posible que el conjunto de posibilidades de la jugadora II sea $\{8, 9\}$, y la jugadora II piensa que es posible que el conjunto de posibilidades del jugador I sea $\{11, 12\}$. Además, el jugador I piensa que es posible que la jugadora II piense que es posible que el conjunto de posibilidades del jugador I sea $\{7, 8\}$. Y así sucesivamente. La Figura 10.14 muestra algunos de los conjuntos de posibilidades que es necesario tomar en consideración.

No basta con tomar en consideración lo que los jugadores harán dada su información actual. Por ejemplo, al intentar predecir qué hará la jugadora II, el jugador I no sólo debe considerar el caso en que el conjunto de posibilidades de la jugadora II es $\{10, 11\}$. También debe considerar qué *haría* la jugadora II si su conjunto de posibilidades fuera $\{8, 9\}$. Esto de-

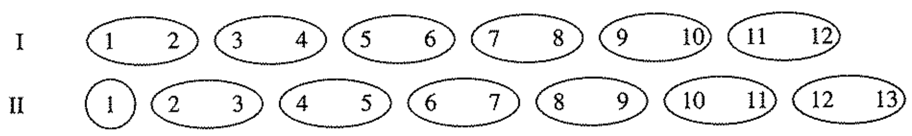


Figura 10.14. ¿Por cuánto tiempo continuará esto?

[21] Exceptuando $n = 1$. En este caso, el conjunto de posibilidades de la jugadora II es solo $\{1\}$.

pende en parte en lo que ella crea que él haría si su conjunto de posibilidades fuera $\{7, 8\}$. Y así sucesivamente. Por tanto, tenemos que decir lo que los jugadores *harían en cada uno* de sus conjuntos de posibilidades. Ya que los jugadores son racionales, las decisiones que tomarían en cada conjunto de posibilidades serían, por supuesto, óptimas, dadas las creencias que ellos tuvieran en aquel momento.

Esto nos plantea la cuestión de qué hay que suponer acerca de las creencias de los jugadores. Para que las cosas sean lo más simple posible, supongamos que un jugador siempre cree que cada una de las dos informaciones que el oponente puede tener es igualmente probable[22]. Así, por ejemplo, cuando el conjunto de posibilidades del jugador I es $\{9, 10\}$, él piensa que el conjunto de posibilidades de la jugadora II es $\{8, 9\}$ con probabilidad 1/2, y $\{10, 11\}$ con probabilidad 1/2.

Ha llegado el momento de decir qué estrategias han de usar los jugadores. Estudiaremos el caso en que cada jugador usa un estrategia «implacable-disparador». Con esta estrategia, un jugador usa *paloma* hasta que ocurre una de las dos cosas siguientes. Una es que el oponente juegue *halcón* en alguna ocasión. Un oponente así es castigado con la respuesta implacable de siempre jugar *halcón* a continuación. La segunda posibilidad es que se alcance en el juego una etapa «disparador». Entonces se juega *halcón* a partir de esa etapa, independientemente de que el oponente haya sido cooperativo hasta ese momento. En este ejemplo, la etapa disparador es la etapa que el jugador sabe, al alcanzarla, que es la última del juego. Por ejemplo, cuando el conjunto de posibilidades del jugador I es $\{10, 11\}$, su etapa disparador será 11. Llegar a esta etapa dispara la estrategia *halcón* con independencia de lo que haya podido ocurrir previamente.

Si se puede confiar en que los jugadores siempre usarán una estrategia implacable-disparador, sea cual sea su información, entonces el resultado es un equilibrio[23]. Ningún jugador tendría jamás un incentivo para desviarse.

Consideremos, por ejemplo, un jugador I cuyo conjunto de posibilidades es $\{6, 7\}$. Si su oponente tiene el conjunto de posibilidades $\{5, 6\}$, entonces la longitud del juego real debe ser 6. Si ambos usan la estrategia implacable-disparador, entonces el flujo de rentas del jugador I es 3, 3, 3, 3, 3, 0. Si el oponente tiene el conjunto de posibilidades $\{7, 8\}$, entonces la longitud real del juego es 7 y el flujo de rentas del jugador I es 3, 3, 3, 3, 3, 3, 6. Luego el jugador I consigue $1/2\,(15 + 24) = 39/2$ manteniéndose fiel a la estrategia implacable-disparador.

¿Qué puede obtener si se desvía? Como le va mejor es al vencer a un oponente cuyo conjunto de posibilidades es $\{5, 6\}$. Esto es, si se va a desviar, debe planear jugar *halcón* en la etapa 5 y siguientes. Esto genera los dos

[22] Exceptuando de nuevo el caso en que el conjunto de posibilidades de la jugadora II es $\{1\}$. Este tiene la seguridad de que en este caso el conjunto de posibilidades del jugador I es $\{1, 2\}$. Un segundo problema se les planteará a quienes recuerden el Ejercicio 3.7.18(e). Volveremos sobre este punto en la Sección 11.9.1.

[23] Volveremos sobre este punto en la Sección 11.9.

flujos de rentas 3, 3, 3, 3, 6, 1 y 3, 3, 3, 3, 6, 1, 1. Luego lo más que puede conseguir desviándose es 1/2 (19 + 20) = 39/2.

El mismo argumento demuestra que ningún jugador tiene nunca incentivos para desviarse de la estrategia implacable-disparador. Pero si implacable-disparador se juega cuando el dilema del prisionero es realmente repetido diez veces, entonces los jugadores cooperarán hasta la novena etapa. Sólo en la décima etapa la jugadora II romperá la armonía jugando *halcón*. Entonces el jugador I obtendrá un pago total de 27 y la jugadora II obtendrá un pago total de 33. Esto mejora considerablemente el pago de 10 que cada uno consigue cuando la longitud del juego es conocimiento común.

¿Estúpidos racionales? Por supuesto, ya que tenemos que considerar un número *infinito* de conjuntos de posibilidades, sólo estamos rizando el rizo de la Sección 8.3.2 por lo que se refiere a la cooperación racional en el dilema del prisionero. Obsérvese, sin embargo, que el juego considerado aquí *no* tiene un horizonte infinito. Es conocimiento común que el juego tiene un horizonte *finito*. Cuando el juego tiene realmente longitud 10, todos saben que la longitud es a lo sumo 11. Además, todos saben que todos saben que la longitud es a lo sumo 12. De hecho, se puede escribir «todos saben que» tantas veces como se quiera delante de la afirmación de que el juego tiene un horizonte finito, y el resultado será una afirmación verdadera. Es, por tanto, *falso* que la cooperación racional es imposible cuando es conocimiento común que el dilema del prisionero se ha de repetir un número finito de veces.

10.8.2. Conocimiento común de cómo razonan los jugadores

Filo 10.9 ⟶

La noción de equilibrio es fundamental para la teoría de juegos. Pero, ¿por qué anticipamos que los jugadores usarán estrategias de equilibrio?

Dos tipos de respuestas se han ofrecido hasta ahora. En primer lugar están las respuestas del tipo *eductivo*. Estas suponen que los jugadores llegan al equilibrio como resultado de razonar cuidadosamente. No se asustan ante frases que empiezan, «Si yo pienso que él piensa que yo pienso ...». Por el contrario, los jugadores proseguirían con razonamientos así hasta llegar al final, por difícil que fuera.

Sin embargo, la respuesta *eductiva* no es la única posible. También hay respuestas *evolutivas*. Según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores lo piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan un juego que se repite durante largos períodos de tiempo. Estos procesos de libración evolutiva fueron estudiados en el Capítulo 9. Allí no encontramos ninguna teoría elegante y ordenada. Las libraciones, económicas, sociales y biológicas, tienen su idiosincrasia y sobre ellas es difícil decir algo en general. Con todo, los ejemplos allí ofrecidos indican claramente que la noción de equilibrio es esencial para entender lo que ocurre.

Mi opinión personal es que las respuestas *eductivas* son menos importantes que las respuestas *evolutivas*. Esto no significa negar que los especialistas en teoría de juegos a veces han de responder cuestiones que necesitan ser contestadas eductivamente[24]. Sin embargo, la razón principal que hace a las respuestas eductivas interesantes es la esperanza de que nos ofrecerán una comprensión más profunda del producto final de procesos evolutivos relevantes. Tal vez el futuro demuestre que este optimismo es infundado, pero por el momento disponemos de un número de ejemplos positivos suficientemente elevado para que aparentemente la empresa valga la pena.

Una actitud así disminuye la importancia de una investigación hasta el final de los fundamentos eductivos de las ideas de equilibrio. De hecho, si un análisis eductivo se hace demasiado sofisticado, existe el peligro de generar conceptos que no son relevantes para nada en un contexto evolutivo. Con todo continúa teniendo su interés ver a dónde lleva el razonamiento eductivo. En esta sección describiremos dos aproximaciones al tema. La primera fue propuesta, independientemente, por dos economistas, Bernheim y Pearce. La segunda es fruto de Robert Aumann. La exposición es mucho más rápida aquí que en el resto del libro porque el material es motivo de controversia y por ello no tiene sentido que intentemos dar algo más que una visión rápida de las ideas en juego.

Racionalizabilidad. Recordemos de la Sección 3.6.2 de qué forma se comporta alguien bayesiano-racional cuando ha de tomar una decisión en situaciones donde el resultado de la decisión a tomar depende de sucesos inciertos para quien ha de tomarla. El o ella actúa como si dispusiera de una medida de probabilidad que asigna probabilidades subjetivas a los sucesos de los que no está seguro.

En un juego finito de dos jugadores, ningún jugador sabe con seguridad qué estrategia pura[25] terminará por utilizar el oponente. Un jugador bayesiano-racional, por tanto, asigna una probabilidad subjetiva a cada una de las alternativas posibles. Entonces el jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas. Por tanto, él o ella se comporta como si estuviera escogiendo una respuesta óptima a una de las estrategias mixtas del oponente[26].

¿Cómo conoce un jugador bayesiano-racional aquello contra lo cual quiere optimizar ¿De dónde provienen sus creencias subjetivas? La teoría de juegos da por supuesto que las creencias de un jugador sobre lo que un oponente hará dependen de lo que el jugador sabe acerca del oponente. Sin embargo, no está ni mucho menos claro lo que debemos suponer acerca de

---

[24] Por ejemplo, ¿cuál es la mejor manera de jugar al blackjack dada la estrategia de la banca del casino? O, ¿cuál es la manera óptima de programar un misil antibalístico?

[25] Incluso si el oponente mezcla, el resultado final será que se juega alguna estrategia pura.

[26] Si la estrategia mixta para la que se elige una respuesta óptima es $q = (1/3, 1/3, 1/3)^T$, no se sigue necesariamente que el jugador bayesiano-racional cree que el oponente usará la estrategia mixta q. Igualmente se puede interpretar como que el jugador bayesiano-racional tiene la seguridad de que el oponente usará una estrategia pura, pero no encuentra razón alguna para favorecer una estrategia pura por encima de la otra.

lo que los jugadores saben sobre sus oponentes. La idea de *racionalizabilidad* se construye sobre la hipótesis de que por lo menos debería ser conocimiento común que ambos jugadores son bayesiano-racionales.

Supongamos que el conjunto de estrategias mixtas de la jugadora II es M. Entonces, un jugador bayesiano-racional I necesariamente escogerá una estrategia de $\mathcal{B}M$, el conjunto de respuestas óptimas a las estrategias de M. Una jugadora bayesiana-racional II que sabe que el jugador I es bayesiano-racional escogerá, por tanto, una estrategia de $\mathcal{B}^2M = \mathcal{B}(\mathcal{B}M)$, el conjunto de respuestas óptimas a las estrategias de $\mathcal{B}M$. Un jugador bayesiano racional I que sabe que la jugadora II es bayesiana-racional y sabe que el jugador I es bayesiano-racional escogerá, por tanto, una estrategia de $\mathcal{B}^3M$. Y así sucesivamente, en un estilo que ahora ya debe resultar familiar.

El Ejercicio 6.10.22 puede ser usdado ahora para relacionar esta línea de razonamiento con algo que ya nos hemos encontrado antes. El ejercicio dice que una estrategia mixta es una respuesta óptima a una estrategia mixta elegida por el oponente si y sólo si no está fuertemente dominada. Se sigue que las únicas estrategias que pueden ser jugadas cuando es conocimiento común que los jugadores son bayesiano-racionales son simplemente las que sobreviven la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas descrita en la Sección 4.6.

Algunos juegos no tienen ninguna estrategia fuertemente dominada. En esos juegos, *todas* las estrategias son racionalizables. ¿Significa esto que debemos olvidarnos de los equilibrios en estos juegos y decirles simplemente a los jugadores que cualquier cosa vale?

Tendríamos que contestar *sí* a esta pregunta, si se diera realmente el caso que el único dato de conocimiento común disponible acerca de los jugadores es que ambos son bayesiano-racionales. Sin embargo, una teoría que sólo supusiera esto sería poco fértil. Las personas reales, incluso personas totalmente extrañas de diferentes países, tienen mucho más en común que lo que asume la racionalizabilidad. El mero hecho de ser humanos asegura que en cierta medida compartimos una cultura común.

La teoría de juegos ortodoxa intenta capturar esto, aunque sea crudamente, discutiendo qué es lo que hay que escribir en los libros de teoría de juegos. La hipótesis implícita es que lo que se escriba en los libros será conocimiento común entre los jugadores. Con más generalidad, la hipótesis implícita detrás de muchos razonamientos de la teoría de juegos es que la manera de comportarse en un juego —lo que se supone convencionalmente que hay que hacer— es de alguna forma conocimiento común entre los jugadores. Se puede entonces concentrar la atención en las *convenciones* comúnmente entendidas que no se auto-desestabilizan. Estas son las convenciones que seleccionan *equilibrios*. Por supuesto, como todas las idealizaciones, la hipótesis de que la convención que se usa es conocimiento común a veces resultará ser totalmente inadecuada. Pero nos encontraremos en pocas situaciones, especialmente en economía, en las que podamos decir sinceramente que no sabemos nada en absoluto acerca de lo que el oponente hará, excepto que será algo bayesiano-racional.

Equilibrio correlacionado. ¿Cómo podemos expresar el hecho de que los jugadores de un juego comparten una cultura común? Aumann sugiere que deberíamos asumir que es «conocimiento común» que los jugadores comparten el mismo universo del discurso. Sugiere, además, que los estados de este universo Ω se deben suponer *completos*. Esto significa que si usted alguna vez llega a saber que ω ha ocurrido con seguridad, entonces usted sabría absolutamente todo lo que concebiblemente pudiera ser relevante para usted a la hora de tomar una decisión. La descripción de un estado, por tanto, debe especificar cada detalle del «mundo posible» que representa. Esto incluye no sólo cómo se comportan los jugadores, sino también cuáles son sus estados mentales. Ya que los jugadores son bayesiano-racionales, sus estados mentales se pueden resumir en dos cosas: lo que saben y lo que creen.

No deberíamos sorprendernos de que estas hipótesis heroicas proporcionen conclusiones heroicas. Consideremos, en particular, lo que los jugadores saben y creen. Lo que Alice sabe en el estado ω viene determinado por su conjunto de posibilidades $P(\omega)$. Todo ello es parte de la especificación del estado ω. Así, es «conocimiento común» lo que Alice sabría y creería en cualquier estado ω. Se sigue que la *partición* de posibilidades de Alice P y su medida de probabilidad *a priori* prob : $\Omega \to [0, 1]$ siempre son «conocimiento común».

Consideremos ahora el juego del gallina dado en la Figura 7.17(a). Esta ha sido repetida como Figura 10.15(a). Recordemos que ésta era la versión del gallina usada para ilustrar la idea de equilibrio correlacionado en la Sección 7.6.2.

Ya que un estado ω especifica todo lo que debe ser especificado, especifica la estrategia que Alice y Bob usarán si juegan al gallina en el estado ω. Para simplificar, consideremos que sólo es posible usar estrategias *puras*. Supongamos que Alice usa la estrategia pura $a(\omega)$ cuando ella es la jugadora II y Bob usa la estrategia pura $b(\omega)$ cuando él es el jugador I. Se supone que ambos jugadores son bayesiano-racionales en todos los estados[27]. Esto implica que la estrategia $t = a(\omega)$ tiene que maximizar el valor esperado del pago de Alice $\pi_2(b(\omega), t)$, dado su conocimiento de que el verdadero estado del mundo pertenece a su conjunto de posibilidades $P(\omega)$.

La Figura 10.15(c) ofrece un dibujo esquemático del universo Ω. El conjunto C es el conjunto de estados en los que Alice usa *paloma*. Esto es, $C = \{\omega : a(\omega) = \textit{paloma}\}$. El conjunto D es el conjunto en el que ella usa *halcón*. Si Alice sabe siempre lo que está haciendo, entonces C y D serán truismos para ella. Por razones como las aducidas en la Sección 10.7.2, se sigue que C y D son ambos uniones de algunos de los conjuntos de

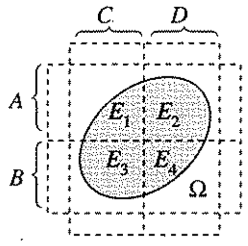
[27] Ya que su conducta queda determinada por el estado que ocurre, no se puede decir que los jugadores hallan *pensando* un camino que les conduce al equilibrio —o, mejor dicho, sus procesos de razonamiento no están modelizados explícitamente—. En palabras de Aumann, los jugadores ¡sólo hacen lo que hacen! Sin embargo, y prescindiendo de lo que puedan ser los procesos de razonamiento no modelizados, el resultado es una conducta bayesiano-racional.

	Paloma	*Halcón*
Paloma	2, 2	0, 3
Halcón	3, 0	−1, −1

(a)

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	0

(b)



(c)

Figura 10.15. Equilibrio correlacionado (otra vez).

posibilidades de Alice. De nuevo como en la Sección 10.7.2, esto implica que Alice escogería *paloma* incluso si sólo supiera que C ha ocurrido. Análogamente, ella escogería *halcón* si sólo supiera que D ha ocurrido. La situación de Bob es análoga.

La Figura 10.15 debe ser comparada a la Figura 7.17. El parecido se hace incluso más fuerte si identificamos e_1, e_2, e_3 y e_4, de la Figura 7.17(c), con los sucesos E_1, E_2, E_3 y E_4 de la Figura 10.15(c). Si Alice y Bob comparten la misma probabilidad a priori[28], con $\text{prob}(E_1) = \text{prob}(E_2) = \text{prob}(E_3) = 1/3$, y prob(E4) = 0, entonces la Figura 10.15 y la Figura 7.17 son esencialmente iguales. Por tanto, un kibitzer sería incapaz de distinguir la conducta de Alice y Bob de la de dos jugadores que usan el equilibrio correlacionado discutido en la Sección 7.6.2.

El planteamiento de Aumann hace que sea casi tautológico que los jugadores bayesiano-racionales han de usar un equilibrio correlacionado en un juego. ¿Dónde quedan entonces las otras nociones de equilibrio? En particular:

¿Qué pasa con el equilibrio de Nash? La idea del equilibrio de Nash encaja confortablemente dentro del sistema de Aumann porque se puede considerar como un caso especial de equilibrio correlacionado. Es un equilibrio correlacionado en el que los sucesos A y B son independientes de los sucesos C y D. Lo que esto significa es que Alice y Bob toman decisiones independientemente. O, para decir lo mismo de otra forma, ninguno puede aprender nada sobre la elección del otro examinando la elección que ellos mismos piensan hacer. Obviamente, esta es una hipótesis que a uno le gustaría hacer con mucha frecuencia.

[28] Nuestras hipótesis no implican que tienen que compartir la misma probabilidad a priori. Salvo si se adopta la doctrina de Harsanyi, nada impide que los jugadores tengan distintas probabilidades *a priori*, incluso cuando éstas a priori son «conocimiento común». El resultado sobre ¡llegar a acuerdos sobre el desacuerdo! de la Sección 10.7.3 demuestra que no puede ser conocimiento común que las personas tienen diferentes probabilidades *a posteriori*, si se acepta que ha de ser conocimiento común que sus probabilidades a priori son iguales.

¿Qué pasa con la racionalizabilidad? A esta idea también se le puede dar cabida en el sistema de Aumann. Al describir cómo Aumann ve que sus equilibrios correlacionados surgen dentro de su planteamiento general, las probabilidades a priori de los jugadores se tomaron iguales, como prescribe la doctrina de Harsanyi. Si no se invoca la doctrina de Harsanyi, entonces las probabilidades a priori de los jugadores pueden ser distintas. Entonces nos vemos conducidos a una generalización de la idea de equilibrio correlacionado que Aumann llama el «equilibrio correlacionado subjetivo». El hecho que esta idea esté íntimamente conectada con la noción de de estrategia racionalizable fue observado por los economistas Brandenburger y Dekel. Resulta que el conjunto de las estrategias racionalizables de un jugador es idéntico al conjunto de todas las estrategias que un jugador podría llegar a necesitar en algún equilibrio correlacionado subjetivo. Algunas consecuencias de todo ello aparecerán en el Ejercicio 10.9.37.

Bayesianismo. La discusión anterior habrá servido para mostrar que el bayesianismo no requiere habilidades mentales excepcionales por parte de los jugadores. Estos revisan mecánicamente sus probabilidades subjetivas a medida que disponen de nueva información, y entonces deciden qué hacer por el método igualmente mecánico de maximizar su pago esperado dadas sus creencias actuales.

Los bayesianos ingenuos piensan que no es necesario preguntarse de dónde salen las probabilidades a priori de los jugadores, o cómo saben estos cuáles son sus particiones de posibilidades[29]. Aumann ofrece a esta actitud visos de respetabilidad haciendo que el universo, y no los propios jugadores, sea responsable de lo que los jugadores saben y creen. Sin embargo, si los bayesianos desean alcanzar la respetabilidad por este camino, han de pagar un precio muy elevado. Tienen que abandonar la cláusula de Savage sobre el «mundo pequeño». El universo del discurso de Aumann puede tener muchas virtudes, ¡pero la pequeñez no es una de ellas!

Personalmente, el bayesianismo como credo me parece irritante. La teoría de la decisión bayesiana me parece que no es más que una herramienta útil que hay que usar cuando resulta apropiada. No es un zapato de cristal en el que encaja cualquier pie. Existe una buena razón para que el método usado por los científicos para hacer descubrimientos sobre el mundo físico no sea bayesiano. La razón es que los científicos no son tan tontos como para creer que pueden predecir por adelantado cada una de las ideas que se le puede ocurrir a algún científico en el futuro. Es decir, entienden que en el futuro se formularán conceptos que son inconcebibles en el presente. Lo que

[29] En particular, creen que la racionalidad bayesiana dota a quienes la hacen suya con la capacidad de coger del aire sus creencias subjetivas. Esta actitud lleva a bayesianos que son muy ingenuos a argumentar que la teoría de juegos es una pérdida de tiempo. Es indudablemente cierto que si no necesitáramos preocuparnos de por qué la gente cree en lo que cree, entonces las consideraciones sobre equilibrios se harían irrelevantes.

es cierto para el espacio exterior es incluso más cierto para el espacio interior. Una mente no puede, literalmente, itemizar y almacenar cada detalle de sus propias operaciones, y mucho menos las operaciones de otras mentes igualmente complejas.

El bayesianismo no es, por tanto, un marco adecuado para estudiar cómo razona la gente. Los bayesianos protestarán diciendo que están haciendo lo único que se puede hacer. Estoy de acuerdo en que las demás metodologías son simplemente demasiado *ad hoc* para ser tomadas en serio. Sin embargo, como el príncipe del cuento, preferiría continuar soltero a tener que forzar el zapato de cristal en uno de los pies de las hermanas feas. O dicho más llanamente, no estoy de acuerdo en que una explicación bayesiana de los fundamentos de la teoría del equilibrio sea preferible a no disponer de ninguna explicación.

10.9. Ejercicios

1. ¿Qué subconjuntos del universo Ω de la Figura 10.1 corresponden a los siguientes sucesos?
   a) Bob tiene la cara sucia.
   b) Nanny tiene la cara limpia.
   c) Exactamente dos viajeros tienen la cara sucia.
   ¿Cuál de estos sucesos ocurre cuando el verdadero estado del mundo es $\omega = 3$?

Mates 2. Usar las propiedades (K0) – (K4) de la Sección 10.2.1 para probar los siguientes resultados:
   a) $F \supseteq E \Rightarrow \mathcal{K}F \supseteq \mathcal{K}E$
   b) $\mathcal{K}E = \mathcal{K}^2E$
   c) $\mathcal{K}E \supseteq (\sim\mathcal{K})^2E$
   Ofrecer una interpretación de cada uno de ellos.

Mates 3. Demostrar que (K0) – (K4) de la Sección 10.2.1 son equivalentes a (P0) – (P4).

Mates 4. Escribir propiedades del operador de posibilidad $\mathcal{P}$ análogas a las del Ejercicio 10.9.2. Interpretar estas propiedades.

5. En la historia de los viajeros con la cara sucia de la Sección 10.1 es cierto que todos tienen la cara sucia. ¿Por qué esto no es un truismo para Alice antes de que hable el guarda?

6. Demostrar que un suceso T es un truismo si y sólo si $T = \mathcal{K}T$.

Mates 7. Demostrar que, para un suceso cualquiera E, los siguientes conjuntos son truismos:
   a) $\mathcal{K}E$ *b*) $\sim\mathcal{K}E$ *c*) $\mathcal{P}E$ *d*) $\sim\mathcal{P}E$

Mates 8. Si S y T son truismos, demostrar que lo mismo es cierto de $\sim S$, $S \cap T$ y $S \cup T$.

Mates 9. Explicar por qué

$$\bigcap_{\omega\in\mathcal{K}E} \mathcal{K}E \subseteq \bigcap_{\omega\in\mathcal{K}E} E \subseteq \bigcap_{\omega\in\mathcal{K}(\mathcal{K}E)} \mathcal{K}E = \bigcap_{\omega\in\mathcal{K}E} \mathcal{K}E.$$

Usar el Teorema 10.3.1 y el Ejercicio 10.9.6 para deducir que

$$\mathcal{P}\{\omega\} = \bigcap_{\omega\in\mathcal{K}E} E.$$

Mates 10. Usar el Teorema 10.3.1 para probar que

$$\mathcal{K}E = \{\omega : \mathcal{P}\{\omega\} \subseteq E\}.$$

11. Supongamos que el guarda de la historia de los viajeros con la cara sucia de la Sección 10.1 deja de anunciar que alguien tiene la cara sucia siempre que esto es cierto. En lugar de ello, anuncia que por lo menos hay dos viajeros con la cara sucia si y sólo si es cierto. Suponiendo que los pasajeros conocen la nueva disposición del guarda, dibujar un diagrama con los conjuntos de posibilidades de los viajeros después de que el guarda ha hablado.

12. Continuar el ejercicio anterior dibujando diagramas como los de la Figura 10.5(a) que muestren cómo los viajeros refinan sus particiones de posibilidades si la posibilidad de ruborizarse rueda entre los viajeros (como en la Sección 10.3.1).

13. Supongamos que los viajeros con la cara sucia dejan de tener la oportunidad de turnarse en ruborizarse como en la Sección 10.3.3. En lugar de ello, los tres viajeros tienen la oportunidad de ruborizarse exactamente un segundo después del anuncio del guarda, y entonces de nuevo exactamente dos segundos después del anuncio, y así sucesivamente. Dibujar diagramas mostrando cómo las particiones de posibilidades de las particiones se van refinando cuando pasa el tiempo. ¿Quién se ruborizará en esta historia? ¿Cuántos segundos después del anuncio alguien se ruborizará por primera vez?

14. Hallar una historia con rubores que desemboque en una configuración final de conjuntos de posibilidades distinta de la de la Sección 10.3.3 y del Ejercicio 10.9.13.

15. Para el juego de la Figura 10.9:
   a) Hallar una estrategia mixta para la jugadora II que siempre conduzca a la misma lotería sobre resultados que la estrategia de comportamiento en la que ella asigna probabilidades iguales a cada acción en cada conjunto de información.
   b) Hallar una estrategia de comportamieento para la jugadora II que siempre conduzca a la misma lotería sobre resultados que la estrategia mixta en la que usa *RLR* con probabilidad 2/3 y *LRL* con probabilidad 1/3.

16. Para el juego de la Figura 4.21:
    a) Explicar por qué el juego tiene información imperfecta pero no memoria perfecta.
    b) Hallar una estrategia de comportamiento para la jugadora II que siempre conduzca a la misma lotería sobre resultados que la estrategia mixta que usa *dD* con probabilidad 2/3 y *uU* con probabilidad 1/3.
17. En el juego de un jugador de la Figura 10.8(a):
    a) Expresar el pago que el jugador consigue para cada una de sus cuatro estrategias puras *Ll*, *Lr*, *Rl*, *Rr*.
    b) Explicar por qué todas las estrategias mixtas dan un pago de cero.
    c) Hallar una estrategia de comportamiento que dé un pago de 1/4.
    d) ¿Por qué no es aplicable el teorema de Kuhn?
18. En el juego de un jugador de la Figura 10.8(b):
    a) Hallar una estrategia mixta que conduzca a la misma lotería sobre resultados que la estrategia de comportamiento en que r se escoge con probabilidad p y R se escoge con probabilidad P.
    b) Demostrar que ninguna estrategia de comportamiento da la misma lotería sobre resultados que la estrategia mixta que asigna probabilidad 1/2 a lL y probabilidad 1/2 a rR.
    c) ¿Por qué no es aplicable el teorema de Kuhn?
19. Supongamos que la jugadora II usa la estrategia de comportamiento del Ejercicio 10.9.16(b) en el juego de la Figura 4.21. Si el jugador I lo sabe, ¿qué probabilidades asignará éste a los dos nodos de su primer conjunto de información, si éste se alcanzara? ¿Qué probabilidades asignará él a los dos nodos de decisión en su segundo conjunto de información, si éste se alcanzara?
20. La medida de probabilidad a priori de Nanny viene dada por prob(1) = prob(2) = ... prob(4) = 1/12, y prob(5) = prob(6) = ... = prob(8) = 1/6. Si el verdadero estado del mundo es $\omega = 8$, ¿cómo revisará estas probabilidades cuando progresa del paso 1 hasta el paso 7 de la Sección 10.3.3?
21. Explicar cómo se calculan los valores que figuran en la forma estratégica de la quiche de la Figura 10.11. Escribir los cálculos para los valores en la casilla de la fila (*quiche*, *cerveza*) y columna (*ceder*, *intimidar*). Usar el método de la eliminación sucesiva de estrategias débil y fuertemente dominadas para reducir la forma estratégica a un juego bimatricial 2 × 2. Hallar el equilibrio de Nash con estrategias mixtas de este juego reducido.
22. Usar la forma estratégica de la Figura 10.11 para comprobar que el juego de la quiche no tiene equilibrios de Nash con estrategias puras. Verificar que cuando el jugador I usa la estrategia mixta $(0, 0, 1/2, 1/2)^T$, la jugadora II es indiferente entre su primera y su segunda estrategias puras. Verificar que cuando la jugadora II usa su estrategia mixta $(1/2, 1/2, 0, 0)^T$, el jugador I es indiferente entre su tercera y su cuarta estrategias puras. Comprobar que este par de estrategias mixtas es un equilibrio de Nash.
23. Hallar todos los equilibrios de Nash para el juego de la quiche de la Figura 10.6(b) cuando la jugada al azar es sustituida por una nueva jugada al azar que elige un blando con probabilidad 3/4 y un duro con probabilidad 1/4.

Filo 24. Escribir la forma estratégica 3 × 2 del dalek de la Figura 10.6(a). Hallar todos los equilibrios de Nash con estrategias puras. ¿Cuáles de ellos son subjuego-perfectos? Una de las estrategias puras del jugador I está fuertemente dominada. Si la jugadora II supone que es seguro que el jugador I nunca usará una estrategia fuertemente dominada, ¿qué probabilidades asignaría a los nodos x e y si tuviera que jugar? ¿Qué conducta inducen estas creencias? ¿Qué hará el jugador I si predice estas creencias? ¿Qué nos dice esto acerca del equilibrio de Nash que finalmente se jugará?[30].

Mates 25. Demostrar que el operador $\mathcal{K}$ = (todos saben) de la Sección 10.6.1 satisface las propiedades (K0), (K1) y (K2) de la Figura 10.2. La Sección 10.6.1 contiene un ejemplo que muestra que todos pueden saber algo sin que todos sepan que todos lo saben. Dar otro ejemplo.

Mates 26. ¿Cómo debería definirse formalmente el operador $\mathcal{K}$ = (alguien sabe)? ¿Por qué este operador no satisface (K1) de la Figura 10.2?

Mates 27. ¿Por qué el operador de conocimiento común $\mathcal{K}$ = (todos saben)$^\infty$ satisface (K3) de la Figura 10.2, como se afirma en la Sección 10.6.2?

28. Consideremos de nuevo los Ejercicios 10.9.12 y 10.9.13. Para cada uno de ellos, hallar las particiones de posibilidades comunales en cada etapa del proceso de ruborización. Finalmente, es conocimiento común que Bob y Nanny tienen las caras sucias cuando ello es cierto. Explicar por qué. En el caso del Ejercicio 10.9.12, ¿por qué nunca llega a ser conocimiento común que Bob y Nanny tienen las caras limpias cuando ello es cierto?

[30] Este es un argumento por «inducción hacia adelante» del mismo tipo general que el considerado en el Ejercicio 7.9.34. Una objeción es que, si un libro de teoría de juegos da (a, r) como «correcta», entonces el jugador I debe haber cometido un error si la jugadora II tiene que jugar. Sin embargo, si el jugador I comete errores, ¿por qué no puede cometer el de usar una estrategia fuertemente dominada? La objeción se sostiene más difícilmente si los jugadores disponen de la oportunidad de «charlar en el café» antes de que empiece el juego. El jugador I puede entonces negar resueltamente que el libro de teoría de juegos sea una fuente autorizada. Además, puede explicar con mucho cuidado que entiende que R está fuertemente dominada y por consiguiente no tiene intención de utilizarla. De hecho, continuará el jugador I, está completamente decidido a jugar L. Un discurso así seguramente convencerá a todo el mundo excepto la obstinadísima jugadora II.

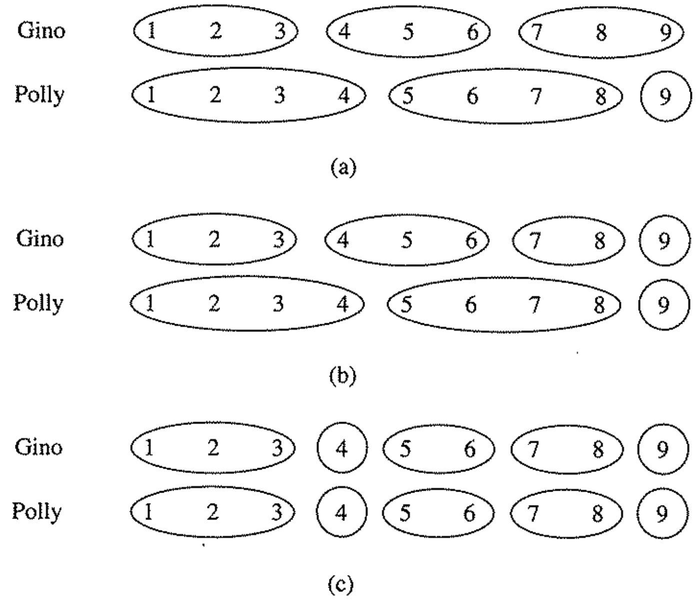


Figura 10.16. Llegar al consenso.

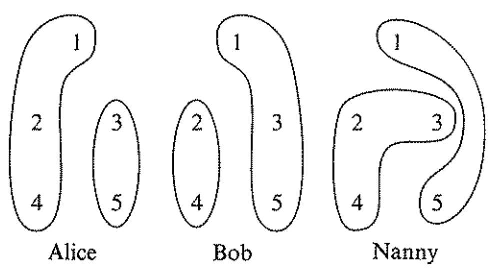
Mates

29. Los jugadores bayesiano-racionales toman aquella decisión que maximiza sus pagos esperados dadas sus creencias actuales. Demostrar que esta regla de decisión satisface el principio de racionalidad de la Sección 10.7.2. Esto es, si E y F no pueden ocurrir simultáneamente y $d(E) = d(F)$, entonces $d(E \cup F) = d(E) = d(F)$.

30. Es conocimiento común que Gino y Polly siempre dicen la verdad. El espacio de estados es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Las particiones de posibilidades de los jugadores aparecen en la Figura 10.16(a). Los jugadores se alternan anunciando cuántos elementos contiene en aquel momento su conjunto de posibilidades.
   a) ¿Por qué Gino empieza anunciando 3 en todos los estados del mundo?
   b) ¿De qué forma el anuncio de Gino cambia la partición de posibilidades de Polly?
   c) Ahora Polly anuncia. Explicar por qué las particiones de posibilidades son, tras ello, las de la Figura10.16(b).
   d) Continuar revisando las particiones de posibilidades a medida que los jugadores anuncian. Finalmente, se llegará a la Figura 10.16(c). ¿Por qué no se producirán más cambios?
   e) En la Figura 10.16(c), el suceso E que el conjunto de posibilidades de Gino contiene 2 elementos es $\{5, 6, 7, 8\}$. ¿Por qué es esto conocimiento común cuando el verdadero estado es $\omega = 5$? ¿Es E un truismo común?

31. En el ejercicio anterior es conocimiento común que ambos, Gino y Polly, asignan una probabilidad a priori de 1/9 a cada elemento de Ω. En lugar de anunciar cuántos elementos contiene su actual conjunto de posibilidades, anuncian su actual probabilidad subjetiva para el suceso $F = \{3, 4\}$.
   a) En la Figura 10.16(a), explicar por qué el suceso que Gino anuncia 1/3 es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y el suceso que anuncia 0 es $\{7, 8, 9\}$.
   b) ¿Cuál es la partición de posibilidades de Polly después del primer anuncio de Gino? Explicar por qué el suceso que ahora Polly anuncia 1/2 es $\{1, 2, 3, 4\}$, y el suceso que ella anuncia 0 es $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.
   c) ¿Cuál es la nueva partición de posibilidades de Gino después del anuncio de Polly? Explicar por qué el suceso que ahora Gino anuncia 1/3 es $\{1, 2, 3\}$, el suceso que anuncia 1 es $\{4\}$, y el suceso que anuncia 0 es $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.
   d) ¿Cuál es la nueva partición de posibilidades de Polly? Explicar por qué los sucesos que ahora Polly anuncie 1/3, 1 ó 0 son los mismos que en (c).
   e) Explicar por qué la probabilidad a posteriori de cada jugador para el suceso F es conocimiento común en cualquier estado.
   f) En la Figura 10.16(a), ¿por qué es cierto que no es conocimiento común la probabilidad a posteriori de F de ningún jugador en ningún estado?
   g) ¿Cuál será la secuencia de anuncios cuando el verdadero estado del mundo es $\omega = 2$?

32. Las particiones de posibilidades iniciales de Alice, Bob y Nanny son las que muestra la Figura 10.17. Es conocimiento común que sus probabilidades a priori asignan igual probabilidad a cada estado.



Estado	Alice	Bob	Nanny	Promedio
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{18}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$

Figura 10.17. Llegar al consenso de nuevo.

La tabla a la derecha de la Figura 10.17 muestra las probabilidades a posteriori iniciales de Alice, Bob y Nanny para F en cada estado, y también el promedio de estas probabilidades. Cada jugador informa ahora *privadamente* a un kibitzer de su probabilidad a posteriori para el suceso $F = \{1, 2, 3\}$. El kibitzer calcula la media de estas tres probabilidades y anuncia el resultado de sus cálculos *públicamente*. Bob y Nanny revisan sus probabilidades para F a la luz de esta nueva información. Entonces comunican privadamente sus actuales probabilidades a posteriori al kibitzer, quien calcula de nuevo el promedio. Y así sucesivamente.

a) Dibujar de nuevo la Figura 10.17, pero modificada para mostrar la situación *después* del primer anuncio del kibitzer.
b) Repetir (a) para el segundo anuncio del kibitzer.
c) Repetir (a) para el tercer anuncio del kibitzer.
d) ¿Cuántos anuncios son necesarios antes de llegar al consenso sobre la probabilidad de F?
e) ¿Cuál será la secuencia de sucesos cuando el verdadero estado del mundo es $\omega = 1$?
f) Si el verdadero estado del mundo es $\omega = 1$, ¿llega esto a ser conocimiento común?
g) Si $\omega = 5$ no es el verdadero estado, ¿en qué etapa llegará este hecho a ser conocimiento común?
h) Si ω es par, ¿en qué etapa llegará este hecho a ser conocimiento común?
i) Se llega al consenso cuando todos comunican la misma probabilidad para F al kibitzer. ¿Por qué es conocimiento común que se ha llegado al consenso inmediatamente después de ocurrir?

Filo

33. Explicar por qué se jugará necesariamente un equilibrio de Nash en un juego si la elección de estrategia de cada jugador es conocimiento mutuo y cada jugador es bayesiano-racional.

34. Dar un ejemplo de un juego bimatricial 2×2 en el que todo par de estrategias puras es racionalizable.

35. Si el criterio de racionalizabilidad de la Sección 10.8.2 se aplica al juego bimatricial de la Figura 10.18, se obtiene un único par de estrategias puras. Determinar cuál es el par de estrategias. (No hay que olvidar que las estrategias mixtas pueden ser relevantes.)

Econ

36. En el juego del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1:
a) Confirmar que el beneficio de cada jugador es una función de la producción del jugador estrictamente cóncava. Deducir que las estrategias mixtas nunca son respuestas óptimas en el juego, y por tanto, pueden ser ignoradas en lo que sigue.
b) Usar la Figura 7.5 como ayuda para dibujar un diagrama que muestre tanto la curva de reacción del jugador I, $q_1 = R(q_2)$, como la curva de reacción de la jugadora II, $q_2 = R(q_1)$, donde $R(x) = 1/2(M - c - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant M - c$.

5, 2	2, 6	1, 4	0, 3
4, 1	3, 4	2, 1	1, 2
1, 0	1, 1	1, 5	5, 1
2, 3	0, 1	0, 2	4, 4

Figura 10.18. Un juego a racionalizar.

c) Sea $x_0 = 0$, y definamos $x_{n+1} = R(x_n)$ para $n = 0, 1, \ldots$ Si $x_n \to \tilde{x}$ cuando $n \to \infty$, explicar por qué $\tilde{x} = R(\tilde{x})$[31]. Deducir que $\tilde{x} = 1/3(M - c)$. Así $(\tilde{x}, \tilde{x})$ resulta ser igual al único equilibrio de Nash del juego del duopolio de Cournot calculado en la Sección 7.2.1.
d) Señalar x_1 en los ejes de ambos jugadores en el diagrama dibujado para el apartado *b*). Explicar por qué escoger un $q_i > x_1$ nunca es una respuesta óptima para el jugador *i*. A continuación, borrar la parte del diagrama con $q_1 > x_1$ o $q_2 > x_1$.
e) Señalar x_2 en los ejes de ambos jugadores en el diagrama dibujado para el apartado *b*). Explicar por qué escoger un $q_i < x_2$ nunca es una respuesta óptima para el jugador *i*, si se sabe que las opciones estratégicas eliminadas en el apartado *d*) nunca serán utilizadas. A continuación, borrar la parte del diagrama con $q_1 < x_2$ o $q_2 < x_2$.
f) Señalar x_3 en los ejes de ambos jugadores en el diagrama, y decidir qué parte del diagrama hay que borrar ahora.
g) Explicar por qué una opción estratégica q_i que nunca llega ser borrada en el proceso cuyos tres primeros pasos acabamos de describir tiene que cumplir $x_{2n} \leqslant q_i \leqslant x_{2n+1}$ para $n = 0, 1, \ldots$
h) Deducir que el único par de estrategias *racionalizable* para el juego del duopolio de Cournot es el único equilibrio de Nash del juego $(\tilde{x}, \tilde{x})$.
i) Demostrar *directamente* que cada estrategia eliminada en el

[31] Los matemáticos deben confirmar que la sucesión $\langle x_{2n} \rangle$ es creciente y acotada por $M - c$. Por tanto, converge hacia un límite a. La sucesión $\langle x_{2n-1} \rangle$ decrece y está acotada inferiormente por 0. Por tanto converge hacia un límite b. Explicar por qué $b = R(a)$ y $a = R(b)$. Deducir que $a = b = \tilde{x}$.

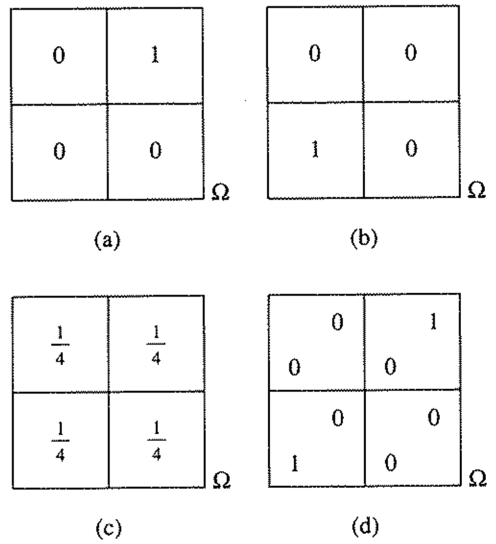


Figura 10.19. Probabilidades a priori para los equilibrios correlacionados en el gallina.

proceso está fuertemente dominada en el juego del cual las estrategias previamente borradas han sido eliminadas.

j) Usar la metodología de este ejercicio para probar que siempre se obtiene convergencia hacia el único equilibrio de Nash cualquiera que sea el punto inicial usado en la libración estudiada en la Sección 9.3.1.

Filo

37. La Figura 10.19 muestra probabilidades a priori para los conjuntos E_1, E_2, E_3 y E_4 de la Figura 10.15(c). Estas probabilidades a priori son la base de distintos equilibrios correlacionados (Sección 7.6.2) de la versión del gallina de la Figura 7.17(a).

a) ¿Por qué las probabilidades a priori de las Figuras 10.19(a), 10.19(b) y 10.19(c) corresponden a equilibrios de Nash del gallina? ¿Cuáles son los equilibrios a los que corresponden?

b) La Figura 10.19(d) ofrece un caso en el que los jugadores llegan a un acuerdo sobre el desacuerdo acerca de las probabilidades a priori. ¿Qué pago asigna a cada jugador el «equilibrio correlacionado subjetivo» (Sección 10.8.2) basado en estas probabilidades a priori distintas? ¿Es esto una comida gratis?

C A P I T U L O

11

Saber a quién creer

11.1. Información completa e incompleta

La distinción entre información completa e incompleta no tiene nada que ver con la distinción entre información perfecta e imperfecta. Decir que un juego es de información perfecta o imperfecta es decir algo acerca de sus reglas[1]. Decir que un juego es de información completa o incompleta es decir algo acerca de qué se sabe sobre las circunstancias en las que se juega el juego.

Todos los juegos estudiados en este libro, sean de información perfecta o imperfecta, son juegos de información completa. Hablando vagamente, esto significa que la información suministrada es suficiente para poder analizar el juego. Para que esto sea cierto en general, suponemos que unas cuantas cosas son conocimiento común[2]. Las condiciones fueron expresadas dramáticamente en la Sección 10.8 citando la caracterización de los hombres que hizo Hobbes en términos de su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

En la teoría de juegos, la fortaleza física de un jugador viene determinada por las *reglas del juego*. Se supone que la razón de un jugador le hace tomar decisiones que están de acuerdo con los principios de la *racionalidad bayesiana*[3]. Este capítulo se concentra en las restantes propiedades de un hombre: sus pasiones y su experiencia. Estas corresponden a las *preferencias* del jugador respecto de los posibles resultados del juego, y a las *creencias* del jugador sobre las jugadas del azar en el juego.

11.1.1. Conocer al enemigo

Empecemos por considerar las preferencias. En muchos de los juegos usados para ilustrar ideas de la teoría de juegos, no es excesivamente restrictivo suponer que las preferencias de los jugadores son conocimiento común. En el ajedrez, por ejemplo, parece inofensivo suponer que es conocimiento común que ambos jugadores prefieren ganar a perder. Pero, ¿qué pasa en un juego como la ruleta rusa? En la Sección 4.7 vimos que la manera cómo jugadores racionales juegan este juego depende de su grado de aversión al riesgo. Sin embargo, no es muy realista suponer que cada jugador dispondrá de información fiable acerca de la disponibilidad del otro a asumir riesgos, especialmente porque ambos jugadores tienen mucho a ganar fingiendo que son más temerarios de lo que realmente son. Lo mismo se puede decir acerca de juegos de negociación como los estudiados en el Capítulo 5. Los

---

[1] Para ser más exactos, un juego es de información perfecta si y sólo si las reglas especifican que cada conjunto de información contiene exactamente un nodo.

[2] Aunque esto no significa que algunos juegos no puedan ser analizados bajo hipótesis más débiles. Por ejemplo, para analizar el dilema del prisionero, sólo se necesita que cada jugador sepa que *halcón* domina fuertemente a *paloma*.

[3] Las dudas de la Sección 10.8.2 se pueden dejar de lado en este capítulo. La teoría de la información incompleta de Harsanyi es ciertamente una teoría de «mundo pequeño».

jugadores están por tanto incentivados no sólo a disimular su aversión al riesgo, sino también a disimular su paciencia. En el juego del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1, parece una hipótesis relativamente inocente que es conocimiento común que ambas empresas buscan maximizar beneficios. Pero los beneficios de una empresa dependen en parte de sus costes. ¿Con qué grado de seguridad puede una empresa evaluar los costes de otra? La respuesta depende de las circunstancias, pero es evidente que en muchos casos es muy difícil obtener pruebas fiables de los costes del oponente, particularmente si el oponente comprende que es estratégicamente importante tener engañadas a las empresas rivales sobre este extremo.

La teoría de la información incompleta de Harsanyi ofrece un camino para atacar estos problemas. Habitualmente se dice que es una teoría de «juegos de información incompleta». Sin embargo, hablando en propiedad, no existen *juegos* de información incompleta. La teoría de Harsanyi es una técnica para *completar* una estructura en la que la información está incompleta. La teoría deja un margen de maniobra importante a quienes la usan. Señala lo que falta en una estructura informacional, pero no dice dónde es posible encontrar lo que falta. Lo que puede ofrecer son las preguntas adecuadas. Encontrar las respuestas correctas, es algo que Harsanyi deja para usted y para mí.

Si podemos responder a las preguntas adecuadamente, el resultado será un juego de información *imperfecta*. Es superfluo añadir que el juego que surge *después* de aplicar la teoría de Harsanyi es un juego de información *completa*. Si no lo fuera, no sería un juego[4].

La teoría de Harsanyi no es muy difícil. En caso contrario no hubiera sido posible colar algunos ejemplos de su uso en capítulos anteriores. Será útil volver a uno de estos ejemplos mientras esbozamos la teoría en la siguiente sección.

11.2. Asignación de tipos

El lenguaje del teatro se presta muy bien para exponer la teoría de Harsanyi de la información incompleta[5]. Podemos imaginar que las reglas de un

[4] Sin embargo, hay que acostumbrarse a aceptar que muchos autores, para decir que han usado la teoría de Harsanyi, describen al producto final diciendo que es un «juego de información incompleta». A veces se dice que la teoría de Harsanyi hace de la «información incompleta un caso especial de la información imperfecta». Sin embargo, este es un enfoque que debe tomarse con reservas. Nada garantiza que las cuestiones planteadas por la teoría de Harsanyi tienen la clase de respuestas que la teoría requiere. Si no tienen las respuestas adecuadas, será simplemente imposible remodelar el problema de información incompleta en uno de información imperfecta.

[5] Describiremos la versión estándar en la que únicamente hay dudas acerca de las preferencias y creencias de los jugadores. Sin embargo, la teoría puede ser igualmente usada cuando hay dudas acerca de las reglas del juego. De hecho esto es exactamente lo que hicimos en la Sección 10.8.1. Aumann afirma que se puede proceder de la misma forma cuando está en duda la racionalidad de los jugadores, pero esta aplicación es muy controvertida.

juego de dos jugadores es un *guión*[6] con *papeles* para dos *actores*. El *director de actores* es el azar.

Hay un conjunto $\mathcal{M}$ de actores en paro que se presentan a una prueba para el papel de jugador I. Análogamente, $\mathcal{F}$ es el conjunto de actrices en paro que aspiran al papel de la jugadora II. El azar selecciona uno de los actores del conjunto $\mathcal{M}$ para el papel del jugador I. También elige una de las actrices del conjunto $\mathcal{F}$ para el papel de la jugadora II. Esta jugada del azar se llamará la *jugada de reparto*.

Un actor o actriz seleccionado para un papel lo sabe. Pero no sabe quién va a desempeñar el otro papel. Los actores, por tanto, han de decidir la estrategia a usar ignorando la identidad del oponente.

La estrategia que un actor o actriz elige dependerá de su *tipo*. Se supone que todos los actores y actrices son bayesiano-racionales (Sección 3.6.2). Se sigue que el tipo de un actor o actriz queda completamente determinado por sus:

1. **Preferencias.** Estas están especificadas por una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern definida sobre el conjunto de resultados que el guión autoriza. Es importante que estas preferencias puedan depender del tipo de actor o actriz que desempeña el papel del oponente.
2. **Creencias.** Estas están especificadas por las probabilidades subjetivas que el actor o actriz asigna a las opciones de que el azar dispone en la jugada de reparto[7].

Esta descripción del tipo de un actor o actriz es demasiado abstracta para ser fácilmente apreciada si no consideramos por lo menos un ejemplo concreto. Usaremos el juego de la quiche de la Sección 10.5.1 con este propósito.

11.2.1. Los hombres de verdad beben cerveza

La quiche es un ejemplo de un juego de información imperfecta que surge al usar la teoría de Harsanyi para completar una estructura de información incompleta. Lo que necesitamos discutir es el proceso por el que surge.

Guión. El guión con que empieza la historia es ilustrado por la Figura 11.1(a). Obsérvese que las casillas de pagos están vacías. Falta, por tanto,

[6] A veces se le llama la *forma*.

[7] Esta jugada de reparto será la raíz del juego de información imperfecta que la teoría de Harsanyi requiere construir. Por supuesto, las creencias de los actores sobre jugadas posteriores del azar también cuentan, pero se supone que éstas vienen dadas en términos de probabilidades objetivas por las reglas del juego. Por ejemplo, si hay que repartir cartas, las reglas deberían especificar que es necesario barajar públicamente y a conciencia.

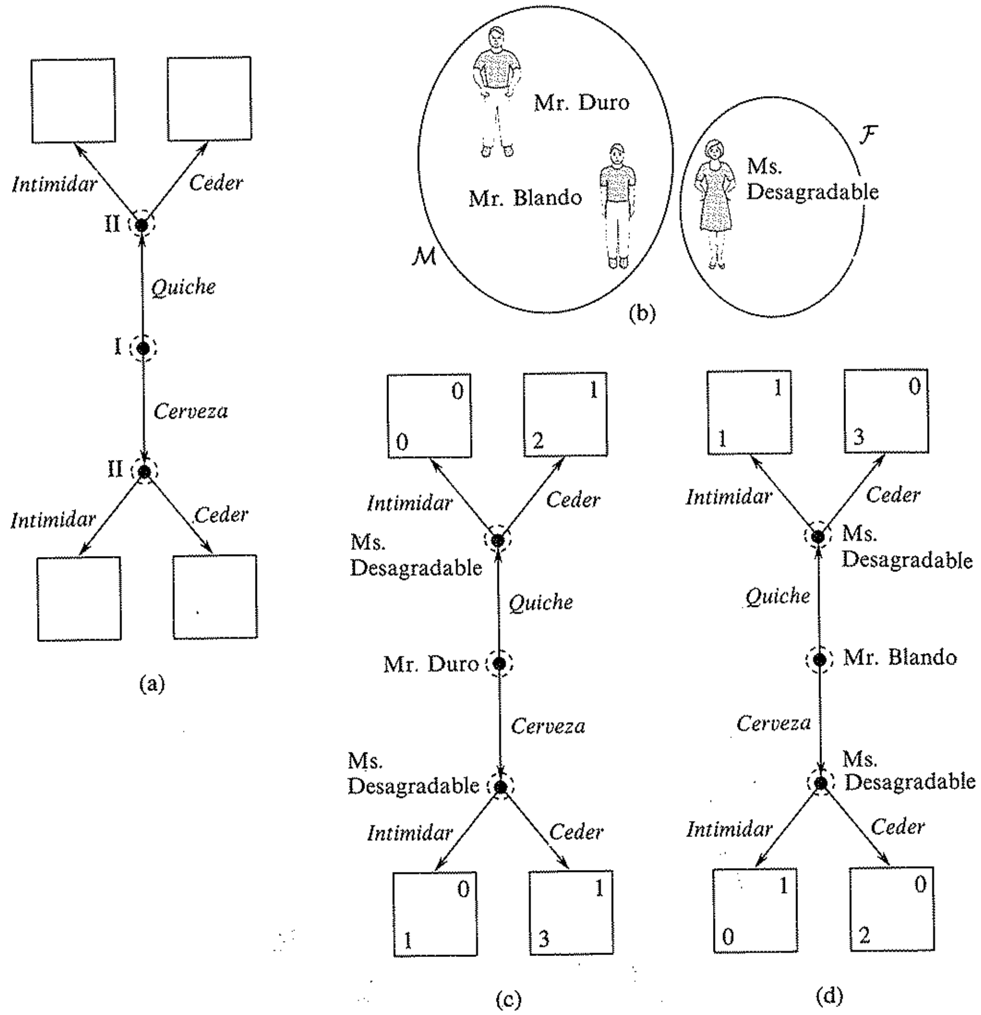


Figura 11.1 La compleción de una estructura incompleta.

información para poder realizar un análisis de teoría de juegos. Lo que deberíamos escribir en las casillas de los pagos depende de las características de los jugadores. En nuestra terminología teatral, esto significa que necesitamos conocer el conjunto de actores o actrices que está aspirando a cada uno de los papeles.

Actores. Los conjuntos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ están ilustrados en la Figura 11.1(b). Dos actores están disponibles para el papel de jugador I: Mr. Duro y Mr. Blando. Para el papel del jugador II, sólo está disponible Ms. Desagradable.

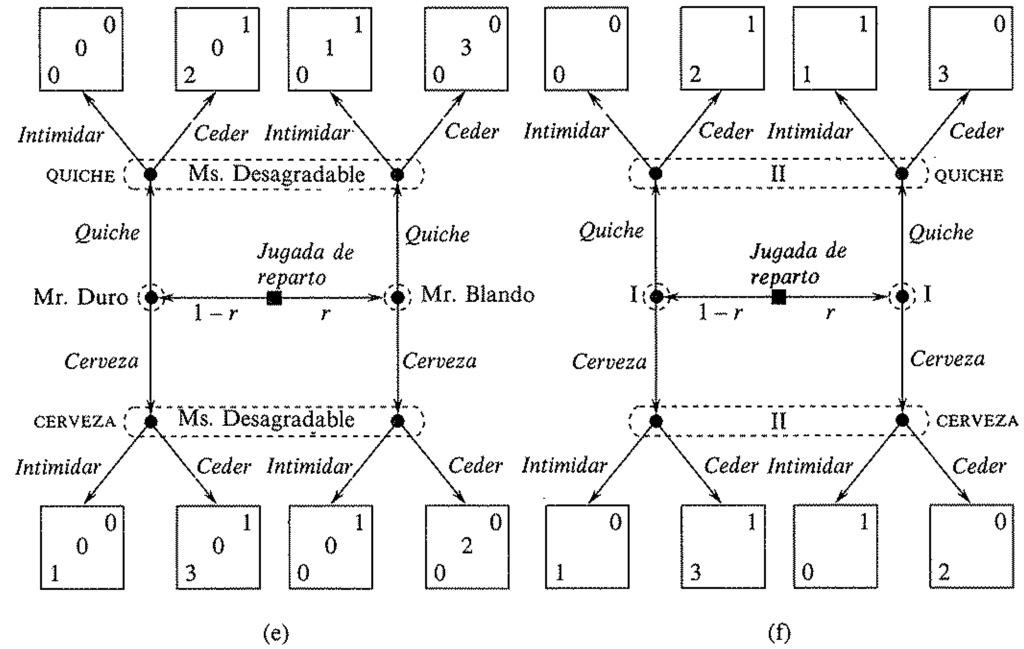


Figura 11.1. *(continuación)*

Preferencias. Las Figuras 11.1(c) y 11.1(d) muestran cómo se rellenarían las casillas de pagos si fuera conocimiento común quién ha conseguido cada uno de los papeles. Dicho brevemente, ante Mr. Duro, Ms. Desagradable prefiere ceder a intimidar. Ante Mr. Blando, prefiere intimidar a ceder. Ambos, Mr. Duro y Mr. Blando, piensan que lo más importante es que cedan ante ellos, pero, en igualdad de condiciones, Mr. Duro prefiere la cerveza a la quiche y Mr. Blando prefiere la quiche a la cerveza.

Creencias. Las Figuras 11.1(c) y 11.1.(d) resumen las *preferencias* de los tres tipos de actores. A continuación hemos de considerar sus *creencias.* Estas creencias se refieren a los actores que serán elegidos en la jugada de reparto. Lo único que se decide aquí es quién, Mr. Duro o Mr. Blando, es elegido para el papel de jugador I. Ms. Desagradable no conocerá el resultado de esta elección. Suponemos que ella asigna una probabilidad subjetiva de $1 - r$ a la elección de Mr. Duro y una probabilidad subjetiva de r a la de Mr. Blando. (En la Sección 10.5.1, $r = 2/3$.)

Jugada de reparto. La Figura 11.1(e) incluye la jugada de reparto. En ella, el azar elige a Mr. Duro con probabilidad $1 - r$, y a Mr. Blando con probabilidad r.

Pagos. Obsérvese que cada casilla de pagos de la Figura 11.1(e) contiene *tres* valores. La esquina sudoeste contiene el pago de Mr. Duro, el centro contiene el pago de Mr. Blando, y la esquina nordeste contiene el pago de Ms. Desagradable. Las Figuras 11.1(c) y 11.1(d) nos dicen qué pagos debemos escribir en las casillas en el caso de un actor que ha sido elegido para desempeñar un papel. Al actor que no ha sido elegido le es asignado un pago de cero[8]. Por ejemplo, si Mr. Duro come quiche después de ser elegido para el papel de jugador I y entonces Ms. Desagradable cede, la tripleta de pagos adecuada es (2, 0, 1). El pago de 2 para Mr. Duro y de 1 para Ms. Desagradable salen de la Figura 11.1(c). Mr. Blando consigue 0 porque no ha sido elegido para jugar.

Información completada. La Figura 11.1(a) tiene la forma de un juego con dos jugadores de información perfecta. Sin embargo, su información es incompleta. Después de completar la información, el resultado es el juego de tres jugadores de información imperfecta dado en la Figura 11.1(e). Es importante que todos los detalles de este juego de información imperfecta sean *conocimiento común*. Esta no es ni mucho menos una hipótesis que puede darse por supuesta sin más. A veces tiene sentido y a veces no. En la quiche, por ejemplo, no es muy realista que las creencias de Ms. Desagradable sean conocimiento común, si no están basadas en encuestas públicas sobre la distribución de distintos temperamentos en el conjunto de la población.

11.2.2. Sigue la función

Después de completar una estructura de información incompleta, el resultado es un juego de información imperfecta. ¿Cómo debemos analizarlo? Se dan dos planteamientos, superficialmente distintos, según quién es considerado un jugador en el juego.

Planteamiento 1. Los actores son jugadores. Este es el planteamiento más natural para la quiche. La Sección 11.2.1 ha sido organizada desde este punto de vista.

En este planteamiento, los actores son considerados individuos separados y distintos. Ellos saben que se les puede asignar uno de los papeles del juego y han decidido por adelantado qué estrategia usarán si les eligen. El azar decide quien jugará finalmente eligiendo aleatoriamente un actor para el papel del jugador I y una actriz para el papel de la jugadora II. Si las características de las poblaciones de actores y actrices de entre las cuales elige el azar se hacen públicas, entonces se puede suponer que la probabilidad con que cualquier actor o actriz es escogido es conocimiento común. Si hay m actores y f actrices, el resultado será un juego con $m + f$ jugadores y de información imperfecta. No hay que decir nada en particular sobre su análisis.

[8] El pago asignado a un actor que no desempeña un papel no tiene ninguna impotancia, ya que él o ella no llega a tener ninguna influencia en el resultado. Se elige el cero por comodidad.

Es un juego como cualquier otro. En particular, es una buena idea empezar por identificar sus equilibrios de Nash.

Planteamiento 2. Los actores son agentes. El segundo planteamiento mantiene la estructura de dos jugadores del guión original.

Imaginemos que el actor designado para el papel de jugador I consulta a Von Neumann qué estrategia debe usar. Análogamente, la actriz que desempeña el papel de jugadora II consulta a Morgenstern. Para que los consejos de Von Neumann y Morgenstern sean óptimos, éstos deben respetar las preferencias de los actores a quienes aconsejan. El consejo de Von Neumann *dependerá*, pues, del tipo del actor. Por ejemplo, en la quiche, Von Neumann recomendará a un actor que declara que es Mr. Duro una estrategia distinta de la que recomendaría a un actor que declarara que es Mr. Blando. Análogamente, el consejo de Morgenstern dependerá del tipo de la actriz designada para el papel de jugadora II.

Este planteamiento reduce los actores a marionetas. Los actores reales en esta versión de la historia son los individuos que tiran de los hilos de las marionetas, es decir, Von Neumann y Morgenstern. Antes de que el azar tome decisiones sobre el reparto, Von Neumann y Morgenstern han de considerar un juego complicado. Cada uno de ellos ha de tener instrucciones preparadas para cualquier actor y actriz que les pueda pedir consejo. En el lenguaje de la Sección 10.4.2, cada uno de estos actores y actrices es un agente de Von Neumann y Morgenstern.

A primera vista, este segundo planteamiento parecería conducir a una situación más simple que la del primer planteamiento. Se puede decir que el jugador I *es* Von Neumann y la jugadora II es Morgenstern. Sólo hemos de considerar un juego con *dos* jugadores. Pero este juego de dos jugadores no es más simple que el juego con $m + f$ jugadores del primer planteamiento. Aunque este último juego tiene muchos jugadores, cada uno de ellos tiene un conjunto de estrategias relativamente simple. Sin embargo, en el juego de dos jugadores jugado por Von Neumann y Morgenstern, ambos jugadores tienen conjuntos de estrategias complicados. De hecho, para Von Neumann una estrategia pura es una función $F : \mathcal{M} \to S$, donde S es el conjunto de estrategias puras asignadas al jugador I en el guión original. Cuando Von Neumann ha elegido F, ha decidido qué instrucciones dar a cada uno de sus agentes. Si el director de reparto designa al actor a para el papel I, la estrategia que Von Neumann recomienda es $F(a)$. Como aprendimos en la Sección 8.2, el conjunto de todas las funciones $F : \mathcal{M} \to S$ no es (ni siquiera cuando $\mathcal{M}$ y S son conjuntos no muy grandes) necesariamente un conjunto fácil de manejar.

Es, por tanto, una ilusión el hecho de que el segundo planteamiento sea más sencillo que el primero. Los dos están equivalentemente condicionados a que cada agente potencial se designe con probabilidad positiva. La situación es totalmente análoga a la considerada en la Sección 10.4.3. El primer planteamiento es simplemente una versión descentralizada del segundo planteamiento.

Filo 11.2.3 ⟶

¿Qué planteamiento hay que usar? Desde el punto de vista matemático la respuesta es irrelevante. Se puede pasar de un planteamiento al otro, en cualquier dirección, de la misma forma que se puede pasar de estrategias mixtas a estrategias de comportamiento, y al revés. Normalmente, la elección de planteamiento depende de la situación de donde proviene el juego. Si hay realmente poblaciones $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ de entre las cuales el azar efectivamente y objetivamente elige a quien debe jugar, entonces el primer planteamiento es más natural. Pero este no es siempre el caso.

Por ejemplo, en la Sección 10.8.1, en realidad no hay una población infinita de actores deseando hacer el papel de jugador I, todos ellos con información diferente sobre cuántas veces hay que repetir el dilema del prisionero. La población infinita sólo existe en las *mentes* de los que están jugando. Los actores que no son los que están jugando son construcciones mentales inventadas por los jugadores reales para dar sentido a la información de que están provistos. La técnica involucrada es muy potente, pero debemos tener presente que, en una historia como ésta, las probabilidades con que los actores imaginarios son escogidos son construcciones completamente subjetivas que sólo existen en las cabezas de los jugadores reales. Al suponer que estas construcciones *subjetivas* son conocimiento común, estamos haciendo una hipótesis muy fuerte.

11.2.3. Más cerveza y quiche

En el juego de la quiche, el primer planteamiento de la Sección 11.2.2 reduce la estructura original de información incompleta al juego de tres jugadores de la Figura 11.1(e), como se describe en la Sección 11.2.1. El segundo planteamiento lo reduce al juego de dos jugadores de la Figura 11.1(f). Aquí se ha identificado a Von Neumann con el jugador I. Se supone que sus pagos son idénticos a los de Mr. Duro cuando está aconsejando a Mr. Duro, e idénticos a los de Mr. Blando cuando está aconsejando a éste[9]. Morgenstern se ha identificado con la jugadora II y obtiene exactamente el pago de Ms. Desagradable.

La forma estratégica de la Figura 11.1(e) es un objeto $2 \times 2 \times 4$. La forma estratégica de la Figura 11.1(f) es un objeto 4×4^{10}. En general, no es una buena idea calcular cualquiera de estas formas estratégicas en primera instancia. Un análisis que considere estrategias de comportamiento en la forma extensiva es normalmente menos problemático. En la Sección 10.4 esto se hace para la quiche, usando el segundo planteamiento en el caso en que $r = 2/3$. Si se hubiera usado el primer planteamiento, el análisis hubiera sido idéntico, salvo que en ocasiones la expresión hubiera sido más directa y menos incómoda.

[9] Un lector atento podría sospechar que estamos violando las restricciones de la Sección 3.5.3 referentes a las comparaciones entre las utilidades de distintos jugadores. Sin embargo, si a Von Neumann le fueran concedidas $3t + 5$ útiles al aconsejar a Mr. Duro, cuyo pago es t, y $17w - 23$ útiles al aconsejar a Mr. Blando, cuyo pago es w, entonces el nuevo juego sería estratégicamente equivalente al del texto.

[10] Para el caso $r = 2/3$, viene dado en la Figura 10.11.

11.2.4. Una aplicación evolutiva

Filo 11.3 ⟶

La Sección 9.5.1 explica cómo, en ocasiones, se pueden discutir útilmente cuestiones evolutivas en términos de la teoría de juegos. Al hacerlo, podemos normalmente dejar las dudas existenciales sobre quiénes son los jugadores a los profesionales de la filosofía. Sin embargo, no siempre bastará con esta actitud desinhibida. En este caso es útil pensar la situación usando el lenguaje de la teoría de Harsanyi.

La Sección 9.5 contiene un cuento sobre una sociedad exclusivamente femenina de dodos que compiten por lugares para anidar jugando al gallina. Para encajar esto en el marco teórico de Harsanyi, debemos empezar reemplazando los dos conjuntos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ de los que se extraen los actores por un único conjunto $\mathcal{R}$. Este sólo contiene dos agentes: Ms. Normal y Ms. Mutante. La Naturaleza es el director de reparto. Ella selecciona en R dos actrices al azar con reemplazo para los papeles de la jugadora I y la jugadora II. Las probabilidades con las que las actrices son escogidas reflejan las frecuencias con las que se dan replicadores nomales y mutantes en la población.

Con el primer planteamiento de la Sección 11.2.2, podemos estudiar ahora un juego en el que consideramos que los jugadoras reales son Ms. Normal y Ms. Mutante con una opción estratégica simple entre *halcón* y *paloma.* Si se prefiere el segundo planteamiento de la Sección 11.2.2, se puede identificar a los jugadores con los papeles I y II que las actrices ocupan. En este caso, no hay que decir ni a Von Neumann ni a Morgenstern qué papel desempeña la actriz a la que están aconsejando[11]. El consejo que darán dependerá necesariamente del tipo, pero será independiente del papel. El primer planteamiento está más próximo a la realidad biológica, pero el segundo facilita la comparación con las ideas convencionales de equilibrio de la teoría de juegos.

11.3. Equilibrio bayesiano

Filo 11.4 ⟶

En realidad ninguna terminología especial es necesaria para analizar el juego que surge al utilizar la metodología de Harsanyi para completar una estructura de información incompleta. En caso contrario no hubiera sido posible analizar el juego de la quiche de la Sección 10.5.1 antes de introducir los métodos de la teoría de Harsanyi. De hecho, gran parte de la terminología estándar es, para el principiante, fuente de confusión más que de

[11] Si se les llegara a decir, el modelo debería ser cambiado de forma que los dodos pudieran condicionar su conducta según que fueran la jugadora I o la jugadora II. A veces esto es apropiado, como cuando uno de los protagonistas tiene derechos preestablecidos sobre un «territorio». Pero esta posibilidad fue excluida en la Sección 9.5.

ayuda y, por tanto, he evitado usarla en la medida de lo posible. En particular, no hemos dicho nada acerca de la noción de *equilibrio bayesiano.*

La literatura sobre economía está llena de referencias a «equilibrios bayesianos en juegos de información incompleta». Normalmente, qué significa esto exactamente ha de ser deducido del contexto. El contexto siempre involucra un problema subyacente en el que la información está incompleta. La referencia a un equilibrio bayesiano señala que el problema ha de ser atacado usando la metodología de Harsanyi. Es importante entender que la manera de completar la estructura de información incompleta no es algo que de alguna manera forme parte de la definición de equilibrio bayesiano. En particular, el autor todavía ha de decirnos quiénes son los actores potenciales, y cómo el azar elige entre ellos. Hecho esto, surge un juego de información imperfecta. Lo que uno debe entender por un «equilibrio bayesiano en un juego de información incompleta» no es más que un equilibrio de Nash en el juego de información imperfecta que surge cuando se ha completado la estructura de información incompleta. Casi siempre, la terminología adoptada usa el segundo planteamiento de la Sección 11.2.2 y las opciones de los jugadores se expresan en términos de estrategias de comportamiento.

Algunos autores a quienes les gusta reconocer el hecho de que sólo están utilizando la idea de equilibrio de Nash hablan de un equilibrio *Nash-bayesiano,* en lugar de un equilibrio bayesiano. Este me parece un compromiso respetable. El «bayesiano» nos recuerda que debemos preguntarnos quiénes son los actores y cuál es la jugada de reparto, mientras que el «Nash» nos dice qué cálculos es necesario hacer. Sin embargo, esto también hace la vida difícil al novato que piensa, muy razonablemente, que la mención de Bayes debe significar que de alguna forma u otra se apelará a la fórmula de Bayes en el proceso.

11.4. Variables aleatorias continuas

Revisión 11.5 ⟶

Ya debe ser evidente a estas alturas que la teoría de Harsanyi de información incompleta no involucra nuevos conceptos en absoluto. Si es difícil usarla en la práctica, es porque son muchas las cosas que hay que tener presente simultáneamente. Paradójicamente, las dificultades técnicas se hacen a menudo menos difíciles considerando modelos con poblaciones *infinitas* de actores y actrices.

La Sección 2.2.1 explica que una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Hasta ahora, sólo hemos considerado variables aleatorias *discretas* porque nos hemos limitado a tratar con espacios de muestras Ω finitos. Sin embargo, si hemos de explotar las simplificaciones de la teoría de Harsanyi que se obtienen considerando poblaciones infinitas, será necesario que nos enfrentemos a espacios de muestras *infinitos.*

11.4.1. Funciones de densidad de probabilidad

Hacemos girar una aguja que rueda libremente y sin predisposición a detenerse en ningún lugar determinado. Cuando se detiene, medimos en grados (en el sentido de giro de las agujas del reloj) el ángulo ω entre las posiciones inicial y final de la aguja. Usted gana entonces $\sqrt{(\omega/10)}$ dólares. Puesto que $0 \leqslant \omega < 360$, sus ganancias serán una cantidad entre 0 y 6 dólares. ¿Cuál es la probabilidad de no ganar más de 3 dólares, si todos los ángulos son igualmente probables?

El espacio de muestras es $\Omega = [0, 360)$. La variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que nos interesa queda definida por $X(\omega) = \sqrt{(\omega/10)}$. La *distribución de probabilidad* de la variable aleatoria X es una función $P : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida por

$$P(x) = \text{prob}\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}.$$

Nos interesa el valor de $P(3)$, pero calcularemos $P(x)$ para todos los valores de x.

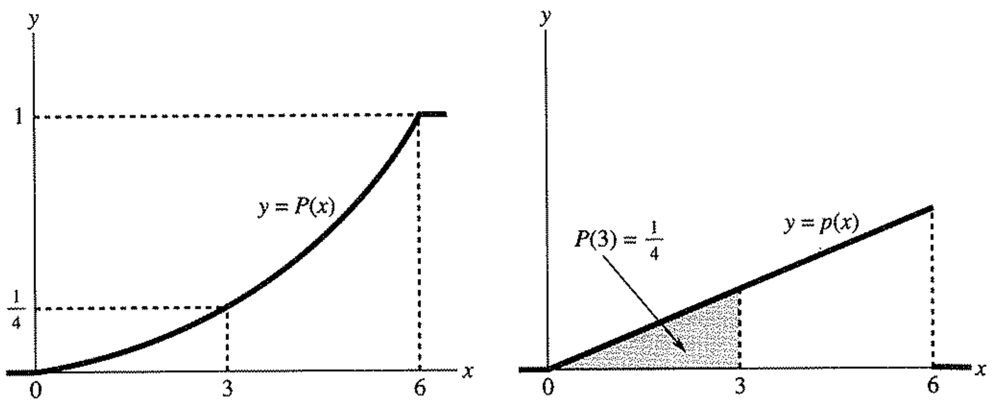
Obsérvese en primer lugar que $P(x) = 0$ cuando $x < 0$, porque es imposible que usted gane menos de 0 dólares. Análogamente, $P(x) = 1$ cuando $x > 6$. Cuando $0 \leqslant x \leqslant 6$, se puede calcular $P(x)$ usando el hecho que $X(\omega) \leqslant x$ si y sólo si $\omega \leqslant 10x^2$. El valor de $P(x)$ es, por tanto, la probabilidad de que ω esté en el intervalo $[0, 10x^2]$. Si todos los ángulos son igualmente probables, esta probabilidad debe ser proporcional a la longitud del intervalo. Luego

$$P(x) = 10x^2/360 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 6).$$

En particular, la probabilidad $P(3)$ de que usted gane 3 dólares o menos es $(3/6)^2 = 1/4$.

La Figura 11.2(a) muestra el gráfico de la función de distribución de probabilidad $P : \mathbb{R} \to [0, 1]$. A veces una variable aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad, además de una función de distribución de probabilidad[12]. Cuando este es el caso, la función de densidad de probabilidad es

[12] Nada garantiza que una variable aleatoria tenga una función de densidad de probabilidad. De hecho, las variables aleatorias de capítulos anteriores sólo podían tomar un valor de entre un conjunto discreto de valores. Estas *variables aleatorias discretas* no tienen funciones de densidad de probabilidad. Un gráfico de su función de distribución de probabilidad tiene el aspecto de una serie de peldaños. Estas funciones escalonadas son derivables excepto en los «saltos». Por tanto, tienen derivada nula «casi en todas partes». Pero esta derivada nula no nos sirve como candidata a función de densidad de probabilidad p, porque evidentemente no recobraremos la función de distribución de probabilidad P integrando la función cero. Incluso las funciones de distribución de probabilidad que crecen continuamente pueden tener derivada cero «casi en todas partes». *Cognoscenti* saben que *casi en todas partes* significa «en un conjunto de medida de Lebesgue cero». También saben que la condición para que una función



(a) (b)

Figura 11.2. Funciones de densidad y de distribución de probabilidad.

precisamente la derivada de la función de distribución de probabilidad, allí donde la derivada está definida. Por ejemplo, la función de densidad de probabilidad $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ para la variable aleatoria X que hemos estado considerando se define por

$$p(x) = P'(x) = \frac{2x}{36} = \frac{x}{18}$$

cuando $0 < x < 6$. Cuando $x < 0$ ó $x > 6$, $p(x) = P'(x) = 0$. Cuando $x = 0$ ó $x = 6$, no importa cómo está definida $p(x)$.

Las funciones de densidad de probabilidad son útiles porque permiten expresar probabilidades como integrales. Por ejemplo, prob$(0 < X \leqslant 3)$ es igual al área sombreada de la Figura 11.2(b). En general, la probabilidad de que X esté entre a y b es igual al área bajo el gráfico de la función de densidad de probabilidad entre a y b. Para verlo, obsérvese que prob$(a < X \leqslant b) = P(b) - P(a)$. Ya que al integrar una derivada se vuelve al lugar de partida,

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b P'(x)\,dx = [P(x)]_b^a = P(b) - P(a)$$

En particular,

$$\text{prob}(0 < X \leqslant 3) = \int_0^3 x/18\,dx = 1/4.$$

de distribución de probabilidad es que sea *absolutamente continua*. Los demás simplemente han de tener presente que a veces restricciones no especificadas limitarán el campo de aplicación de lo que se dice en el texto. En particular, una discusión formal exigiría que varias ecuaciones fueran acompañadas de la frase «casi en todas partes».

11.4.2. El teorema fundamental del cálculo

El resultado fundamental del cálculo infinitesimal es que la integración es lo opuesto a la diferenciación. Acabamos de usar este hecho para explicar cómo se pueden usar las funciones de densidad de probabilidad. Pero el teorema fundamental es usado cada vez que se calcula una integral. Si p es continua en $[a, b]$ y si $Q'(x) = p(x)$ para cada x en (a, b), entonces el teorema fundamental nos dice que

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b Q'(x)\,dx = [Q(x)]_b^a = Q(b) - Q(a).$$

La función Q puede ser cualquier cosa cuya derivada sea p. Esta Q se llama *una primitiva* o *integral indefinida* de p. Las primitivas nunca son únicas. Si Q es una primitiva, también lo es $Q + c$, donde c es una constante cualquiera.

El ejemplo más simple de una primitiva para p es la función P definida por

$$P(x) = \int_a^x p(y)\,dy.$$

Para comprobar que P es una primitiva, sólo debemos recordar que el teorema fundamental nos dice que la diferenciación es lo opuesto de la integración, y por tanto[13],

$$P'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x p(y)\,dy = p(x). \qquad (11.1)$$

Puede parecer superfluo afirmar algo tan obvio como 11.1, pero la espantosa notación usada normalmente para las primitivas a menudo provoca confusión sobre este punto. La notación espantosa consiste en escribir $Q(x) = \int p(x)\,dx$ para especificar una primitiva Q. Esta notación invita a los principiantes a pensar que, cuando usan que $Q'(x) = p(x)$, de alguna forma se las han arreglado para llevar a cabo la operación absurda de integrar con respecto a una variable de integración[14]. Sin embargo, una vez superada esta confusión nada puede ser más simple que derivar una integral indefinida como la (11.1). Simplemente, hay que evaluar el integrando en el límite superior de integración. Será útil recordar este resultado en el siguiente capítulo.

[13] Si una función integrable p tiene discontinuidades, entonces el resultado continúa siendo cierto, suponiendo que pronunciamos el conjuro «casi en todas partes».

[14] Intente pensar en la derivada de $\int_0^3 y^2 dy = 9$ con respecto a y.

11.4.3. *Integración por partes*

Sean u y v funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Sean U y V primitivas de estas funciones. La fórmula para derivar un producto dice que $(UV)' = U'V + UV' = uV + UV'$. Del teorema fundamental se sigue que

$$\int_a^b (uV + UV')\,dx = \int_a^b (UV)'\,dx = [UV]_b^a.$$

$$\int_a^b uV\,dx = [UV]_b^a - \int_a^b UV'\,dx.$$

Esta es la fórmula de la intergación por partes. Es útil para integrar productos. Usted ha de decidir cuál de los términos del producto a integrar debe ser u y cuál debe ser V. Habitualmente, será conveniente coger V igual al término más complicado, ya que puede simplificarse al derivarlo. También dispone de una opción sobre la primitiva U de u. Normalmente es mejor elegir una primitiva que se anula en uno de los límites de integración. (Véase, por ejemplo, el Ejercicio 11.10.7.)

11.4.4. *Esperanza*

La Sección 2.2.2 explica cómo se calculan valores esperados multiplicando cada uno de los valores que puede adoptar la variable aleatoria por su probabilidad, y entonces sumándolos. La definición equivalente para una variable aleatoria continua X con una función de densidad de probabilidad p es

$$\mathcal{E}X = \int xp(x)\,dx,$$

integrada sobre todos los valores que toma X. Por ejemplo, la esperanza en dólares en el problema de la Sección 11.4.1 es 4 dólares, porque

$$\mathcal{E}X = \int_0^6 xp(x)\,dx = \int_0^6 x^2/18\,dx = 1/18[x^3/3]_0^6 = 4.$$

Esta esperanza se calcula fácilmente, pero con frecuencia es necesario saber integrar por partes, como en el Ejercicio 11.10.21.

11.5. Duopolio con información incompleta

Econ 11.6 ⟶

Será útil recapitular aquí el modelo del duopolio de Cournot de la Sección 7.2.1. Recordemos que la empresa I y la empresa II producen *widgets*. Ambas deciden simultáneamente cuántos *widgets* producirán. Si la empresa I produce q_1 *widgets* y la empresa II produce q_2 *widgets*, el precio p al que se venden los *widgets* queda determinado por la ecuación de demanda $p = M - q_1 - q_2$. Suponemos que cada empresa busca maximizar los beneficios esperados; el beneficio de la empresa i viene dado por

$$\pi_i(q_1, q_2) = (p - c_i)q_i = (M - c_i - q_1 - q_2)q_i.$$

Aquí c_i es el coste unitario de la empresa i. Se supone que éste es constante, o sea que producir cada *widget* cuesta c_i.

Si toda esta información es conocimiento común, se puede proceder como en la Sección 7.2.1 y calcular un equilibrio de Nash $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$. Cuando $c_1 = c_2 = c$, hallamos un único equilibrio de Nash con $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = (M - c)/3$.

11.5.1. *Información incompleta sobre costes*

En la historia siguiente[15], continúa siendo conocimiento común que el coste en la empresa II es c, pero ahora solamente la empresa I conoce con seguridad sus costes unitarios.

La teoría de Harsanyi nos dice que empecemos por preguntarnos qué actores deseamos considerar. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los costes unitarios posibles que podrían caracterizar a la empresa I. Cada a de $\mathcal{M}$ corresponderá a un posible actor a quien el azar podría seleccionar para dirigir la empresa I. Las preferencias de Mr. a quedan especificadas por su función de beneficios

$$\pi_a(q_1, q_2) = (M - a - q_1 - q_2)q_1.$$

Recordemos, sin embargo, que el tipo de un actor no solamente queda determinado por sus preferencias, sino también por sus creencias. Por tanto, tendremos que volver a Mr. a más adelante para especificar cuáles son sus creencias.

Consideremos ahora la empresa II. Si el azar selecciona a Ms. b para dirigir la empresa II, sus preferencias quedan determinadas por la función de beneficios

$$\pi_b(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_2.$$

[15] Está elaborada a partir del Ejercicio 7.9.15.

Sin embargo, las creencias de Ms. b no están determinadas necesariamente. Para dar interés a la situación, supondremos que cada b del conjunto $\mathcal{F}$ corresponde a un elemento de información distinto sobre la tecnología de la empresa I. Cada Ms. b, por tanto, tiene sus propias creencias acerca del coste unitario de la empresa I. Las resumiremos por medio de una función de densidad de probabilidad $m_b : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$. En particular, la esperanza de Ms. b del coste unitario de la empresa I es

$$\tilde{a}(b) = \int_{\mathcal{M}} a m_b(a)\, da.$$

Volvamos ahora a Mr. a, de quien no especificamos sus creencias. Sin embargo, de la misma forma que la función de densidad de probabilidad de Ms. b describe sus creencias acerca de qué Mr. a está al frente de la empresa I, de la misma forma Mr. a necesita una función de densidad de probabilidad para describir sus creencias acerca de qué Ms. b está al frente de la empresa II. Para simplificar las cosas al máximo[16], supondremos que todos los Mr. a tienen la misma función de densidad de probabilidad $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$. En particular, cualquier Mr. a tendrá la misma esperanza $\bar{\tilde{a}}$ de cuál será la esperanza de Ms. b del coste unitario de la empresa I. De hecho

$$\bar{\tilde{a}} = \int_{\mathcal{F}} \tilde{a}(b) f(b)\, db$$

Si todo lo especificado hasta ahora es conocimiento común[17], entonces el problema original de información incompleta ha sido convertido en un juego de información imperfecta. Es habitual, en este contexto, considerar el problema como uno de dos jugadores. Eso es, en el lenguaje de la Sección 11.2.2, identificaremos al jugador I con Von Neumann, el cual considerará a los Mr. a como a sus agentes. La jugadora II es identificado con Morgenstern, quien, análogamente, considera a cada una de las Ms. b como una de sus agentes.

El jugador I ha de elegir una función $Q_1 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$. Si Mr. a es elegido para dirigir la empresa I, le comunica a Von Neumann su tipo, y le pregunta cuánto debe producir. La respuesta de Von Neumann será $Q_1(a)$. Análogamente, la jugadora II escoge una función $Q_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$. Si Ms. b es elegida para dirigir la empresa II, el consejo que recibirá de Morgenstern es $Q_2(b)$.

[16] Si actores distintos, de los que pueden dirigir la empresa I, pudieran tener creencias distintas, sería necesario ampliar el conjunto $\mathcal{M}$. El tipo de un actor especificaría entonces no solamente su coste unitario a, sino también sus creencias sobre la actriz que dirige la empresa II.

[17] Aquí, esto es suponer *mucho*. Para que la metodología de Harsanyi funcione, siempre hay que encontrar el sitio donde cortar las cadenas del tipo «Creo que él cree que yo creo...». Qué sentido tiene hacerlo, depende de las circunstancias.

El equilibrio de Nash. En un equilibrio de Nash, Q_1 y Q_2 deben ser una respuesta óptima el uno del otro. Así, el consejo del jugador I a cada Mr. a debe ser óptimo suponiendo que la jugadora II ha elegido Q_2. Luego $q_1 = Q_1(a)$ debe maximizar el beneficio esperado de Mr. a:

$$\begin{aligned}\pi_a(q_1, Q_2) &= \mathcal{E}_b\{\pi_a(q_1, Q_2(b))\}\\ &= \int_{\mathcal{F}} (M - a - q_1 - Q_2(b)) q_1 f(b)\, db.\end{aligned}$$

Para hallar el q_1 que maximiza, derivar[18] esta expresión respecto a q_1, manteniendo lo demás constante, e igualar la derivada a cero. Esto da

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathcal{F}} (M - a - 2q_1 - Q_2(b)) f(b)\, db\\ &= (M - a - 2q_1) - \bar{Q}_2,\end{aligned}$$

donde $\bar{Q}_2$ es la esperanza de Mr. a sobre la producción de la empresa II[19]. Se sigue que la función Q_1 que es una respuesta óptima a la función Q_2 viene dada por

$$Q_1(a) = 1/2\,(M - a - \bar{Q}_2). \tag{11.2}$$

El consejo que la jugadora II da a Ms. b también debe ser óptimo suponiendo que el jugador I ha elegido Q_1. Luego $q_2 = Q_2(b)$ ha de maximizar el beneficio esperado de Ms. b:

$$\begin{aligned}\pi_b(Q_1, q_2) &= \mathcal{E}_a\{\pi_b(Q_1(a), q_2)\}\\ &= \int_{\mathcal{M}} (M - c - Q_1(a) - q_2) q_2 m_b(a)\, da\\ &= \int_{\mathcal{M}} (M - c - 1/2(M - a - \bar{Q}_2) - q_2) q_2 m_b(a)\, da.\end{aligned}$$

Derivemos esta expresión con respecto a q_2, manteniendo lo demás constante, e igualemos el resultado a cero. Esto da

$$0 = M/2 - c + \bar{Q}_2/2 - 2q_2 + \tilde{a}(b)/2.$$

[18] No hay que tener miedo a derivar bajo el signo integral. Esto funciona por la misma razón que la derivada de una suma es la suma de derivadas. Solamente en situaciones patológicas surgen dificultades. Pero si le preocupa tener que diferenciar bajo el signo integral, en este caso integre *antes* de diferenciar.

[19] Dada por $\bar{Q}_2 = \int_{\mathcal{F}} Q_2(b) f(b)\, db$. Recuérdese que $\int_{\mathcal{F}} f(b) db = 1$ porque es seguro que b pertenece a $\mathcal{F}$.

Se sigue que la función Q_2, que es una respuesta óptima a la función Q_1 que satisface (11.2), viene dada por

$$Q_2(b) = M/4 - c/2 + \bar{Q}_2/4 + \bar{a}(b)/4. \tag{11.3}$$

Hasta ahora hemos estado trabajando con $\bar{Q}_2$ sin saber qué es. Sin embargo, al ser el valor esperado de Q_2, puede ser calculado a partir de (11.3). De hecho,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_2 &= 1/4M - 1/2c + 1/4\bar{Q}_2 + 1/4 \int_{\mathcal{F}} \bar{a}(b) f(b)\, db \\ 3/4\bar{Q}_2 &= 1/4M - 1/2c + 1/4\bar{\bar{a}} \\ \bar{Q}_2 &= 1/3(M - 2c + \bar{\bar{a}}). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta conclusión en (11.3), obtenemos fórmulas para las funciones Q_1 y Q_2 que dan el equilibrio de Nash (Q_1, Q_2). Las fórmulas son

$$\begin{aligned} Q_1(a) &= 1/6(2M + 2c - 3a - \bar{\bar{a}}), \\ Q_2(b) &= 1/12(4M - 8c - 3\bar{a}(b) + \bar{\bar{a}}). \end{aligned}$$

Discusión. Dos cosas merecen ser destacadas. La primera es que, en el caso especial en que es conocimiento común que el coste unitario de la empresa I es c, $a = \bar{a}(b) = \bar{\bar{a}} = c$, y el resultado se reduce a la situación estudiada en la Sección 7.2.1.

En segundo lugar, es importante observar que la producción de la empresa I depende de lo que el individuo que la dirige cree acerca de lo que el individuo dirigiendo la empresa II cree acerca de los costes unitarios de la empresa I. Esta dependencia es explícita en el término $\bar{\bar{a}}$. El mismo término también afecta directamente a la producción de la empresa II.

Para considerar un caso extremo, supongamos que Mr. a, que dirige la empresa I, tiene en realidad un coste unitario muy bajo. Esto le pondría en una situación muy poderosa si su coste unitario bajo fuera conocimiento común. Sin embargo, puede ser que casi todas las Ms. b piensen que es muy improbable que la empresa I tenga un coste unitario bajo. Si es así, entonces $\bar{a}(b)$, y por tanto, $\bar{\bar{a}}$ serán grandes. Un kibitzer que no supiera nada acerca de lo que cree cada jugador se sorprendería de que la producción de la empresa I fuera tan baja y la de la empresa II tan alta.

11.6. Purificación

Mates 11.7 ⟶

Un tema de interés recurrente en la última parte de este libro ha sido la historia sobre los equilibrios de Nash con estrategias mixtas (Secciones 6.4.3, 7.1.4 y 9.3.3). La interpretación ofrecida aquí elimina la necesidad de pensar que los jugadores aleatorizan activamente sus opciones estratégicas. Cada jugador elige de forma seria y razonada una estrategia pura sin dar vueltas a ninguna ruleta ni agitar ningún cubilete de dados. Sin embargo, los demás

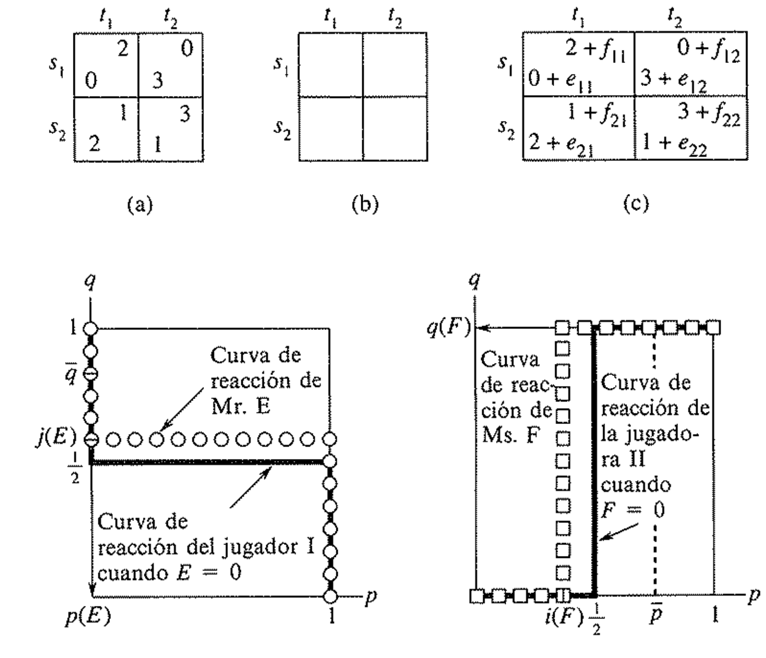


Figura 11.3. Purificación de estrategias mixtas.

jugadores no están seguros de cuál será su elección. Por tanto, asignan probabilidades subjetivas a las opciones disponibles a sus oponentes, y entonces optimizan de acuerdo con estas creencias. Esto es, cada jugador elige como si sus oponentes estuvieran usando estrategias mixtas.

Se dice que esta historia *purifica* la idea de un equilibrio de Nash mixto. Si existe una estrategia mixta, solamente existe en las cabezas de los jugadores cuando quieren predecir lo que harán sus oponentes. El equilibrio se hace entonces un equilibrio en *creencias* en lugar de un equilibrio en *acciones*[20].

A primera vista una historia de purificación no parece que tenga sentido. Si nadie está aleatorizando, ¿por qué la gente no está segura de lo que ocurrirá? Como una aplicación de su teoría de la información incompleta, Harsanyi ofreció un elegante modelo que explica cómo cuadrar este círculo. Esbozaremos aquí su razonamiento aplicado a los juegos bimatriciales de las Figuras 7.7.(a) y 9.5(a). El juego se ha repetido una vez más en la Figura 11.3(a). La matriz de pagos del jugador I se designará por A y la de la jugadora II por B.

[20] Esta idea es atractiva, pero no debe desplazar completamente a otras interpretaciones. En particular, los jugadores de póquer con frecuencia harán sabiamente si aleatorizan activamente.

La Figura 9.5(b) muestra las curvas de reacción de ambos jugadores para el juego. Se cortan exactamente una vez, mostrando que el juego tiene un único equilibrio de Nash. Normalmente este equilibrio de Nash se describiría diciendo que ambos jugadores usan cada una de sus estrategias puras con probabilidad 1/2. Nuetra tarea será formular una interpretación alternativa purificada.

Pagos fluctuantes. Ya que los jugadores no van a aleatorizar, el elemento aleatorio que crea incertidumbre en la cabeza de todos ha de provenir de otra parte. Harsanyi supone que se da un pequeño grado de incertidumbre en la cabeza de cada jugador acerca de cuáles son las preferencias de los otros jugadores. Esto no significa que haya dudas acerca de si el oponente prefiere 100 dólares o un bofetón. Sin embargo, como se ha dicho en la Sección 11.1.2, puede que se den pequeñas incertidumbres acerca del grado de aversión al riesgo del oponente. De hecho, la actitud de una persona hacia el riesgo puede variar ligeramente de hoy para mañana. Estas variaciones se reflejarán en la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de un jugador, y por tanto en los pagos del juego. Al introducir esta incertidumbre se crea una situación de información incompleta. La estudiaremos usando el primer planteamiento de la Sección 11.2.2.

El guión con el que empieza el modelo aparece en la Figura 11.3(b). Que las casillas de la tabla estén vacías indica que la información es incompleta. Un actor, Mr. E, del conjunto $\mathcal{M}$ de actores se identificará con una matriz E 2×2. Las casillas de E representan fluctuaciones a partir de los pagos del jugador I en el juego básico de la Figura 11.3(a). Una actriz, Ms. F, del conjunto $\mathcal{F}$ de actrices también se identificará con una matriz F 2×2 que representa fluctuaciones a partir de los pagos de la jugadora II en el juego básico de la Figura 11.3(a). Así, si fuera conocimiento común quién ha sido designado para cada papel, el juego jugado sería el de la Figura 11.3(c). Sin embargo, el actor Mr. E designado para el papel I solamente sabe que su propia matriz de pagos es $A + E$. No está seguro acerca de la matriz de pagos de su oponente. Análogamente, la actriz Ms. F que desempeña el papel II solamente sabe que su propia matriz de pagos es $B + F$.

La especificación de las matrices de pagos de los actores determina sus preferencias. Por lo que hace a sus creencias, es conocimiento común que la selección de Mr. E y la de Ms. F por el director de reparto son independientes una de otra. No necesitaremos escribir qué funciones de densidad de probabilidad gobiernan esta selección[21].

El cálculo de un equilibrio de Nash. Antes de la jugada de reparto, cada Mr. E elige un vector columna 2×1 $P(E)$. Estos vectores columna representan sus estrategias mixtas. La segunda coordenada de $P(E)$ la

[21] Volviendo a leer la Sección 11.5.1, se observará que allí tampoco era realmente necesario especificar las funciones de densidad de probabilidad.

representaremos por $p(E)$. Esta es la probabilidad con la que $P(E)$ requiere que se juegue la segunda estrategia pura de Mr. E. Si nuestro proyecto de purificación tiene éxito, la estrategia mixta $P(E)$ resultará ser realmente una estrategia pura, y por tanto $p(E)$ será 0 ó 1. La jugadora II no sabe qué es E, pero puede calcular que la elección de estrategia mixta esperada por el jugador I es $\bar{P} = \mathcal{E}_E\{P(E)\}$. La segunda coordenada de este vector columna 2×1 se designará por $\bar{p}$.

Una notación similar es necesaria para Ms. F. Ella elige un vector 2×1 $Q(F)$ que representa una estrategia mixta para ella. Su segunda coordenada se representa por q(F). El jugador I puede calcular que la elección de estrategia mixta esperada por la jugadora II da $\bar{Q} = \mathcal{E}_F\{Q(F)\}$. La segunda coordenada de este vector columna 2×1 se representará por $\bar{p}$.

Recordemos de la Sección 6.4.4 que el pago de Mr. E cuando se enfrenta a Ms. F viene dado por $P(E)^{\mathrm{T}}(A + E)Q(F)$. Puesto que no sabe quién es su oponente, calculará el valor esperado de esta cantidad:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_F\{P(E)^{\mathrm{T}}(A + E)Q(F)\} &= P(E)^{\mathrm{T}}(A + E)\ \mathcal{E}_F\{Q(F)\} \\ &= P(E)^{\mathrm{T}}(A + E)\bar{Q} \end{aligned} \tag{11.4}$$

Análogamente, el pago esperado de Ms. F es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E\{P(E)^{\mathrm{T}}(B + F)Q(F)\} &= \mathcal{E}_E\{P(E)^{\mathrm{T}}\}(B + F)Q(F) \\ &= \bar{P}^{\mathrm{T}}(B + F)Q(F). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Si cada actor da una respuesta óptima a las elecciones de los otros, como requiere un equilibrio de Nash, entonces (11.4) nos dice que $P(E)$ debe ser una respuesta óptima a $\bar{Q}$ en un juego en el que la matriz de pagos del jugador I es $A + E$. La Figura 11.3(d) muestra la curva de reacción del jugador I en un juego así[22]. Al buscar una respuesta óptima a $\bar{Q}$, se preocupa de si $\bar{q} > j(E)$ o si $\bar{q} < j(E)$. En el primer caso, toma $p(E) = 0$; en el segundo caso toma $p(E) = 1$. Sólo es posible que Mr. E use una estrategia mixta cuando $\bar{q} = j(E)$, porque es solamente entonces que es indiferente entre sus dos estrategias puras.

La situación correspondiente para Ms. F se muestra en la Figura 11.3(e). Ella toma $q(F) = 0$ si $\bar{p} < i(F)$, y $q(F) = 1$ si $\bar{p} > i(F)$. Sólo podría usar una estrategia mixta cuando $\bar{p} = i(F)$.

Pequeñas fluctuaciones. Hasta ahora no hemos usado el hecho de que los valores de las casillas de E y F representan *pequeñas* fluctuaciones en los pagos del juego de la Figura 11.3(a). Esta condición se necesita para que las curvas de reacción de las Figuras 11.3(d) y 11.3(e) estén próximas

[22] Recordemos que en estos diagramas usamos la convención de representar gráficamente las probabilidades con las que cada jugador o jugadora usa su *segunda* estrategia pura.

a las curvas de reacción para el caso en que E y F son la matriz nula. En particular, $i(F)$ y $j(E)$ serán ambos aproximadamente 1/2 para todos los E y F[23].

Se sigue que $\bar{p}$ y $\bar{q}$ deben estar próximos a 1/2. Esta conclusión es consecuencia de que el juego original de la Figura 11.3(a) no tiene equilibrios en estrategias puras. Supongamos, por ejemplo, que $\bar{p}$ fuera mucho mayor que 1/2, de manera que $i(F) < 1/2$ para todo F. Entonces $q(F) = 1$ para todo F, y por tanto, $\bar{q} = 1$. Luego $p(E) = 0$ para todo E, y por tanto $\bar{p} = 0$. Pero esto no es consistente con la hipótesis que $\bar{p} > 1/2$.

Inventario. ¿Qué muestra el razonamiento?

1. Todos los actores usan una estrategia pura[24].
2. Las creencias del actor en el papel I sobre lo que su oponente hará quedan resumidas en $\bar{q}$. Esta es la probabilidad con la que la jugadora II usará su segunda estrategia pura, según cree el jugador I. Análogamente, la jugadora II cree que el jugador I usará su primera estrategia pura con probabilidad $\bar{p}$.
3. Cuando las fluctuaciones se hacen pequeñas, $\bar{p}$ y $\bar{q}$ se acercan a 1/2.

Así, aunque los jugadores usen actualmente estrategias puras, sus creencias acerca de lo que el oponente hará se acercan al equilibrio de Nash del juego subyacente cuando las fluctuaciones en los pagos tienden a desaparecer. Esta es la purificación prometida del equilibrio de Nash mixto.

11.7. Subastas y diseño de mecanismos

Econ 11.8 ⟶

Según la tradición, los que buscan la revelación primero han de purificarse. La sección anterior nos inició en lo que pasa por ser un rito purificador en teoría de juegos. Es tiempo pues de desvelar los misterios del principio de revelación. Sin embargo, primero hemos de decir algo acerca del problema del *diseño* de juegos que responden a un objetivo específico.

11.7.1. Subastas

La gente que quiere vender objetos habitualmente quiere venderlos por el precio más alto que pueda conseguir. A veces no tienen otra opción que negociar el precio con posibles compradores, como se ha visto en el Capítulo 5. A menudo existe un mercado bien establecido que no les deja intervenir en el problema de fijar precios. Sin embargo, en algunos casos, la vendedora puede elegir un conjunto de reglas que determinan cómo será vendido su objeto. Este conjunto de reglas se llama un *mecanismo* para la venta del objeto. Una vendedora neutral al riesgo que tenga el poder de comprometerse con un mecanismo de venta específico querrá obviamente escoger aquel mecanismo que maximice el precio de venta esperado. Buscará, por tanto, un mecanismo *óptimo*.

[23] Para ser exactos, sean todos los valores de E y F menores que δ en valor absoluto. Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un δ_0 tal que $|i(F) - 1/2| < \varepsilon$ y $|j(E) - 1/2| < \varepsilon$ siempre que $0 < \delta < \delta_0$.

[24] Excepto, tal vez, para el Mr. E para quien $\bar{q} = j(E)$ y la Ms. F para quien $\bar{p} = i(F)$. Pero la probabilidad de que cualquiera de ellos sea elegido en la jugada de reparto es cero.

Siempre que surge la cuestión de qué es *óptimo*, hay que empezar por considerar qué es *factible*. ¿Cuál es el conjunto de mecanismos entre los que el vendedor puede escoger? Esta es una cuestión muy difíl de contestar en términos precisos. De hecho, el principio de revelación es útil en gran medida porque en ocasiones permite evitar la cuestión. Sin embargo, no es difícil dar ejemplos de algunos de los mecanismos que un vendedor puede tomar en consideración. Llamaremos *subastas* a los mecanismos a considerar, aunque no en todos ellos nos encontraremos necesariamente con un subastador con martillo. Donde sea necesario, y para simplificar las cosas, supondremos que todo el mundo es neutral al riesgo.

La subasta más simple es tal vez la que practican los vendedores al por menor. La podemos llamar *subasta de lo-toma-o-lo-deja*. Los objetos están marcados con un precio y los posibles compradores pueden tomarlos o dejarlos[25].

Las *subastas de licitación en sobre cerrado* son un poco más complicadas. Cada comprador o compradora potencial escribe en privado su oferta en un papel que encierra y sella en un sobre. La vendedora se compromete a vender el objeto a quienquiera que haya ofertado más. (Se necesita alguna manera de romper los empates. Nuestra hipótesis será que el vencedor es escogido al azar entre los postores que han hecho la oferta más alta.)

La llamada[26] *subasta inglesa* es el tipo más común de subasta. Un subastador acepta pujas orales. La puja continúa hasta que nadie está dispuesto a mejorar la última oferta. Quienquiera que haya pujado en último lugar se queda con el objeto al precio de la última puja.

Las *subastas holandesas* requieren que el subastador empiece anunciando un precio elevado. Este se va entonces disminuyendo gradualmente hasta que un comprador lo para. El primer comprador que lo hace se queda el objeto al precio que valía cuando él o ella intervino. Las tiendas de muebles usados a veces efectúan subastas holandesas reduciendo el precio de las piezas no vendidas un 10 % cada mes.

También se pueden considerar subastas más exóticas. Por ejemplo, a algunos profesores de teoría de juegos les gusta subastar un dólar de

[25] Aunque el cliente no debería apresurarse a creer que los establecimientos minoristas están *realmente* comprometidos con este mecanismo. Incluso los establecimientos más lujosos terminan a menudo regateando sobre los objetos más valiosos, si se ven sometidos a una presión lo bastante firme.

[26] Sospecho que se le llama así para distinguirla de la subasta holandesa.

acuerdo con las reglas siguientes. La puja se hace como en la subasta inglesa, y el mayor postor se queda con el dólar, pero *todo el mundo* paga su puja más alta, *incluyendo* los que no ganan el dólar[27].

En una *subasta de Vickrey*, el objeto se vende al mayor postor, pero al precio mayor ofrecido por un *perdedor*. Esta será la segunda mejor oferta, excepto que se haya dado un empate en el primer lugar. (El ganador se elige entonces al azar entre los mayores postores.) Solamente consideraremos el caso en que las pujas se hacen en sobre cerrado. (Si existe peligro de confusión, siempre se puede clarificar que tipo de licitación en sobre cerrado se está considerando por medio de la distinción entre subastas de primer precio y de segundo precio, como en la Sección 0.1.2.)

A primera vista puede parecer una locura que una vendedora elija una subasta de Vickrey. ¿Por qué ha de conformarse con el segundo mayor precio? ¿Por qué no usa una subasta de primer precio y licitación en sobre cerrado y vende el objeto al mayor postor y al precio que ofreció? Esta es una de las paradojas mencionadas en la Introducción. La razón es que la vendedora conseguirá pujas mayores al usar una subasta de Vickrey. De hecho, en una subasta de Vickrey, encerrar en el sobre la verdadera valoración[28] del objeto es una estrategia débilmente dominante para cada comprador. No se gana nada pujando por *debajo* de la verdadera valoración porque, cualesquiera que sean las ofertas que los otros compradores han encerrado en sus sobres, pujar por debajo de la verdadera valoración solamente disminuye la probabilidad de ganar la subasta sin alterar el precio a pagar si finalmente se gana. De la misma forma, no se gana nada pujando por *encima* de la verdadera valoración porque, si esto es necesario para ganar, debe ser porque alguien ha hecho una oferta que es por lo menos igual a la verdadera valoración. En este caso, habrá que pagar por lo menos la verdadera valoración, y tal vez habrá que pagar más.

Así pues, el uso de una subasta de Vickrey asegura a la vendedora la segunda mayor valoración de entre el conjunto de compradores en potencia, en el supuesto de que éstos usen la estrategia débilmente dominada (Ejercicio 11.10.31). Una subasta inglesa no va mejor. De hecho, genera exactamente el mismo resultado. Nadie va a dejar de pujar en una subasta inglesa si existe la posibilidad de comprar el objeto por menos de su valoración, y nadie continuará pujando una vez que el último rival ha dejado de pujar. Por tanto, como las subastas de Vickrey, las subastas inglesas conducen a vender el objeto al precio de la segunda mayor valoración entre los compradores potenciales (Ejercicio 11.10.33). Lo que es más sorprendente es que no se puede contar con mejorar el resultado por medio de una subasta de licitación en sobre cerrado y primer precio (Sección 0.1.2 y Ejercicio 11.10.39). Tampoco las subastas holandesas mejoran las cosas en absoluto.

[27] Por experiencia sé que los estudiantes americanos pujan, a veces acaloradamente. Los estudiantes ingleses no pujan.

[28] Esta coincide con el precio de reserva—el precio que le deja indiferente entre adquirir el objeto y dejarlo en manos del vendedor.

Así como una subasta inglesa es esencialmente lo mismo que una subasta de Vickrey, las subastas holandesas son esencialmente lo mismo que las subastas de primer precio y licitación en sobre cerrado (Ejercicio 11.10.34).

Por supuesto, si la vendedora supiera todas las valoraciones verdaderas de los compradores, podría vender el objeto al comprador o compradora con la mayor valoración a su precio de reserva[29]. Los economistas dirían entonces que ella ha extraído todo el excedente de la situación, y por tanto que ha conseguido un resultado que es el «óptimo absoluto». Sin embargo, raramente la vendedora estará bien informada acerca de las verdaderas valoraciones de los compradores. Por tanto se tendrá que conformar con un resultado que será un «óptimo relativo». Qué excedente es capaz de extraer, dependerá de la habilidad con que elija el mecanismo de venta. Hemos visto que las subastas de Vickrey le aseguran la segunda mayor valoración entre los potenciales compradores. Con todo, a veces es posible mejorar este resultado.

11.7.2. Principales y agentes

¿Cómo se puede formular el problema del diseño de mecanismos en términos de la teoría de juegos? La discusión se formula muchas veces en términos de un *principal* y uno o varios *agentes*[30]. En la Sección 11.7.1, el principal es la vendedora y los agentes son los compradores potenciales. Sin embargo, las mismas circunstancias nos servirán para muchos otros problemas.

Por ejemplo, el principal puede ser una empresaria y los agentes pueden constituir la fuerza de trabajo de la empresa. La empresaria quiere maximizar el esfuerzo que hacen los trabajadores, pero no puede controlarles de cerca. La empresaria necesita, por tanto, inventarse un *esquema de incentivos* que premia al laborioso y penaliza al perezoso. Pero, ¿cómo distinguir entre ellos, si sus hábitos de trabajo no son directamente observables? A veces se hace referencia a este problema principal-agentes con los términos de *riesgo moral*. La razón para esta terminología es que el principal se arriesga, si confía en que los escrúpulos morales de sus trabajadores son una garantía de que ellos harán lo que prometieron después de llegar a un acuerdo sobre un contrato de trabajo que no es compatible con sus incentivos.

Los problemas de riesgo moral a veces se llaman problemas de *acción oculta* porque el principal se preocupa de acciones de los agentes que no puede observar. Aunque los métodos de análisis para ambos tipos de problemas son básicamente los mismos, nos concentraremos en los proble-

[29] O tal vez a un penique menos que su precio de reserva. Como en el juego del ultimátum de la Sección 5.8.1, ella haría una demanda del tipo lo-toma-o-lo-deja.

[30] No se trata aquí de agentes en el sentido de la Sección 10.4.2. Aquí se trata de individuos independientes que actúan por sí mismos.

mas que podemos llamar de *tipo oculto* porque la teoría de Harsanyi ya está formulada en estos términos. Los libros de texto a veces introducen estos problemas principal-agentes con ejemplos de *selección adversa*. Si una compañía de seguros, por ejemplo, no es cuidadosa con el diseño de los contratos de seguros que vende, se puede fácilmente encontrar que solamente escogen comprárselos tipos de alto riesgo. Sus clientes se habrán autoseleccionado de una forma que es contraria a los beneficios de la compañía. Los economistas que han estudiado el «modelo de los cacharros» de Akerlof, en el que en equilibrio únicamente se venden y compran coches usados defectuosos, ya conocen las dificultades que pueden surgir.

Sin embargo, el problema principal-agentes con tipos ocultos tal vez aparece en su forma más pura cuando el principal es un gobierno benevolente que quiere redistribuir la riqueza entre ricos y pobres. Los agentes son entonces los ciudadanos de la nación. ¿Cómo determina el gobierno quién es rico y quién pobre? No sería prudente confiar en un cuestionario, si todo el mundo sabe que el resultado de declararse rico son impuestos y el resultado de declararse pobre es un cheque de la Seguridad Social.

Es posible formular el problema principal-agentes de una forma abstracta que incluye una amplia gama de aplicaciones simultáneamente. Pero aquí no pretenderemos hacer una cosa tan ambiciosa. En lugar de ello, ilustraremos las ideas con una versión simplificada del problema de las subastas discutido en la Sección 11.7.1. Es un problema con tipos ocultos porque la vendedora no sabe las valoraciones que los compradores potenciales otorgan al objeto que quiere vender. Una de las ventajas de trabajar con un modelo de subasta es que las cosas continúan siendo interesantes cuando se supone de conocimiento común que todo el mundo es neutral al riesgo. Con frecuencia, otras variantes del problema principal-agentes dependen crucialmente del hecho de que el principal y los agentes tienen distintas actitudes hacia el riesgo.

La formulación de un problema principal-agentes. Ms. Principal tiene una casa preciosa que quiere vender, y que no vale nada para ella si no puede venderla. Hay dos interesados, el agente I y el agente II. Cada agente conoce su propia valoración de la casa, pero esta valoración es desconocida para cualquier otra persona. Hemos de enfrentarnos, por tanto, a un problema de información incompleta.

Supondremos que el conjunto de actores $\mathcal{M}$ que pueden desempeñar el papel de agente I consiste simplemente de dos individuos, Mr. Alto y Mr. Bajo. Análogamente, el conjunto $\mathcal{F}$ de actrices que pueden desempeñar el papel de agente II solamente consiste de Ms. Alta y Ms. Baja. Los actores y actrices Altos valoran la casa en 4 millones de dólares. Los actores y actrices Bajos la valoran en 3 millones de dólares. Supondremos conocimiento común que la jugada de reparto selecciona independientemente actores y actrices, y que la probabilidad de elegir un actor o actriz Bajo es p.

Ms. Principal empieza por escoger un mecanismo. Es importante que se *comprometa* con su elección. Ella *no puede* escoger un mecanismo, induciendo con ello a los agentes a revelar alguna información, y entonces cambiar de idea y anunciar que, finalmente, ha decidido usar otro mecanismo[31].

El mecanismo escogido constituye un *guión* con dos papeles: uno para el agente I y otro para el agente II. La teoría de Harsanyi convierte este guión en un juego de información imperfecta. Si los agentes son racionales, Ms Principal podrá predecir cómo se jugará el juego que ella ha inventado para ellos. En particular, podrá predecir sus propias ganancias esperadas. El último paso es postular que ella optará por el mecanismo que *maximiza* sus beneficios esperados. Entonces habrá diseñado un mecanismo óptimo para el problema.

El resultado óptimo absoluto para Ms. Principal sería vender la casa por 4 millones de dólares cuando uno de los agentes es Alto y por 3 millones de dólares cuando ambos agentes son Bajos. Ya que ambos agentes son Bajos con probabilidad p^2, el pago esperado de Ms. Principal con su resultado óptimo absoluto es $3p^2 + 4(1 - p^2) = 4 - p^2$. Sin embargo, la ignorancia de Ms. Principal acerca de las verdaderas valoraciones de los agentes significa que ella no podrá conseguir su óptimo absoluto. Es instructivo ver en qué medida se acerca a él usando algunas de las subastas simples mencionadas en la Sección 11.7.1.

Lo-toma-o-lo-deja. Si Ms. Principal decidiera simplemente anunciar un precio de lo-toma-o-lo-deja, sería estúpida si considerara otros precios que no fueran 3 ó 4 (millones de dólares). Si fija el precio en 3, la casa se venderá a este precio cualesquiera que sean los compradores[32] y su pago esperado será por tanto 3. Este es un resultado óptimo relativo porque $3 < 4 - p^2$ excepto cuando $p = 1$.

Si fija el precio en 4, la casa será vendida a este precio excepto si los dos agentes son Bajos. Si lo son, la casa no se venderá. En esta situación, el pago esperado de la vendedora será $4(1 - p^2)$. Este resultado también es óptimo relativo, porque $4(1 - p^2) < 4 - p^2$ excepto cuando $p = 0$.

Si Ms. Principal solamente pudiera usar subastas de lo-toma-o-lo-deja, elegiría fijar un precio de 3 cuando $3 > 4(1 - p^2)$. Esto ocurre si y sólo si $p > 1/2$. Si $p < 1/2$, escogería fijar un precio de 4.

Vickrey. Ya sabemos que es un equilibrio de Nash que cada agente oferte por su verdadera valoración en una subasta de Vickrey. En este ejemplo, el mayor precio pujado por un perdedor será 3, excepto si ambos agentes son Altos. En este último caso, la puja perdedora más alta es 4. (Recordemos que los empates se rompen aleatoriamente.) En esta subasta, el pago esperado de Ms. Principal es $4(1 - p)^2 + 3(1 - (1 - p)^2) = 3 + (1 - p)^2$. Este es un óptimo relativo porque $3 + (1 - p)^2 < 4 - p^2$, excepto si $p = 0$ ó $p = 1$.

[31] Esta es una de las razones por las que la teoría no siempre es apropiada, cuando el principal es el gobierno.

[32] ¿Por qué un actor o actriz Bajo comprará, si es indiferente entre comprar y no comprar? Recordar la discusión de la Sección 5.8.2.

Sin embargo, la subasta de Vickrey es mejor que fijar un precio de lo-toma-o-lo-deja igual a 3, excepto si $p = 1$. Es mejor que fijar un precio de lo-toma-o-lo-deja igual a 4 cuando $3 + (1 - p)^2 > 4(1 - p)^2$. Esto ocurre cuando $2/5 < p < 1$.

Inglesa. Considerar una subasta inglesa no nos servirá de nada porque las subastas inglesas y las de Vickrey son esencialmente la misma cosa.

Primer precio y licitación en sobre cerrado. Aquí las cosas se complican, porque los agentes con una valoración alta necesariamente tendrán que aleatorizar sus pujas. La Sección 0.1.2 describe un equilibrio de Nash en el caso en que $p = 1/2$. El Ejercicio 11.10.39 pide hacer lo mismo para el caso general. Es digno de atención que el precio de venta esperado cuando se usa este equilibrio de Nash es $3 + (1 - p)^2$, exactamente como en la subasta de Vickrey. Esto no es por casualidad, como lo confirma el Ejercicio 11.10.38.

Holandesa. Un subasta holandesa es esencialmente lo mismo que una subasta de primer precio y licitación en sobre cerrado. Por tanto, aún no hemos superado la subasta de Vickrey.

Vickrey modificada. Hasta ahora la subasta de Vickrey parece algo bueno cuando $2/5 < p < 1$. Sin embargo, es posible mejorar la subasta de Vickrey. Limitemos los agentes a pujar 3 ó 4, y hagamos que el ganador pague la *media* de las pujas ganadora y perdedora.

Continúa siendo un equilibrio de Nash que todos los actores oferten sus verdaderas valoraciones. Para verlo, consideremos primero Mr. Bajo. Si oferta 3, no consigue nada si pierde y tampoco si gana (porque ha de pagar su verdadera valoración). Si oferta 4, no consigue nada si pierde y como mucho $3 - 1/2\,(3 + 4) = -1/2$ si gana. Le va mejor pujando 3, y le mismo le pasa a Ms. Baja.

Consideremos ahora a Mr. Alto. Si oferta 4, y si su oponente es Ms. Alta, no consigue nada cuando gana y tampoco nada cuando pierde. Si su oponente es Ms. Baja, él ganará y obtendrá un pago de $4 - 1/2\,(3 + 4) = 1/2$. Así pues, su pago esperado al pujar 4 es $p/2$. Si puja 3, no consigue nada cuando su oponente es Ms. Alta. Cuando su oponente es Ms. Baja, él ganará con probabilidad 1/2. Luego su pago esperado al pujar 3 es $1/2(4 - 3)p = p/2$. Se sigue que Mr. Alto no tiene incentivos para pasarse de pujar 4 a pujar 3 porque es indiferente entre ambas pujas. Lo mismo vale para Ms. Alta.

¿Qué es lo que consigue Ms. Principal cuando se usa este equilibrio de Nash? Su pago esperado es $4(1 - p)^2 + 1/2(3 + 4)p(1 - p) + 1/2(3 + 4)(1 - p)p + 3p^2 = 4 - p$. Este continúa siendo un óptimo relativo porque $4 - p < 4 - p^2$, excepto cuando $p = 0$. Pero es mejor que la subasta de Vickrey regular, excepto si $p = 0$ ó $p = 1$. También es mejor que fijar un precio de lo-toma-o-lo-deja de 4, siempre que $4 - p > 4(1 - p^2)$. Esto ocurre cuando $1/4 < p \leqslant 1$.

Resumen. De las subastas consideradas, la que va mejor es fijar un precio de lo-toma-o-lo-deja de 4 cuando $0 \leqslant p \leqslant 1/4$, y la subasta de Vickrey modificada va mejor cuando $1/4 \leqslant p \leqslant 1$. De hecho, el uso de estos esquemas es *óptimo* para Ms. Principal. Para ver por qué, necesitamos algo más de teoría.

11.7.3. Principio de revelación

Ha llegado el momento de que la montaña se agite y produzca un ratón. Los mecanismos considerados en la Sección 11.7.1 son mecanismos *indirectos.* En un mecanismo *directo*, a los agentes se les pregunta directamente cuál es su tipo. El *principio de revelación* dice que cualquier cosa que se puede hacer con un mecanismo indirecto también se puede hacer con un mecanismo directo.

Este resultado es un ratón porque no se requiere esfuerzo alguno para deducirlo de una proposición rigurosa sobre lo que dice el problema principal-agentes. Sin embargo, como veremos, es un ratón muy útil, y vale la pena enunciar de nuevo el problema del principal y los agentes para estar seguros de que hemos resuelto los problemas.

El principal se compromete con el mecanismo M con el objetivo de inducir uno o más agentes a conducirse de una manera favorable a ella. Ella no conoce los tipos de los agentes. Sin embargo, es conocimiento común de qué forma el azar seleciona los actores y actrices para los distintos papeles de agente. La elección de M por el principal, por tanto, sirve de guión para un juego G. La conducta de los actores y actrices en G determina un resultado x. Si los actores son racionales, el principal sólo podrá conseguir aquellos resultados x que se obtienen cuando los actores usan un equilibrio de Nash en G. Este x es *implementable* para el principal. Puede conseguirlo, si lo quiere[33], seleccionando el mecanismo M.

El principio de revelación simplifica la tarea de decidir si un resultado es implementable o no. En términos precisos, dice así:

Teorema 11.7.1 (Gibbard). Cualquier x implementable también se puede implementar como un equilibrio de Nash sincero de un juego H derivado de un mecanismo directo D.

Demostración. Ya que x es implementable, existe un mecanismo M que lo implementa. Para implementar x con un mecanismo directo, el principal sólo necesita anunciar que se usará el mecanismo M, pero que se propone ahorrar a los agentes el trabajo de hallar las estrategias que van a usar en el

[33] Siempre que, cuando existen múltiples equilibrios de Nash en G, pueda inducir a los actores a usar el equilibrio que ella escoja. A veces esta hipótesis es cuestionable, pero no la cuestionaremos aquí. En particular, no compararemos las virtudes de un equilibrio sincero en un mecanismo directo con las virtudes de otros equilibrios posibles.

juego G que la elección de M les obliga a jugar. Ella jugará sus estrategias en lugar de ellos. Ellos sólo han de decirle a ella sus tipos, y, para cada tipo de actor, ella usará la estrategia que este actor usaría en el equilibrio de Nash de G que da el resultado x.

Ningún actor o actriz tiene incentivos ahora para no decir la verdad sobre su tipo, siempre que los demás actores también vayan a decir la verdad. No se puede sacar nada de engañar al principal. Usted no quiere por nada del mundo que ella juegue por usted una estrategia que usted no habría escogido si hubiera podido. □

Puesto que tiene tan poco contenido, no deberíamos esperar demasiado del principio de revelación. En particular, no proporciona un método mágico para inducir a la gente a revelar sus verdaderos ingresos de manera que se puedan cobrar impuestos de manera justa. Solamente dice que, si se puede hacer algo, entonces se puede hacer con solo pedir a la gente que revele sus características verdaderas. Sin embargo, esta es una idea valiosa para el diseño óptimo de mecanismos porque significa que, al considerar qué resultados son implementables, solamente es necesario considerar resultados que son implementables por mecanismos *directos*. Para ver como funciona esto, será útil volver al ejemplo de la Sección 11.7.2.

11.7.4. El diseño de una subasta óptima

La Sección 11.7.2 consideró varios esquemas de subastas que el principal puede usar. Hay muchos más. El principal podría fijar derechos de entrada que todos los postores han de pagar. Podría fijar pujas mínimas, o restringir de cualquier otra forma las pujas que es posible hacer. Podría incluso distribuir «cebos» o falsos compradores en la sala de subastas para empujar hacia arriba las pujas, si éstas no suben naturalmente. Las posibilidades son extraordinariamente grandes. Sin embargo, el principio de revelación nos dice que, al considerar qué resultados es posible conseguir, todas las posibilidades que no surgen de un equilibrio sincero en un mecanismo directo pueden ser ignoradas. Explotaremos este hecho aquí para resolver el problema del diseño de una subasta planteado en la Sección 11.7.2. Para simplificar las cosas, restringiremos nuestra atención al caso de equilibrios simétricos de mecanismos que tratan simétricamente a los agentes I y II[34]. Como siempre que estudiamos subastas, suponemos que es conocimiento común que todo el mundo es neutral al riesgo.

[34] Los llamados «juegos de información incompleta» son llamados con frecuencia «juegos de información asimétrica», presumiblemente porque, *después* de la jugada de reparto, los actores desempeñando los papeles de los jugadores I y II pueden ser de tipos diferentes. Esto tiene la consecuencia desgraciada de que obliga a describir un juego como el que consideramos aquí como un «juego simétrico de información asimétrica».

La caracterización de equilibrios sinceros. El mecanismo directo escogido por Ms. Principal se caracterizará por cuatro números, h, l, H y L. Están definidos de la siguiente manera. Siempre que los demás actores dicen la verdad, un actor que dice «Alto» ganará la subasta con cierta probabilidad y pagará un precio. Sea h la probabilidad con la que gana la subasta. Cuánto pagará dependerá de que gane la subasta, y puede que de otras cosas también. El parámetro H, por tanto, se considera que es el *valor esperado* de la cantidad que pagará. En las mismas circunstancias, un actor que anuncia «Bajo» ganará la subasta con probabilidad l y tendrá la esperanza de pagar L. Un actor Alto que anuncia «Alto» obtendrá, por tanto, un pago esperado conjunto de $4h - H$, si se le asigna un papel. Un actor Alto que anuncia «Bajo» conseguirá $4l - L$. Para que la sinceridad sea óptima para un actor Alto, es, por tanto, necesario que

$$4h - H \geqslant 4l - L. \tag{11.6}$$

Análogamente, para que la sinceridad sea óptima para un actor Bajo,

$$3l - L \geqslant 3h - H. \tag{11.7}$$

Las Desigualdades (11.6) y (11.7) son llamadas restricciones de *compatibilidad con los incentivos* porque expresan el requerimiento de que el principal debe proporcionar incentivos que hagan óptimo para los agentes tomar las acciones que el principal quiere inducir con el mecanismo que está diseñando. Una consecuencia simple de las restricciones presentes de compatibilidad con los incentivos es que $h \geqslant l$ y $H \geqslant L$. Así, un actor Alto gana con mayor frecuencia que un actor Bajo, pero espera pagar más.

El problema de optimización de Ms. Principal. Ms. Principal no sabe los tipos de los agentes. Por tanto, espera que los agentes le paguen

$$F = (1 - p)H + pL. \tag{11.8}$$

Su objetivo es maximizar la cantidad F eligiendo adecuadamente h, l, H y L. Sin embargo, no puede elegir estos parámetros libremente. No puede, por ejemplo, hacer H y L tan grandes como quiera. Si los hace demasiado grandes, ningún actor querría actuar. Para asegurar la participación de ambos tipos de actores, es necesario que

$$4h - H \geqslant 0, \tag{11.9}$$

$$3l - L \geqslant 0. \tag{11.10}$$

Las Desigualdades (11.9) y (11.10) se llaman las restricciones de *racionalidad individual* porque, como en la Sección 5.4.2, expresan la condición de que el mecanismo que el principal está diseñando debe ofrecer a los agentes por su participación por lo menos tanto como obtienen sin participar.

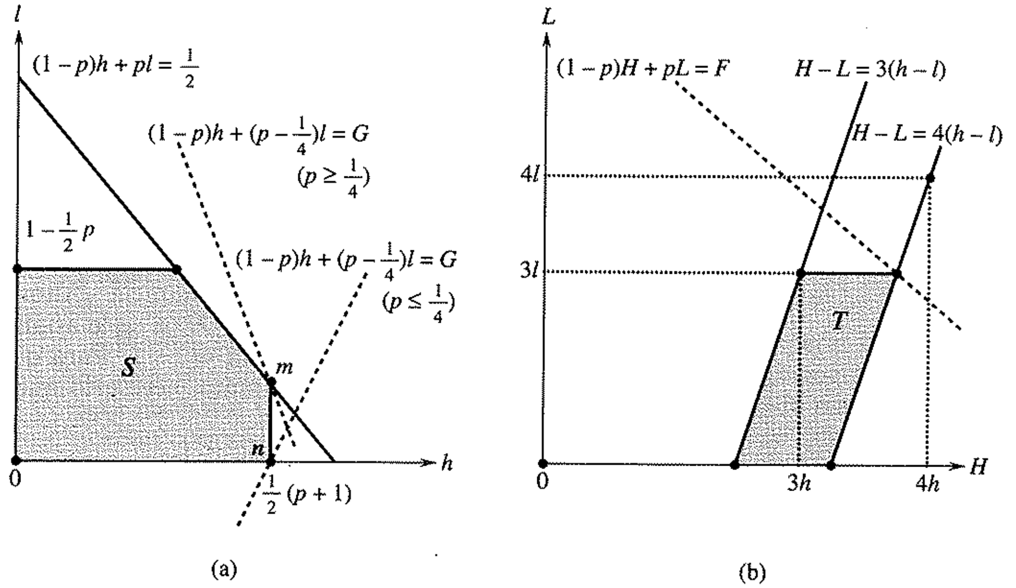


Figura 11.4. El diseño de una subasta óptima.

Por lo que se refiere a las probabilidades h y l, Ms. Principal cree que la probabilidad de que el agente I gane es $(1 - p)h + pl$. En una subasta simétrica, ésta no puede exceder 1/2. También debe existir una cota para h. En una subasta simétrica, un actor Alto no puede conseguir nada mejor que ganar siempre contra un oponente Bajo y la mitad de las veces contra un oponente Alto. Así pues, $h \leqslant p + 1/2\,(1 - p) = 1/2(p + 1)$. Análogamente, $l \leqslant 1 - p/2$. Las desigualdades que condicionan h y l son, por tanto,

$$(1 - p)h + pl \leqslant 1/2 \tag{11.11}$$

$$h \leqslant 1/2(p + 1) \tag{11.12}$$

$$l \leqslant 1 - p/2. \tag{11.13}$$

La Figura 11.4(a) muestra el conjunto S de pares (h, l) que satisfacen estas desigualdades[35].

Tal vez son necesarias más restricciones para la elección de h, l, H y L por Ms. Principal, pero veamos cuál es la solución a su problema de optimización con las condiciones listadas hasta ahora. De hecho, ella está ahora enfrentada con un problema de programación lineal. Su objetivo es maximizar la «función objetivo lineal» $(1 - p)H + pL$ sujeta a las «desigualdades lineales» (11.6), (11.7), (11, 9), (11.10), (11.11), (11.12) y (11.13). Estos

[35] Obsérvese que $1/2\,(p + 1) \leqslant 1/2(1 - p)^{-1}$ y $1/2(1 - p) \leqslant 1/2\,p^{-1}$.

problemas pueden ser muy difíciles, si uno no está dispuesto a intentar un trabajo de tanteo judicioso. El problema importante es: ¿cuáles de las restricciones son *efectivas*?[36].

Simplificación del problema. Aquí no es difícil adivinar que las restricciones efectivas, por lo que hace a H y a L, son (11.6) y (11.10). La intuición nos dice que el actor Alto será el que se sentirá más inclinado a mentir, y el actor Bajo el que se sentirá más motivado a no participar. La intuición puede ser contrastada examinando la Figura 11.4(b), que muestra el conjunto T de todos los pares factibles (H, L) para un par (h, l). Obsérvese que, siempre que $h \geqslant l$, la expresión $F = (1 - p)H + pL$ se maximiza[37] en el punto (H, L) que satisface

$$H - L = 4(h - l) \tag{11.14}$$

$$L = 3l. \tag{11.15}$$

Esta observación simplifica el problema enormemente. Sustituyamos $H = 4h - l$ y $L = 3l$ en (11.8). Tenemos entonces que maximizar

$$G = (1 - p)h + (p - 1/4)l$$

sujeta a las restricciones (11.11), (11.12) y (11.13). La ubicación del máximo depende de si $p \geqslant 1/4$ o $p \leqslant 1/4$. La Figura 11.4(a) muestra que el máximo se alcanza en m en el primer caso y en n en el segundo[38].

El caso p ⩾ 1/4. Ya que $m = (1/2\,(p + 1), 1/2p)$, $\tilde{h} = 1/2\,(p + 1)$ y $\tilde{l} = 1/2\,p$ son valores óptimos para h y l en el caso $p \geqslant 1/4$. Los valores correspondientes para $\tilde{H}$ y $\tilde{L}$ son $\tilde{H} = 4\tilde{h} - \tilde{l} = 3/2p + 2$ y $\tilde{L} = 3\tilde{l} = 3/2p$. Ms. Principal consigue entonces un pago esperado de $2\tilde{F} = 2(1 - p)\tilde{H} + 2p\tilde{L} = 4 - p$.

El caso p ⩽ 1/4. Ya que $n = (1/2(p + 1), 0)$, $\tilde{h} = 1/2(p + 1)$ y $\tilde{l} = 0$ son valores óptimos para h y l en el caso $p \leqslant 1/4$. Los valores correspondientes para $\tilde{H}$ y $\tilde{L}$ son $\tilde{H} = 4\tilde{h} - \tilde{l} = 2(p + 1)$ y $\tilde{L} = 3\tilde{l} = 0$. Ms. Principal consigue entonces un pago esperado de $2\tilde{F} = 2(1 - p)\tilde{H} + 2p\tilde{L} = 4(1 - p^2)$.

¿Qué es óptimo? Recordemos la conclusión de la Sección 11.7.2. Allí se vio que Ms. Principal puede conseguir un pago esperado de $4(1 - p^2)$

[36] Por ejemplo, si la solución al problema es $(\tilde{h}, \tilde{l}, \tilde{H}, \tilde{L})$, entonces (11.6) es *efectiva* si $4\tilde{h} - \tilde{H} = 4\tilde{l} - \tilde{L}$. No es *efectiva* si $4\tilde{h} - \tilde{H} < 4\tilde{l} - \tilde{L}$.

[37] Si la razón no es evidente, véase la Sección 3.2.1.

[38] Si $p > 1/4$, la recta $G = (1 - p)h + (p - 1/4)l$ se inclina más fuertemente que $(1 - p)h + pl = 1/2$. Si $p < 1/4$, la recta $G = (1 - p)h + (p - 1/4)l$ se inclina hacia arriba. Si $p = 1/4$, la recta $G = (1 - p)h + (p - 1/4)l$ es vertical y cualquier punto en el segmento que une m y n es óptimo.

usando una subasta de lo-toma-o-lo-deja con un precio fijado de 4. Ahora sabemos que este resultado es óptimo[39] cuando $0 \leqslant p \leqslant 1/4$.

También vimos que Ms. Principal puede conseguir un pago esperado de $4 - p$ usando una subasta de Vickrey modificada. Ahora sabemos que este resultado es óptimo cuando $1/4 \leqslant p \leqslant 1$.

Ninguna de estas subastas es absolutamente óptima, excepto cuando $p = 0$ ó $p = 1$. Sin embargo, no hay manera de que Ms. Principal extraiga todo el excedente. Parte de él se lo quedarán inevitablemente los agentes. Ella ha de conformarse con un resultado que es un óptimo relativo. Nuestro análisis le indica cómo evitar tener que conformarse con un resultado que sea menos que un óptimo relativo.

11.8. Equilibrio de evaluación

Hasta ahora este capítulo se ha ocupado de los equilibrios de Nash en juegos de información imperfecta obtenidos al completar estructuras informacionales incompletas. Sin embargo, capítulos anteriores contienen muchos ejemplos de casos en los que la idea de equilibrio de Nash es inadecuada. En ellos, la idea más útil era la de equilibrio subjuego-perfecto. Este suele funcionar muy bien con juegos de información perfecta, pero, como veremos, su éxito es mucho menor cuando hay que estudiar juegos de información imperfecta.

Como ocurre con frecuencia, es necesario volver a los principios básicos para poder progresar en la resolución de esta dificultad. Recordemos que un jugador bayesiano-racional siempre actúa como si estuviera maximizando la utilidad esperada con respecto a una distribución de probabilidad subjetiva. Esto sugiere que un equilibrio en un juego entre jugadores bayesiano-racionales debería ser definido no sólo en términos de lo que los jugadores *hacen*, como en un equilibrio subjuego-perfecto, sino también en términos de lo que los jugadores *creen*.

Lo que los jugadores hacen. Esto lo describiremos, como hemos hecho antes, por medio de un *perfil estratégico* s que consiste de una estrategia para cada jugador. En lo que sigue, nos limitaremos a juegos de *memoria perfecta* (Sección 10.4.1) y supondremos que las *estrategias son estrategias de comportamiento* (Sección 10.4.3).

Lo que los jugadores creen. Cuando un jugador ha de decidir qué acción debe tomar en un conjunto de información, no estará seguro del

[39] Puesto que podemos efectivamente señalar una subasta que consigue el resultado $4(1 - p^2)$, no tenemos que preocuparnos más acerca de si tuvimos éxito al enumerar todas las restricciones del problema de optimización. Al añadir nuevas restricciones solamente podríamos disminuir el máximo.

nodo del conjunto de información h que el juego ha alcanzado. Por tanto, un jugador bayesiano-racional asignará probabilidades subjetivas a cada uno de los nodos de h. Estas probabilidades representan las creencias del jugador. Estas quedan resumidas en un *perfil de creencias* μ que asigna una medida de probabilidad μ_h a cada conjunto de información h. Hay que entender que, si se alcanza el conjunto de información h, entonces el jugador que ha de jugar en h asignará la probabilidad $\mu_h\{x\}$ a cada nodo x en el conjunto de información h.

Como ejemplo, consideremos el juego de la quiche de la Figura 10.6(b). Un perfil de creencias μ para la quiche consiste de cuatro medidas de probabilidad μ_T, μ_W, μ_Q y μ_B que corresponden a los cuatro conjuntos de información DURO, BLANDO, QUICHE y CERVEZA. Las medidas de probabilidad para los conjuntos DURO y BLANDO son fáciles. Un jugador con jugada en DURO o BLANDO sabe con seguridad qué nodo ha alcanzado el juego, porque estos conjuntos contienen un solo nodo. Por tanto, a este nodo único hay que asignarle la probabilidad 1.

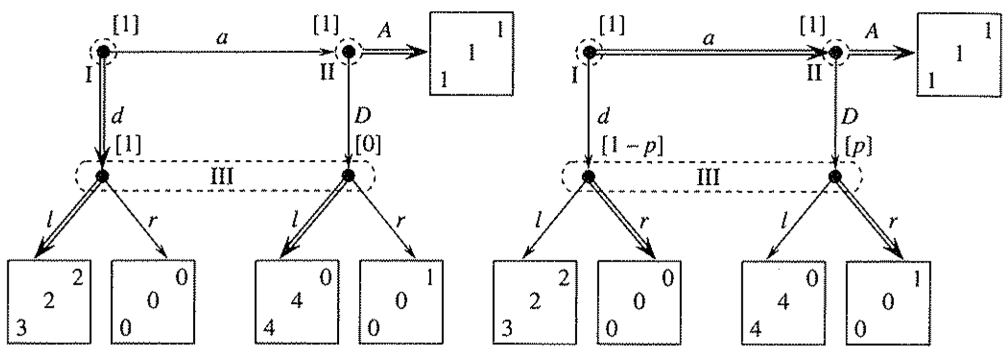
El conjunto de información QUICHE contiene dos nodos, e y f. La medida de probabilidad μ_Q ha de asignarles probabilidades. Estas pueden ser, por ejemplo, $\mu_Q\{e\} = 1/4$ y $\mu_Q\{f\} = 3/4$. Análogamente, μ_B ha de asignar probabilidades a los dos nodos del conjunto de información cerveza.

Evaluaciones. Siguiendo a Kreps y Wilson, un par (s, μ) se llama una evaluación. Una evaluación, por tanto, es un perfil de estrategias de comportamiento junto con un perfil de creencias.

Equilibrio de evaluación. Un *equilibrio de evaluación*[40] será una evaluación (s, μ) que cumple dos propiedades:

1. La primera propiedad requiere que los jugadores *siempre* quieran escoger una acción óptima. Más exactamente, un jugador con jugada en un conjunto de información h supone que después de su jugada, el juego se desarrollará según s. La acción en h designada por s tiene que ser óptima, dadas las creencias μ_h sobre qué nodo de h ha sido alcanzado.
2. La segunda propiedad es que las creencias de los jugadores respeten las leyes de la probabilidad. Más exactamente, siempre que una creencia pueda ser deducida de otras creencias y del hecho que se está usando s, entonces las creencias reales deben ser consistentes

[40] Esta terminología no es estándar. Lo que estamos definiendo es una versión simplificada de lo que Kreps y Wilson llaman *equilibrio secuencial*. La primera propiedad que se da a continuación es llamada *racionalidad secuencial* por Kreps y Wilson. La segunda propiedad forma parte de lo que éstos llaman *consistencia*. Fudenberg y Tirole han propuesto condiciones de consistencia menos exigentes que las de Kreps y Wilson y al resultado le llaman *equilibrio bayesiano perfecto*. La Propiedad 2 es bastante más débil que las condiciones de consistencia en estas dos nociones de equilibrio.



(a) (b)

Figura 11.5. El caballo de Selten.

con estas deducciones. Esto significa que la revisión bayesiana (Sección 10.5) ha de ser usada siempre que sea posible.

El motivo de formular una definición tan complicada se hará evidente tras el desarrollo del juego del caballo de Selten.

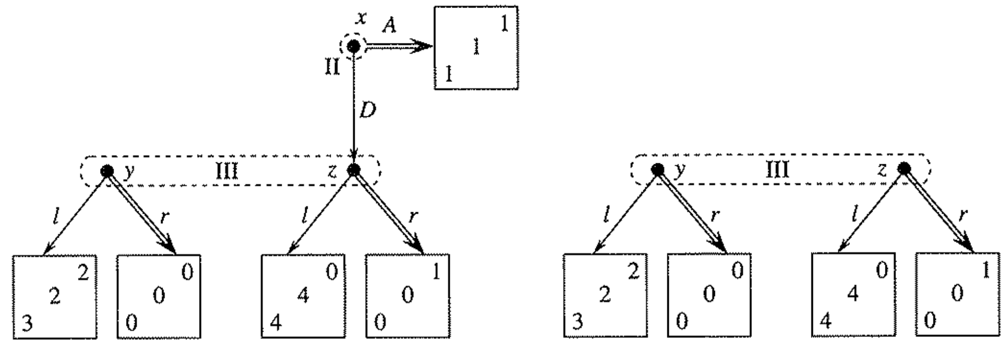
11.8.1. El caballo de Selten

El caballo de Selten de la Figura 11.5 tiene dos equilibrios de Nash con estrategias puras (y muchos otros con estrategias mixtas). El primer equilibrio de Nash (d, A, l) queda ilustrado en la Figura 11.5(a). El segundo equilibrio de Nash (a, A, r) queda ilustrado en la Figura 11.5(b)[41].

Planes increíbles. A primera vista, el equilibrio de Nash (d, A, l) parece más atractivo que (a, A, r), porque conduce al resultado (3, 2, 2) mientras (a, A, r) conduce a (1, 1, 1). En la terminología de la Sección 7.3.3, (d, A, l) Pareto-domina a (a, A, r). Pero consideremos los planes de la jugadora II de jugar A en el equilibrio (d, A, l). Si el jugador I llega a jugar d, la jugadora II nunca tendrá ocasión de cumplir sus planes. Sin embargo, si *tuviera* que tomar una decisión, ella no desearía jugar A. Si el jugador III no se desvía de jugar l, tal como el equilibrio exige, entonces la jugadora II consigue 4 jugando D y solamente 1 jugando A. En el lenguaje de la Sección 4.6.3, los planes de la jugadora II de jugar A en el equilibrio (d, A, l) son *increíbles*. Un libro de teoría de juegos que recomendara (d, A, l) no sería tomado en serio[42].

[41] Vale la pena comprobar que estos son realmente equilibrios de Nash. Por ejemplo, ¿ganaría algo el jugador I si se desviara de (d, A, l) jugando a?

[42] Si quisiera ser una fuente autorizada. Sin embargo, la historia no sería necesariamente la misma si de entre distintos libros de teoría de juegos en circulación, unos defendieran (d, A, l) y otros (a, A, r).



(a) (b)

Figura 11.6. Juego del caballo.

Equilibrios subjuego-perfectos. La Sección 4.6.3 se ocupó de equilibrios subjuego-perfectos. Esta noción es extraordinariamente poderosa en juegos de información perfecta, porque estos juegos tienen muchos subjuegos. En un juego de información perfecta, cada nodo de decisión es la raíz de un subjuego. Esto no es cierto para juegos de información imperfecta. De hecho, el caballo de Selten carece en absoluto de subjuegos estrictos[43]. La estructura de la Figura 11.6(a) que se obtiene al eliminar todo lo que precede al conjunto de información de la jugadora II no es un subjuego. Carece de raíz que represente su primer movimiento. Si la tratáramos como un juego, no sabríamos si empezar en el nodo x o en el nodo y. Lo mismo ocurre con la estructura de la Figura 11.6(b) obtenida al eliminar todo lo que precede al conjunto de información del jugador III. En este caso, no sabríamos si empezar en el nodo y o en el nodo z.

Un equilibrio subjuego-perfecto es un equilibrio de Nash que induce jugar como en un equilibrio de Nash en todos los subjuegos. Por tanto, *cualquier* equilibrio de Nash para el caballo es un equilibrio subjuego-perfecto. La subjuego-perfección, por tanto, no nos sirve para eliminar planes increíbles en un juego como el caballo. Necesitamos algo con más fuerza.

Equilibrio de evaluación. ¿Cómo se enfrenta un equilibrio de evaluación con el problema de los planes increíbles? Consideremos el perfil estratégico para el caballo $s = (d, A, l)$. ¿Qué perfil de creencias se puede asociar a él para formar una evaluación (s, μ) que satisfaga las dos propiedades del equilibrio de evaluación?

Consideremos la Figura 11.5(a). Los conjuntos de información del jugador I y la jugadora II sólo contienen un nodo. Luego μ debe asignar probabilidad 1 al nodo único en cada uno de estos conjuntos de información. Estas

[43] Un juego siempre es un subjuego de sí mismo. Si excluimos el juego total, hablamos de subjuegos *estrictos*.

asignaciones aparecen en paréntesis cuadrados en la Figura 11.5(a). Las probabilidades que μ debe asignar a los nodos del conjunto de información del jugador III están determinadas por la propiedad 2 de la noción de equilibrio de evaluación. El jugador III sabe[44] que el jugador I usará d. De aquí el jugador III puede deducir que se encuentra en el nodo izquierdo de su conjunto de información cuando le toca jugar. Así pues, μ debe asignar probabilidad 1 al nodo izquierdo y 0 al derecho.

Pero la evaluación (s, μ) que hemos construido no satisface la propiedad 1 de los equilibrios de evaluación. Indudablemente, los jugadores I y III optimizan de acuerdo con sus creencias, pero la jugadora II no. Aunque su conjunto de información no será alcanzado en el equilibrio, si por alguna razón lo fuera ella jugaría D y no A.

Después de comprobar que $s = (d, A, l)$ no puede formar parte de un equilibrio de evaluación, deberíamos también comprobar que $s = (a, A, r)$ sí forma parte de un equilibrio de evaluación. Como antes, μ debe asignar probabilidad 1 al único nodo en cada uno de los conjuntos de información de los jugadores I y II. Sin embargo, la propiedad 2 de los equilibrios de evaluación no nos ayuda con el conjunto de información del jugador III. Este no se alcanza con el equilibrio que estamos estudiando, y por tanto la revisión bayesiana no se puede aplicar. Sin embargo, la propiedad 1 restringe las probabilidades $1 - p$ y p que μ asigna a los nodos de la derecha y la izquierda del conjunto de información del jugador III. Si r ha de ser óptimo para el jugador III dadas sus creencias, éste debe esperar más escogiendo r que escogiendo l. Así pues,

$$0(1 - p) + 1p \geqslant 2(1 - p) + 0p$$
$$p \geqslant 2/3.$$

Siempre que $p \geqslant 2/3$, se sigue que (s, μ) es un equilibrio de evaluación para el caballo[45].

11.8.2. Señalización

Econ 11.8.3→

Cuando estudiamos el juego de la quiche de la Figura 11.1(f) en la Sección 10.5.1, nos limitamos a considerar el caso $r = 2/3$, de manera que siempre hubiera una probabilidad positiva de alcanzar todos los conjuntos de información en el equilibrio. Así se evitaron problemas con planes increíbles fuera de la trayectoria de equilibrio. Pero las cosas son distintas si $r = 1/3$. Se obtiene entonces un juego en el que aparecen las dificultades típicas de los problemas de señalización.

[44] Porque está escrito en los libros de teoría de juegos para que todos lo lean.

[45] Se podría preguntar: ¿Por qué el jugador III cree que su nodo derecho es más probable que su nodo izquierdo? El bayesianismo, sin embargo, no ofrece respuestas a estas cuestiones.

En la Sección 10.5.1, los problemas de señalización no tenían dificultad. Un jugador duro I señalaba su dureza bebiendo cerveza. La jugadora II no dudaba de que beber cerveza era la señal «correcta» para un tipo duro, y por tanto intimidaba a un oponente que comiera quiche. Redundaba en el beneficio propio de un jugador I blando, por tanto, no comer siempre quiche. En lugar de mandar siempre la señal correcta de su tipo, se echaba faroles mandando la señal «incorrecta» con la frecuencia necesaria para hacer dudar a la jugadora II acerca de la naturaleza de su adversario.

En estas discusiones, es útil hablar de cerveza y de quiche, y de tipos duros y blandos, porque es fácil olvidarnos de cuáles son las preferencias de cada cual sin alguna ayuda para la memoria. Sin embargo, hay que llevar cuidado y no permitir que los significados de las palabras usadas al describir el juego distorsionen el análisis del equilibrio del juego. En particular, si el beber cerveza es la señal «correcta» para un tipo duro, esta conclusión debe surgir *endógenamente* del análisis. *Después* de calcular un equilibrio, puede tener sentido preguntar cómo los jugadores interpretan las señales que reciben mientras usan las estrategias de equilibrio. Sin embargo, *antes* de calcular los equilibrios, no estamos autorizados a dar por supuesto que una señal determinada será interpretada de un modo especial[46]. Cuando nos comunicamos en un estilo irónico o satírico, por ejemplo, jugamos según reglas distintas que cuando simplemente comunicamos hechos. En aquel caso no esperamos que las palabras usadas sean tomadas literalmente. Sin embargo, aunque lo que decimos es a menudo lo opuesto de lo que queremos decir, nos asombraría que no nos entendieran.

Las cosas son habitualmente menos sutiles en los juegos económicos, pero las cuestiones importantes son exactamente las mismas. ¿Qué significa, por ejemplo, que la otra empresa baje precios? ¿Es una señal de fortaleza o de debilidad? A veces, un estudio de los equilibrios del juego permite hacer una interpretación no ambigua de estas señales, como en la versión de la quiche estudiada en la Sección 10.5.1. Sin embargo, en la versión de la quiche con $r = 1/3$ que viene a continuación, veremos que las cosas son mucho más complicadas.

Los que comen quiche son blandos. Consideremos primero el perfil estratégico s en el que el jugador I usa (*cerveza, cerveza*) y la jugadora II usa

[46] No debemos confundir el problema de decidir cuáles son los equilibrios de un juego con el problema de seleccionar un equilibrio de entre los que están disponibles. En la Sección 7.3.2,vimos que las convenciones usadas para seleccionar equilibrios pueden muy bien depender de cuestiones que son arbitrarias desde el punto de vista de la teoría de juegos —como cuál es la primera letra del alfabeto—. El mero hecho de que haya decidido escribir este libro en inglés es un reconocimiento de que una parte importante del mundo ha elegido coordinarse en un equilibrio en el que ciertas señales tienen significados convencionales específicos. Sin embargo, los significados no son intrínsecos a las señales. Las palabras significan lo que significan sólo porque una serie de accidentes históricos ha conducido a la sociedad a coordinarse en un equilibrio dado en lugar de otro. Si quisiéramos saber cuáles hubieran podido ser los otros equilibrios, deberíamos separar las palabras que usamos de sus significados habituales en inglés y tratarlas como señales abstractas.

evaluar las miríadas de criterios propuestos para seleccionar equilibrios para juegos de señalización como la quiche.

11.8.3. Refinamientos

Filo 11.9 ⟶

La discusión anterior sobre el juego de la quiche plantea la cuestión de los refinamientos de los equilibrios de Nash. Por ejemplo, los equilibrios subjuego-perfectos son un refinamiento de los equilibrios de Nash. Los equilibrios de evaluación son un refinamiento de los equilibrios subjuego-perfectos. Es natural continuar buscando otros refinamientos en un intento por cortocircuitar el problema de la selección de equilibrios. El criterio intuitivo de Kreps representa un intento en esta dirección.

Mi intención al escribir este libro ha sido evitar temas controvertidos excepto cuando sería intelectualmente deshonesto hacerlo. Esto significa que podemos decir pocas cosas acerca del tema de los refinamientos del equilibrio de Nash. Es el tema más controvertido de la teoría de juegos. Cada especialista en teoría de juegos tiene su receta favorita para refinar los equilibrios de Nash —y lo mismo pasa, o a veces así al menos lo parece, con todos sus tíos, hermanos, primos y tías—. Es cierto que se supone que este capítulo trata de saber a quién creer, pero en este campo yo recomiendo no creerse a nadie hasta que los expertos alcancen algún tipo de consenso. No diremos nada en absoluto, por tanto, acerca de refinamientos particulares que no sean los ya mencionados. Puede ser útil, sin embargo, que digamos algo acerca del problema general que quiere resolver la literatura sobre refinamientos.

La propiedad 2 de un equilibrio de evaluación (s, μ) nos dice que usemos la revisión bayesiana para calcular el perfil de creencias μ siempre que sea posible. La única ocasión en que la revisión bayesiana en un conjunto de información h no será posible es cuando h no puede ser alcanzado si se usa s. Esto es porque no se puede condicionar a partir de un suceso de probabilidad nula. La revisión bayesiana requiere calcular probabilidades condicionales de la forma $\text{prob}(A \mid B) = \text{prob}(A \cap B)/\text{prob}(B)$. Pero esta expresión no tiene sentido si $\text{prob}(B) = 0$.

El famoso libro de Kolmogorov, *The Theory of Probability*, tiene una propuesta para enfrentarse a estas dificultades. Kolmogorov recomienda considerar una sucesión de eventos B_n tales que $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$, pero para los cuales $\text{prob}(B_n) > 0$. Se puede entonces intentar definir $\text{prob}(A \mid B)$ como

$$\lim_{n\to\infty} \text{prob}(A \mid B_n).$$

Kolmogorov, sin embargo, advierte del peligro de usar sucesos B_n «equivocados», dando ejemplos en los cuales las reglas derivadas de $\text{prob}(A \mid B)$ no tienen ningún sentido. En los problemas geométricos considerados por

Kolmogorov, no es difícil ver cuál debería ser el valor «correcto» de $\text{prob}(A \mid B)$, pero los especialistas en teoría de juegos no son tan afortunados. Esto hace que sea vital no cometer errores al seleccionar los sucesos B_n.

Es tentador encogerse de hombros ante estas dificultades. Los jugadores racionales no se saldrán de la trayectoria de equilibrio. Entonces, ¿por qué debemos preocuparnos de lo que pensarán si llegan a perderse? La razón es simple. Los jugadores racionales no siguen una trayectoria de equilibrio sólo porque un libro de teoría de juegos lo recomienda. Si lo siguen es porque anticipan lo que ocurriría si se desviaran. Por tanto, es imposible decir nada razonable sobre lo que ocurre en equilibrio sin considerar simultáneamente el juego fuera del equilibrio. Pero el juego fuera del equilibrio se da con probabilidad cero si los jugadores son racionales.

Los filósofos hablan de lo *contrafáctico* en este contexto. Por ejemplo, es contrafáctico que un jugador racional haga algo irracional. Es por tanto contrafáctico que un jugador racional se salga de la trayectoria de equilibrio. Razonando con estos contrafácticos es como sortear un campo de minas, pero la teoría de juegos no puede evadir estas dificultades. Hay que afrontarlas abiertamente. Los filósofos intentan hacerlo usando el lenguaje de los *mundos posibles*.

El mundo ideal del especialista en teoría de juegos es solamente uno entre muchos mundos posibles. Un suceso de probabilidad nula B en el mundo de la teoría de juegos puede corresponder a un suceso B_n que sucede con probabilidad positiva en algún mundo posible cercano. Entonces nos podemos preguntar qué creería la gente en este mundo posible cercano si ocurriera B_n, y usar estas creencias como aproximaciones a lo que la gente creería si B ocurriera en el mundo de la teoría de juegos.

El éxito de esta línea de ataque dependerá del mundo posible cercano que se use. Esta elección determinará el refinamiento que va a surgir finalmente. Hasta ahora, los especialistas en teoría de juegos han escogido mundos posibles cercanos que son fáciles de manejar matemáticamente[47]. En mi opinión, la elección de mundos posibles cercanos no es algo de lo que podamos echar mano despreocupadamente. Los juegos se abstraen de situaciones de la vida real. Cuando el nivel de abstracción seleccionado deja cosas por resolver, se debe volver a la situación del mundo real en busca de más información. En particular, este será el lugar dónde buscar ideas sobre los mundos posibles cercanos que vale la pena tomar en consideración. Puede ser que las ideas que encontremos sean inoportunas, porque nos obligan a considerar modelos que no pueden ser analizados con éxito. Sin embargo, los hechos inoportunos son parte integrante de la riqueza y diversidad de la vida.

[47] La Sección 1.8.3 considera el tipo de mundos posibles cercanos subsumidos en el *equilibrio perfecto de la mano temblorosa*, de Selten En este mundo posible, nadie nunca deja de pensar correctamente, pero las manos de los jugadores tiemblan, de manera que incluso acciones muy desafortunadas tienen alguna probabilidad positiva. Como hemos observado en la Sección 1.8.3, este no es un planteamiento muy realista para un juego como el ajedrez, pero es un planteamiento que admite una descripción matemática concisa.

11.9. Más sobre acuerdos sobre el desacuerdo

Esta sección explica de qué forma la noción de equilibrio de evaluación encaja en la teoría de Harsanyi de la información incompleta. Prestaremos particular atención a la cuestión de si los jugadores tienen creencias *consistentes*.

Filo 11.10 ⟶

En el presente capítulo y hasta este momento, la doctrina de Harsanyi se ha dado por supuesta. Recordemos de la Sección 10.7.3 que ésta afirma que es conocimiento común que los jugadores tienen en común las probabilidades a priori. En particular, es conocimiento común que todos ellos asignan las mismas probabilidades a priori a los resultados de las jugadas del azar en el juego. Mantendremos esta hipótesis aquí, excepto por lo que se refiere a la jugada de reparto que abre el juego obtenido al completar una estructura informacional incompleta.

De hecho, para las ideas que siguen podemos prescindir totalmente de la jugada de reparto. Los equilibrios de evaluación tienen sentido en juegos *sin raíz*[48]. Con esta expresión nos referimos a una estructura que tiene todas las propiedades de un juego excepto que no se le designa primera jugada. La Figura 11.6 proporciona dos ejemplos simples[49].

Como ocurre con muchas de las ideas en este capítulo, la noción de un equilibrio de evaluación en un juego sin raíz fue anticipada anteriormente. En particular, se usa la idea en la Sección 10.8.1. Recordemos que la Sección 10.8.1 se ocupa del dilema del prisionero finitamente repetido cuando los jugadores no saben con seguridad cuántas repeticiones ocurrirán. En el lenguaje de la Sección 11.2, cada entero no negativo n corresponde a un actor que sabe que, si él o ella es elegido para actuar, entonces el dilema del prisionero se repetirá n ó $n + 1$ veces[50]. Los actores que corresponden a un entero impar son varones y candidatos al papel de jugador I. Los actores que corresponden a un entero par son mujeres y candidatas al papel de jugadora II.

Sin embargo, en la formulación de la Sección 10.8.1, no aparece la jugada de reparto. En lugar de ello, se atribuyen creencias a los actores. Mr. n, por ejemplo, tiene que asignar probabilidades a los dos nodos de su conjunto de información $\{n, n + 1\}$. Estas probabilidades se pueden expresar en la forma $\text{prob}\{\text{II} = n - 1 \mid \text{I} = n\}$ y $\text{prob}\{\text{II} = n + 1 \mid \text{I} = n\}$, ya que son las probabilidades condicionadas que Mr. n asigna a que las actrices posibles ocupen el papel de la jugadora II, suponiendo que él esta ocupando el papel de jugador I. La Sección 10.8.1 considera el caso en que cada actor con

[48] Por supuesto, algo que no tiene raíz no es realmente un juego, y esto es, por tanto, un abuso de lenguaje.

[49] Un juego sin raíz complicado podría involucrar historias que retroceden en el pasado indefinidamente, teniendo cada nodo un número infinito de predecesores. El modelo de la Sección 8.5.1 es un ejemplo de una estructura así.

[50] Exceptuando Ms. Cero, que sabe que el dilema del prisionero se repetirá exactamente una vez si es designada para el papel de jugadora II.

$n \geqslant 1$ asigna probabilidad 1/2 a cada actor que podría ocupar el papel del oponente. Después de la Sección 11.8, podemos ver el argumento de la Sección 10.8.1 como una demostración de la existencia de un equilibrio de evaluación con estas creencias en el que los jugadores cooperan hasta la última etapa del juego.

11.9.1. Consistencia

Aunque la discusión precedente muestra que se puede prescindir de la jugada de reparto al usar la teoría de Harsanyi de la información incompleta, es necesario ser prudentes al hacerlo. La razón es que la jugada de reparto asegura que se cumple la doctrina de Harsanyi de la Sección 10.7.3. Esto requiere que sea conocimiento común que los jugadores tienen probabilidades a priori comunes. En este contexto, las probabilidades a priori de los jugadores vienen determinadas por las probabilidades subjetivas que asignan a las jugadas del azar en el juego. Bajo las hipótesis estándar para un juego, es conocimiento común que todos los jugadores están de acuerdo en las probabilidades que deben ser asignadas a las acciones disponibles en la jugada hecha por el azar.

Sin una jugada de reparto, por tanto, existe la posibilidad de que las creencias de los jugadores encierren algún acuerdo sobre desacuerdos[51]. En algunas situaciones, la disponibilidad de una comida gratis es lo que mejor puede representar las realidades de lo que ha de ser modelizado. Sin embargo, esta no es una hipótesis que un modelizador querría hacer sin estar plenamente informado de lo que está haciendo.

Consideremos, por ejemplo, el modelo del dilema del prisionero repetido de la Sección 10.8.1. Supongamos que ha sido modelizado *con* una jugada de reparto en el que el azar selecciona el número de etapas n con probabilidad $p_n > 0$. Entonces, Mr. n puede calcular sus creencias en el conjunto de información $\{n, n + 1\}$ usando la revisión bayesiana. De hecho,

$$\text{prob}\{\text{II} = n - 1 \mid \text{I} = n\} = \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}},$$

$$\text{prob}\{\text{II} = n + 1 \mid \text{I} = n\} = \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}}.$$

[51] Con tantas cosas a tener presentes, es fácil olvidar que los problemas de conocimiento común asociados con una jugada de reparto no desaparecen cuando se adopta el formato de un juego sin raíz. Los problemas no hacen más que aparecer en una nueva guisa como problemas sobre quién sabe qué sobre el *equilibrio* en uso. En particular, cuando se estudia un equilibrio de evaluación (s, μ), se supone implícitamente que es conocimiento común de qué (s, μ) se trata. O, como hubiéramos dicho en capítulos anteriores, es conocimiento común qué libro de teoría de juegos están usando los jugadores.

La Sección 10.8.1 supone que estas dos probabilidades son ambas 1/2. Así, $p_n = p_{n+1}$. Pero si esto es cierto para todo $n \geqslant 1$, las probabilidades p_n no pueden sumar 1. La razón es que, si un número positivo es sumado a sí mismo un número de veces suficientemente elevado, entonces la suma resultante se puede hacer tan grande como se quiera. Esto muestra que *no* existe una jugada de reparto que sea consistente con las creencias que la Sección 10.8.1 atribuye a los actores[52].

Las creencias mantenidas por los actores son, por tanto, *inconsistentes*, en el sentido que no pueden ser deducidas de una probabilidad a priori común. Como hemos observado anteriormente, en qué medida esto es grave, depende del contexto. Es ciertamente grave en el contexto de la Sección 10.8.1, donde los actores no representan personas distintas que pueden tener razones históricas para llegar a un acuerdo sobre desacuerdos. En la Sección 10.8.1, todos los actores varones son copias de Mr. Díez. Representan a Mr. Díez tal como hubiera sido después de recibir informaciones distintas. Estamos ciertamente entrando en un juego peligroso si defendemos que estas copias pueden tener creencias inconsistentes con las matenidas por Mr. Díez, especialmente en un contexto en el que el énfasis se pone en lo que es, o no es, racional[53].

Mi propia opinión es fácil de adivinar después de la Sección 10.8.2. Trabajar con creencias inconsistentes empuja el planteamiento bayesiano fuera de su legítimo campo de aplicación. La gente real tiene, por supuesto, creencias inconsistentes sobre muchas cosas, pero una buena teoría de este fenómeno no puede seguir al bayesianismo en dejar de lado, para empezar, la cuestión de dónde vienen las creencias de la gente.

11.10. Ejercicios

1. La Sección 11.2.1 explica cómo se puede usar la teoría de Harsanyi para completar un estructura informacional incompleta. Este ejercicio pide que se siga el mismo procedimiento con un problema más simple del mismo tipo.
   a) Las reglas subyacentes aparecen en la Figura 11.7(a). Con la terminología de la Sección 11.2.1, esta figura muestra un guión para un juego.
   b) Los actores que pueden desempeñar el papel de jugador I son Mr. Alto y Mr. Bajo. La única actriz disponible para el papel de jugador II es Ms. Hoozat.

[52] Recordar el Ejercicio 3.7.18*a*).

[53] De hecho, no se puede rescatar de ninguna forma la conclusión cooperativa de la Sección 10.8.1, si se requiere que los actores mantengan creencias consistentes. Sin embargo, si se usan pagos ligeramente distintos en el dilema del prisionero, el problema se evapora (Ejercicio 11.10.49).

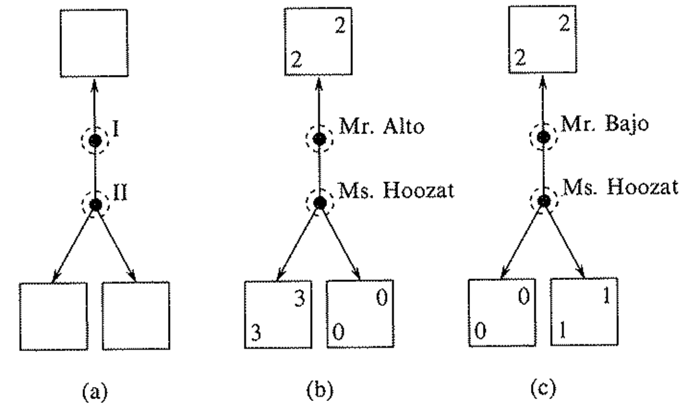


Figura 11.7. Información para el Ejercicio 11.10.1.

   c) Las preferencias de los actores aparecen en las Figuras 11.7(b) y 11.7(c). Como en la Sección 11.2.1, estos diagramas muestran qué valores llenarían las casillas de pagos vacías de la Figura 11.7(a), si fuera conocimiento común quién desempeñaría el papel de jugador I.
   d) Por lo que se refiere a las creencias de los actores, basta con especificar que es conocimiento común que Ms. Hoozat cree que ambos, Mr. Alto y Mr. Bajo, son igualmente probables.

   Dibujar las formas extensivas de *dos* juegos de información imperfecta a los que la teoría de Harsanyi puede conducir. Uno debería ser un juego con dos jugadores y el otro con tres jugadores.

2. Comprobar que la Figura 11.8(a) muestra la forma estratégica correcta para la forma extensiva con dos jugadores construida en el Ejercicio 11.10.1. (La estrategia pura *XY* para el jugador I significa que Mr. Alto usará *X*, si llega a jugar, y que Mr. Bajo usará *Y*, si llega a jugar.) Comprobar también que la Figura 11.8(b) muestra la forma estratégica correcta para la forma extensiva con tres jugadores.
   a) Confirmar que (*UU*, *R*) y (*DU*, *L*) son los únicos equilibrios de Nash con estrategias puras para la forma estratégica de la Figura 11.8(a).
   b) Confirmar que (*U*, *U*, *R*) y (*D*, *U*, *L*) son los únicos equilibrios de Nash con estrategias puras para la forma estratégica de la Figura 11.8(b).
   c) También existen equilibrios de Nash mixtos para ambas formas estratégicas. Hallarlos todos.
   d) Hallar todos los subjuegos para las formas extensivas del Ejercicio 11.10.1, y explicar a partir de aquí por qué todos los equilibrios de Nash encontrados son subjuego-perfectos.

3. Revisar la Sección 4.6 sobre la eliminación sucesiva de estrategias dominadas.

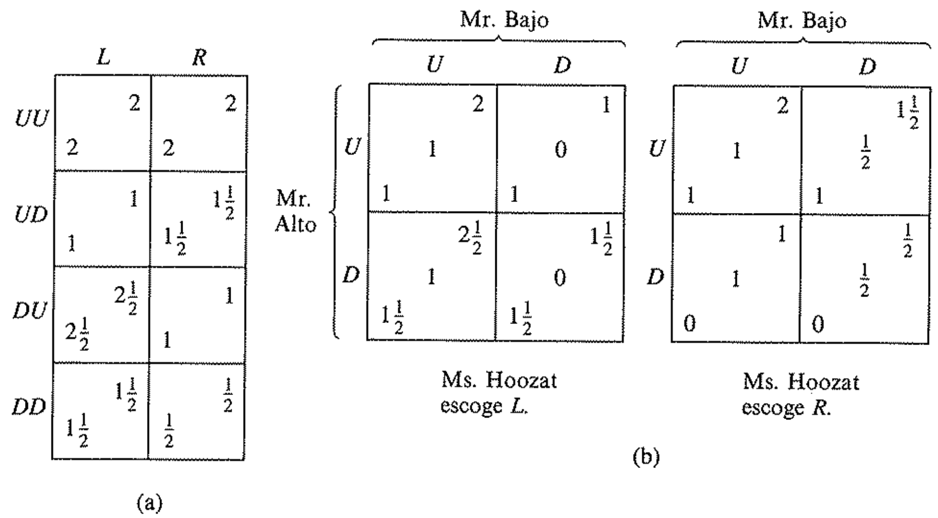


Figura 11.8. Formas estratégicas para el Ejercicio 11.10.2.

a) De los equilibrios de Nash del Ejercicio 11.10.2*a*) y Ejercicio 11.10.2*b*), ¿cuáles sobreviven la eliminación sucesiva de estrategias dominadas?

b) En general, no cambian mucho las cosas si el problema del Ejercicio 11.10.1 se modeliza como un juego de información imperfecta con tres jugadores en lugar de dos, pero puede darse alguna diferencia sutil. Detectar una de estas diferencias considerando cómo cambian las cosas en el apartado *a*) cuando solamente se eliminan estrategias *fuertemente* dominadas.

4. El juego del Ejercicio 11.10.1 se puede considerar como un juego de señalización en el que Mr. Alto quiere comunicar su identidad a Ms. Hoozat para que ella pueda elegir el resultado que él y ella prefieren conjuntamente. Ya que los jugadores de juegos en equipo (Sección 1.9.1) tienen objetivos idénticos, estos juegos son con frecuencia un campo de pruebas apropiado para el estudio de los problemas de señalización.

   a) El Ejercicio 11.10.2 identifica dos equilibrios subjuego-perfectos con estrategias puras. Reformularlos como equilibrios de evaluación (Sección 11.8).

   b) ¿Cuál de los dos equilibrios queda seleccionado por el «criterio intuitivo» de Kreps (Sección 11.8.2)?

   c) Dar un criterio de selección alternativo basado en el Ejercicio 11.10.3.

5. Este ejercicio requiere aplicar la teoría de Harsanyi a un problema un poco más alejado de la Sección 11.2.1 que el Ejercicio 11.10.1.

   a) Las reglas subyacentes aparecen en la Figura 11.9(a). Con la

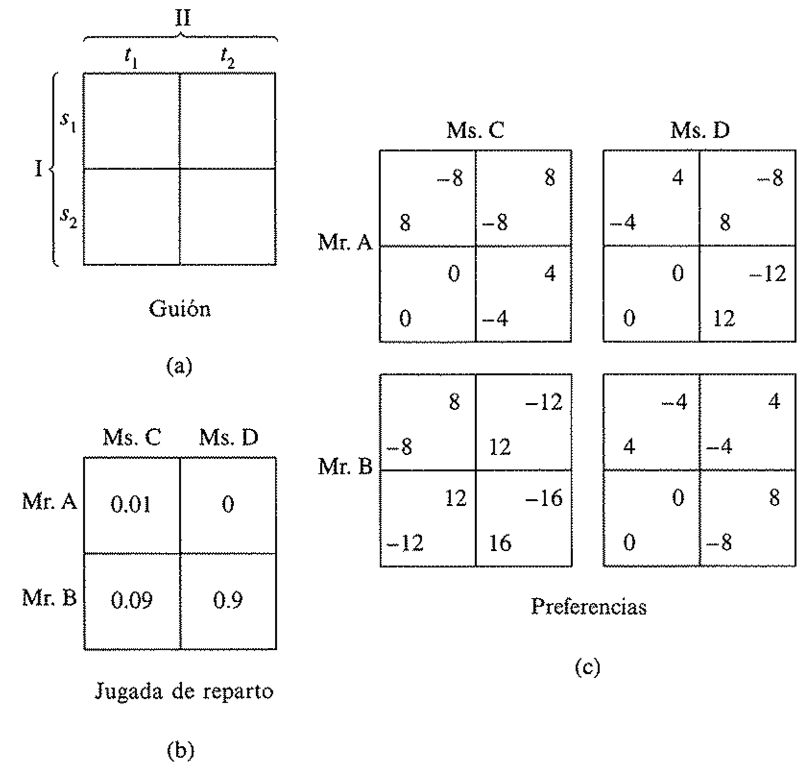


Figura 11.9. Información para el Ejercicio 11.10.5.

terminología de la Sección 11.2.1, esta figura muestra el guión para un juego.

   b) Los actores que pueden desempeñar el papel de jugador I son Mr. A y Mr. B. Las actrices que pueden desempeñar el papel de jugadora II son Ms. C y Ms. D.

   c) La Figura 11.9(b) muestra como el azar reparte los papeles de jugador I y jugadora II. Por ejemplo, la probabilidad de que Mr. B y Ms. D sean designados para los papeles de jugador I y jugadora II es 0,9.

   d) Las preferencias de los actores aparecen en la Figura 11.9.(c). Como en la Sección 11.2.1, estos diagramas muestran qué valores llenarían las casillas de pagos vacías de la Figura 11.9(a), si fuera conocimiento común quién desempeñaría el papel de cada jugador. Obsérvese que los pagos siempre suman cero[54].

[54] En consecuencia, el juego de información imperfecta obtenido completando la estructura de información incompleta será de suma cero, aunque no podríamos deducir esta conclusión si los actores tuvieran creencias inconsistentes (Ejercicio 11.10.10).

Explicar por qué no es cierto que la elección por el azar de quién ha de ser el jugador I sea independiente de su elección de la jugadora II. Hallar la probabilidad prob($B \mid C$) que Ms. C asignará al suceso de que su oponente sea Mr. B, condicionado por el hecho de que Ms. C sepa que ella ha sido elegida para ser la jugadora II. (Ejercicio 2.6.9.) Hallar también las restantes probabilidades condicionales de este tipo. (Puede ser cómodo confeccionar tablas con ellas usando el formato de la Figura 11.11) ¿Quiénes son los actores que sabrán con seguridad quién es su oponente, si ellos fueran elegidos para actuar?

6. Este ejercicio continúa el Ejercicio 11.10.5.
   a) Resolver cada uno de los cuatro juegos de dos jugadores y suma cero que aparecen en la Figura 11.9(c). En cada tabla de pagos, señalar la casilla que resultará al usar las estrategias solución.
   b) Pensar el juego de información imperfecta descrito en el Ejercicio 11.10.5 como un juego de cuatro jugadores, Mr. A, Mr. B, Ms. C y Ms. D. Resolver este juego de cuatro jugadores eliminando sucesivamente estrategias fuertemente dominadas. (No es necesario calcular muy detalladamente. Por ejemplo, si Ms. C llega a jugar, creerá que es muy probable que su oponente sea Mr. B. En este caso su segunda estrategia pura es tan adversa[55], que siempre jugará su primera estrategia pura.)
   c) ¿Qué supuso usted que era conocimiento común en el apartado *b*)?
   d) Volver a 11.9*c*) y señalar la casilla de cada tabla de pagos que resultará si los actores de esta tabla son elegidos para jugar y cada uno usa la estrategia pura calculada en el apartado *b*). (¡La casilla no debería ser la misma que la señalada en el apartado *a*)!)
   e) Comentar las diferencias entre las casillas marcadas en los apartados *a*) y *d*). En particular, explicar de qué forma Mr. A puede explotar la ignorancia de Ms. C[56].
7. Este ejercicio contiene una segunda aproximación al Ejercicio 11.10.5.
   a) La Sección 11.2.2 sugiere tomar al jugador I por una reencarnación de Von Neumann que aconseja a Mr. A y Mr. B. Análogamente, el jugador II puede ser considerado una reencarnación de Morgenstern que aconseja a Ms. C y Ms. D. La Figura 11.10 muestra la configuración de la forma extensiva del juego que Von Neumann y Morgenstern acabarán jugando. Rellenar las casillas de pagos.

[55] El cálculo que aquí se recomienda evitar va por el siguiente camino. La segunda estrategia pura de Ms. C le da como mucho 8, si su oponente es Mr. A, y como mucho -12, si juega contra Mr. B. Lo primero ocurre con probabilidad 1/10, y lo segundo con probabilidad 9/10. El pago que puede esperar de su segunda estrategia pura es, por tanto, como mucho $(8 - 12 \times 9)/10$. Un cálculo análogo muestra que obtiene por lo menos $(-8 + 8 \times 9)/10$ de su primera estrategia pura.

[56] Si él es elegido para jugar, entonces sabe que su oponente es Ms. C, pero también que ella está mucho peor informada que él.

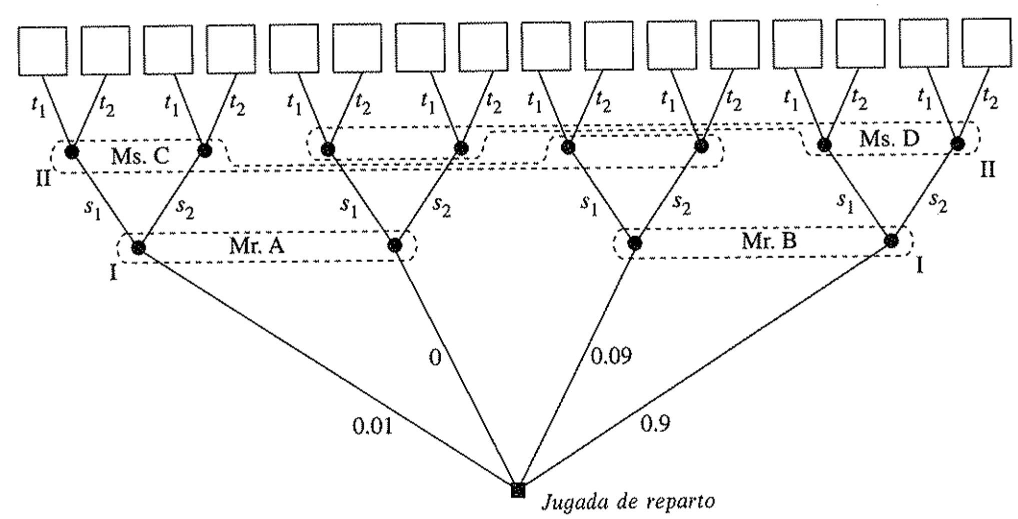


Figura 11.10. Un esquema para el árbol del Ejercicio 11.10.7.

   b) Von Neumann y Morgenstern tienen cuatro estrategias puras cada uno. ¿Cuáles son?
   c) Hallar la forma estratégica del juego entre Von Neumann y Morgenstern[57]. Confirmar que el juego es de suma cero. (Véase el Ejercicio 11.10.10.)
   d) Obsérvese que la matriz de pagos de Von Neumann tiene un punto de silla. A partir de ello resolver el juego. Comprobar que la solución coincide con la obtenida en el Ejercicio 11.10.6.
   e) Comprobar que el juego también se puede resolver por eliminación sucesiva de estrategias dominadas.

Filo

8. Von Neumann y Morgenstern llegarán a la respuesta correcta en el juego de dos jugadores y suma cero construido en el Ejercicio 11.10.7 seleccionando sus estrategias por medio del «principio del maximín» (Sección 6.5.7). Confirmar que esto no es cierto para los actores del Ejercicio 11.10.6. ¿Por qué?

Filo

9. Este ejercicio continúa preguntando cosas sobre el Ejercicio 11.10.5.
   a) ¿Cómo ha de ser modificado el árbol de la Figura 11.10 para que represente el juego de cuatro jugadores estudiado en el Ejercicio 11.10.6?

[57] ¡Esto será duro!

Ms. C	Ms. D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Creencias de Mr. A

(a)

Ms. C	Ms. D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Creencias de Mr. B

(b)

Mr. A	$\frac{1}{2}$
Mr. B	$\frac{1}{2}$

Creencias de Mr. C

(c)

Mr. A	0
Mr. B	1

Creencias de Mr. D

(d)

Figura 11.11. Tablas para el Ejercicio 11.10.10.

b) Si los jugadores necesitan aleatorizar, explicar por qué el planteamiento del Ejercicio 11.10.6 es equivalente a usar estrategias de comportamiento allí donde el Ejercicio 11.10.7 usa estrategias mixtas.

10. Este es el último ejercicio basado en el problema del Ejercicio 11.10.5. Supongamos que ya no es verdad que las probabilidades con que la jugada de reparto elige a los actores son conocimiento común. Luego la Figura 11.9(b) ya no sirve y es necesario considerar un juego sin raíz, según lo dicho en la Sección 11.9. Es conocimiento común que las creencias de los actores en este juego sin raíz son las dadas en la Figura 11.11.

a) Demostrar que las creencias especificadas no son consistentes con la doctrina de Harsanyi. Esto es, ninguna jugada de reparto nos daría actores que mantuvieran estas creencias después de saber qué han de jugar. (Puede ser útil revisar el Ejercicio 11.10.5.)

b) Modelizar la situación como un juego de dos jugadores de información imperfecta jugado entre Von Neumann y Morgenstern.

c) Empezar a calcular la forma estratégica y continuar hasta que se pueda demostrar que el juego no es de suma cero, a pesar de que los pagos en cada casilla de la Figura 11.9(c) suman cero.

Econon

Econ 11. Dos agentes deciden simultáneamente si pagan, o no, por un bien público. Se dice que el bien es público porque, si está disponible, un agente que se aprovecha de él gratis, sin pagar nada, obtiene al disfrutarlo exactamente el mismo placer que un agente que sí pagó

	Paga	Va gratis
Paga	$4-c_1$, $4-c_2$	$4-c_1$, 4
Va gratis	4, $4-c_2$	0, 0

(a)

	Coste alto	Coste bajo
Coste alto	0.1	0.4
Coste bajo	0.4	0.1

(b)

Figura 11.12. Información para el Ejercicio 11.10.11.

por él. La Figura 11.12(a) muestra cuáles serían los pagos si todos los costes y beneficios fueran conocimiento común. En esta tabla de pagos, c_i representa el coste para el jugador i de asegurar que el bien público está disponible.

a) Explicar por qué la Figura 11.12(a) es una versión del gallina (Figura 7.3(c) y Figura 7.17(a)). Hallar sus tres equilibrios de Nash en el caso que $0 < c_i < 4$. Si $c_1 = c_2 = 1$ y se usa el equilibrio de Nash mixto, ¿cuándo se ofrecerá el bien público? Responder la misma pregunta cuando $c_1 = c_2 = 3$.

b) Consideremos ahora el caso en que los costes c_i no son conocimiento común. Supongamos en cambio que los costes de cada agente pueden ser «altos» ($c_i = 3$) o «bajos» ($c_i = 1$). Es conocimiento común que cada coste se determina independientemente y que la probabilidad de que un agente tenga un coste alto es p. Usar la teoría de Harsanyi para modelizar esta situación como un juego de cuatro jugadores y jugadas simultáneas. Si $1/4 \leqslant p \leqslant 3/4$, demostrar que el juego tiene un equilibrio de Nash en el que los agentes de coste bajo pagan y los agentes de coste alto van gratis. ¿Cuándo se ofrecerá el bien público?

c) ¿Qué aspecto tienen los equilibrios de Nash cuando p no está en el intervalo $1/4 \leqslant p \leqslant 3/4$?

d) Hallar un equilibrio de Nash simétrico cuando las hipótesis del apartado *b*) acerca de qué es conocimiento común sobre la distribución de costes es sustituida por el supuesto de que el azar selecciona (c_1, c_2) a partir de la tabla de la Figura 11.12(b). ¿Cuándo se ofrecerá el bien público?

Econ 12. En el Ejercicio 11.10.11*b*) un gobierno benevolente decide asegurar que el bien público *siempre* es ofrecido. Sin embargo, insiste en que el coste de proporcionar el bien sea asumido por los jugadores. El coste no puede ser compartido entre los jugadores, y por tanto es tarea del gobierno decidir quién debe pagar. Preferiría asignar el coste a un jugador de coste bajo, pero únicamente los propios jugadores conocen sus verdaderos costes. Sin embargo, los funcionarios son gente bien formada y conocedora del principio de revelación de la Sección 11.7.3. Por tanto, contratan un economista para diseñar un mecanismo directo que induce a ambos jugadores a comunicar sus costes verdaderos de proporcionar el bien público. ¿Por qué quedaría decepcionado el gobierno con el esquema diseñado por el economista?

Revisión 13. Sea $I = [a, b]$ un intervalo de longitud $l = b - a$. Se define una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de la siguiente manera. Para los valores de x dentro de I, $p(x) = l^{-1}$. Para valores de x fuera de I, $p(x) = 0$. Una variable aleatoria X que tiene a p como función de distribución de probabilidad (Sección 11.4.1) se dice que está *uniformemente distribuida* en el intervalo I. Una tal variable aleatoria nunca toma valores fuera de I y es «igualmente probable» que tome una cualquiera de los valores de I (Sección 12.2.1). Demostrar que la función de distribución de probabilidad $P : \mathbb{R} \to [0, 1]$ para X satisface $P(x) = 0$ cuando $x < a$, $P(x) = 1$ cuando $x > b$, y $P(x) = (x - a)/l$ cuando $a < x < b$.

Revisión 14. Calcular la probabilidad de que una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre el intervalo $[3, 5]$ tome un valor en el intervalo $[2, 4]$.

Revisión 15. Se dice que una variable aleatoria está exponencialmente distribuida en el intervalo $[0, \infty)$ si tiene una función de densidad de probabilidad $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $p(x) = 0$ cuando $x < 0$, y $p(x) = ae^{-ax}$ cuando $x \geqslant 0$. El parámetro a es positivo. ¿Cuál es la correspondiente función de distribución de probabilidad? ¿Por qué no se puede admitir la especificación $p(x) = 0$ para $x < 0$ y $p(x) = e^{-2x}$ para $x \geqslant 0$?

Revisión 16. Calcular[58]

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x (1 + y^{10})^{-20}\right)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{-23}^x (1 + y^{10})^{-20} dy\right)$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^{67} (1 + y^{10})^{-20} dy\right)$

d) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^{x^2} (1 + y^{10})^{-20} dy\right)$

[58] Antes de intentar calcular las integrales, recordar el teorema fundamental del cálculo (Sección11.4.2). Para el apartado *d)*, recordar la regla para derivar una «función de función». En este caso, se trata de derivar una expresión de la forma $F(x^2)$, y la derivada será de la forma $F'(x^2)2x$.

Revisión 17. Sea $f : [3, 4] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[3, 4]$ y derivable en $(3, 4)$. Supongamos que $f(3) = 0$. Integrar por partes (Sección 11.4.3) para demostrar que

$$\int_3^4 f(v)\,dv = -\int_3^4 (v - 4)f'(v)\,dv.$$

Revisión 18. ¿Por qué una función de distribución de probabilidad $P : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es creciente? ¿Por qué se sigue que una función de densidad de probabilidad continua[59] $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ha de ser no negativa? Si $P(a) = P(b)$ y $a < b$, ¿por qué ha de ser $p(x) = 0$ para $a < x < b$?

Revisión 19. Dar un ejemplo de una variable aleatoria que no tiene función de densidad de probabilidad. (Cualquier variable aleatoria de un capítulo anterior sirve.) *Explicar* por qué no existe una función de densidad de probabilidad.

Revisión 20. Si la variable aleatoria X está uniformemente distribuida (Ejercicio 11.10.13) en el intervalo $[a, b]$, comprobar que $\mathcal{E}X = 1/2(a + b)$.

Revisión 21. Si la variable aleatoria X está exponencialmente distribuida como en el Ejercicio 11.10.15, comprobar que $\mathcal{E}X = 1/a$.

Econ 22. Responder de nuevo el Ejercicio 11.10.11*b*), pero con la hipótesis de que los costes de los agentes son independientes y uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 4]$. Hay que encontrar un criterio para elegir un número γ que haga de línea divisoria entre costes «altos» y «bajos», de manera que se pueda encontrar un equilibrio en el que los agentes de bajo coste paguen y los agentes de alto coste no.

Econ 23. En el modelo del duopolio de Cournot de la Sección 11.5.1, tomemos $\mathcal{M} = [0, c]$ y $\mathcal{F} = [\gamma, c]$, donde $0 < \gamma < c < M$. Para cada b en $\mathcal{F}$, supongamos que las creencias de Ms. b acerca de los costes unitarios a de la empresa I están representados por una distribución de probabilidad uniforme en $[0, b]$. Supongamos que las creencias de cada Mr. a sobre el parámetro b que describe las creencias de la empresa II sobre los costes unitarios de la empresa I están representadas por una distribución de probabilidad uniforme en $[\gamma, c]$. Usando la notación de la Sección 11.5.1, demostrar que $\bar{a}(b) = b/2$ y $\bar{\bar{a}} = 1/4(\gamma + c)$. Deducir que el beneficio esperado de Mr. a es $\{(8M + 7c - 12a - \gamma)/24\}^2$, y que el beneficio esperado de Ms. b es $\{(16M - 31c + 6b + \gamma)/48\}^2$.

Econ 24. Tomemos $M = 10$, $c = 5$ y $\gamma = 0$ en el Ejercicio 11.10.23. Supongamos que es conocimiento común que la empresa II ha de

[59] Sin esta condición sería estrictamente necesario cualificar el resultado que sigue con las palabras «casi en todas partes».

pagar un coste fijo de $F^2 = 1/16$ para entrar en el sector, mientras que la empresa I continúa sin tener que afrontar ningún coste fijo. Si los planes de Ms. b son no entrar cuando $b < b^* < c$, pero entrar cuando $b > b^* > 0$, explicar por qué su beneficio esperado cuando entra es $\{(5 + 6b + b^*)/48\}^2$. Deducir que el valor de b^* en el equilibrio es 1.

Econ 25. La Sección 7.2.1 describe un juego de duopolio de Cournot en el que dos empresas con costes unitarios constantes compiten en presencia de una ecuación de demanda $p = M - q$. La Sección 11.5.1 introdujo información incompleta en la historia. Este ejercicio estudia un problema más sencillo de información incompleta basado en el mismo problema del duopolio. Cada empresa conoce sus costes unitarios, pero no conoce con seguridad los costes unitarios de la otra empresa. Sin embargo no hay incertidumbre acerca de lo que cada empresa cree acerca de los costes unitarios del oponente. De hecho, es conocimiento común que las creencias de cada empresa se describen por la misma función de densidad de probabilidad. Demostrar que la producción en el equilibrio de una empresa con coste unitario c es $Q(c) = 1/2(2/3M - c - 1/3\bar{c})$, donde $\bar{c}$ es el coste unitario esperado del oponente.

Econ 26. Este ejercicio es otra variante con información incompleta del juego del duopolio de Cournot. En esta versión es conocimiento común que todas las firmas tienen costes unitarios nulos. Sin embargo, la ecuación de demanda es desconocida. Es conocimiento común que la ecuación tiene la forma $p = w - q$, pero el valor exacto de $w > 0$ es incierto. Diferentes clases de empresas tendrán diferentes creencias sobre la función de densidad de probabilidad para w. Cada empresa conoce su tipo, pero no el tipo de su oponente. Es conocimiento común que esta segunda función de densidad de probabilidad es la misma con independencia de las otras características de la empresa. Demostrar que en el equilibrio $3\bar{Q} = \bar{\bar{w}}$ donde $\bar{Q}$ es lo que una empresa espera que sea la producción de la otra, y $\bar{\bar{w}}$ es lo que una empresa espera que la otra empresa espere que valga w. (Suponer que el valor esperado de w de cada empresa es próximo a $\bar{\bar{w}}$.)

Econ 27. Este ejercicio retorna al escenario de la Sección 11.5.1 para plantear un problema de disuasión de entrada con señalización. El sector funcionará ahora durante dos períodos, después de los cuales dejará de existir. Dos empresas quieren maximizar la suma de sus beneficios en los dos períodos. La empresa I ocupa una posición de monopolio y produce en ambos períodos. En el primer período es el único productor. La ecuación de demanda es $p = M - q$ y su coste unitario es a. Sin embargo, la empresa I no produce necesariamente la producción de monopolio $1/2\ (M - a)$ en el primer período, porque esto puede proporcionar información útil sobre sus costes a

la empresa II, que está esperando con el propósito de entrar en el sector en el segundo período.

Al empezar el primer período, lo que cada uno sabe es lo que se describe en el modelo de Cournot con información incompleta de la Sección 11.5.1. Sin embargo, al final del primer período, la empresa II revisará sus creencias sobre el coste unitario a de la empresa I usando cualquier información que ésta haya podido revelar a través de su producción durante el primer período. Usando sus creencias así revisadas, la empresa II predice qué ocurriría si ahora entrara en el sector. Si se queda fuera, la empresa I se alegrará, ya que ahora tendrá libertad para adoptar la producción de monopolio en el segundo período. Sin embargo, la empresa II entrará si sus beneficios esperados exceden los costes fijos de entrada F^2. Supongamos que F^2 es conocimiento común.

Procedamos bajo la hipótesis de que existe un equilibrio separador (Sección 11.8.2). En un equilibrio separador, cada Mr. a planea producir una cantidad distinta. Por tanto, la producción de la empresa I revela plenamente su coste unitario a la empresa II. Esto trivializa el problema de la revisión para cada Ms. b.

a) Si la empresa II sabe que el coste de la empresa I es a, demostrar que ésta entrará en el segundo período si $a > a^*$ y se quedará fuera si $a < a^*$, siendo $a^* = 3F + 2c - M$. Para simplificar las cosas, supongamos que es conocimiento común que cada Ms. b tiene una función de densidad de probabilidad que es positiva en $(a^* - \delta, a^* + \delta)$ para algún $\delta > 0$.

b) En un equilibrio separador, ningún Mr. a desearía imitar la conducta de Mr. α con $a \neq \alpha$. En particular, ningún Mr. a con $a < a^*$ desearía imitar a Mr. α con $\alpha < a^*$. Deducir que cualquier Mr. a con $a^* - \delta < a < a^*$ tiene que producir su producción de monopolio durante el primer período.

c) Un Mr. a con $a^* < a < a^* + \delta$ decide desviarse de su producción en el equilibrio separador durante el primer período y copiar la producción del primer período de un Mr. α con $a^* - \delta < \alpha < a^*$. ¿Por qué Mr. a gana

$$\{1/2(M - a)\}^2 - \{1/3(M + c - 2a)\}^2$$

en el segundo período? Demostrar que esta cantidad es positiva cuando $a = a^*$. Dado un $\varepsilon > 0$, explicar por qué se puede asegurar que la desviación de Mr. a en el primer período costará menos que ε si se toman a y α suficientemente próximos a a^*.

d) Deducir que no pueden existir equilibrios separadores bajo las condiciones consideradas en este ejercicio.

Econ 28. Demostrar que puede existir un equilibrio separador en el Ejercicio 11.10.27 si se cambian las condiciones. Considerar el caso en que es conocimiento común que Mr. a sólo puede ser uno de dos tipos dados.

Econ 29. Este ejercicio estudia equilibrios agrupadores (Sección 11.8.2) en el juego de disuasión de entrada del Ejercicio 11.10.27, pero con las hipótesis del Ejercicio 11.10.24. En un equilibrio agrupador, cada Mr. a planea producir la misma producción en el primer período. Esto trivializa el problema de revisión de Ms. b porque lo que ocurre en el primer período no le da ninguna información.

a) Consultar los Ejercicios 11.10.23 y 11.10.24 y obtener así una expresión para el beneficio esperado de Ms. a en el segundo período en un equilibrio agrupador.

b) Que sea beneficioso para Mr. a desviarse depende de lo que crea la empresa II, si ésta observa esta conducta que se aparta del equilibrio. Demostrar que existe un equilibrio de evaluación en el que todos los Mr. a producen en el primer período los 5 que produciría un monopolista con coste unitario cero. Supongamos que cada Ms b cree optimísticamente que si la empresa se desvía de producir 5 en el primer período, entonces sus costes unitarios deben ser los mayores posibles. Por tanto, después de esta desviación, Ms. b entra y produce 5/3 en el segundo período, porque esto es óptimo contra un oponente con coste unitario a = 5. Entonces el «desviado» Mr. a produce su respuesta óptima a 5/3 en el segundo período.

c) ¿Por qué, en aquellos casos en que la empresa II decide no entrar, un kibitzer desconocedor de la posibilidad de que un rival aparezca en el segundo período se confundiría al observar las decisiones sobre la producción de la empresa I con coste unitario 5?

Filo 30. Explicar por qué se puede considerar que un principal que se ve obligado a usar un mecanismo de lo-toma-o-lo-deja al subastar su casa está jugando una especie de juego del ultimátum (Sección 5.8) con los compradores potenciales. Utilizar esta analogía para discutir si es razonable suponer en el diseño de mecanismos que los empates se deben resolver a favor del principal.

Econ 31. Se vende un cuadro en una subasta de Vickrey. Es conocimiento común que todas las valoraciones en dólares del cuadro por compradores potenciales son enteros positivos distintos, pero las valoraciones se desconocen. La Sección 11.7.1 explica por qué es una estrategia débilmente dominante para cada comprador potencial pujar por la verdadera valoración. Explicar por qué es también un equilibrio para cada comprador potencial pujar un dólar menos que su verdadera valoración. ¿Por qué es este equilibrio mentiroso una mejora de Pareto sobre el equilibrio sincero? Explicar por qué la teoría de subastas no toma en consideración estas alternativas al equilibrio sincero.

Econ 32. Se vende en subasta y entre anticuarios un juego de ajedrez antiguo. Una de las piezas está ligeramente dañada, y por ello el juego sólo vale 10.000 dólares. Si estuviera en perfecto estado, valdría 100.000 dólares. Por razones fuera de control, cada uno de los anticuarios solo tiene tiempo de examinar cuidadosamente 31 de las piezas. Casi todos los anticuarios, por tanto, hallan la pieza dañada, pero algunos no. A un anticuario que no ha inspeccionado la pieza dañada le parecerá que el juego se ha conservado en buenas condiciones y asignará una probabilidad de 0,9 al suceso de que el juego se encuentra en perfecto estado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los anticuarios encuentren la pieza dañada? ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un anticuario deje de encontrarla?

b) ¿Por qué la probabilidad de que dos o más anticuarios dejen de encontrarla es igual a

$$1 - (31/32)^N - (N/32)(31/32)^{N-1}?$$

Estimar esta probabilidad para los casos $N=2$, $N=10$, $N=100$.

c) Los anticuarios son neutrales al riesgo, y el juego de ajedrez se vende usando el mecanismo de Vickrey con licitación en sobre cerrado (Sección 11.7.1). ¿A qué precios es posible que se llegue a vender el juego?

d) Para cada uno de los casos del apartado *b*), determinar la probabilidad de que el juego de ajedrez se venda por 100.000 dólares.

e) ¡Adivinar lo que los economistas quieren decir cuando hablan de la *maldición del ganador*!

Econ 33. La Sección 11.7.1 describe distintos mecanismos subastadores. Modelizar una subasta inglesa como un juego de tiempos como el duelo de la Sección 2.4.1. Fijar la oferta inicial igual a 0 dólares y hacer las pujas subsecuentes iguales a cada una de las anteriores más una cantidad fija m dólares. ¿Por qué es una estrategia dominante continuar subiendo hasta ganar, excepto si esto requiere pujar por una cantidad superior a la valoración? Si los jugadores usan esta estrategia, por qué el precio esperado de venta es el mismo que en una subasta de Vickrey en el caso límite cuando $m \to 0$? La Sección 6.3.2 contiene una forma estratégica para el duelo en «tiempo continuo». Ofrecer un modelo similar para una subasta inglesa e identificar así la equivalencia esencial con una subasta de Vickrey.

Econ 34. ¿Por qué una subasta holandesa es esencialmente equivalente a una subasta (de primer precio) de licitación en sobre cerrado?

Econ 35. Es conocimiento común que las valoraciones V_1 y V_2 de los dos compradores potenciales, ambos neutrales al riesgo, en una subasta de Vickrey son independientes y uniformemente distribuidas en $[3, 4]$. Si $3 \leqslant v \leqslant 4$, explicar por qué la probabilidad de que ambas valoraciones excedan a v es $(4 - v)^2$. Suponiendo que el objeto se vende a un precio igual a la menor de ambas valoraciones, se sigue que la probabilidad de que sea vendido por v o menos es $P(v) = 1 - (4 - v)^2$. Este hecho se puede usar para hallar una función de densidad de probabilidad p para el precio de venta. Usar esto para demostrar que el precio esperado de venta es 3 1/3. (Suponer que el propietario está dispuesto a vender a cualquier precio positivo.) ¿Por qué el precio esperado de venta es el mismo en una subasta inglesa?

Econn 36. Con las mismas hipótesis acerca de los compradores que en el ejercicio anterior, usar el siguiente método para demostrar que existe un equilibrio en una subasta de primer precio y licitación en sobre cerrado en el que cada comprador potencial ofrece su esperanza de la valoración del otro comprador condicionada a que ésta sea menor que la suya propia. Un comprador potencial con valoración v ofrece entonces $1/2\,(v + 3)$. Si todos los actores que podrían desempeñar el papel del otro comprador se comportan de esa manera, pero usted ofrece w, usted gana la subasta con probabilidad $2w - 6$ si $3 < w < 3\ 1/2$. Si su valoración del objeto es v, su pago esperado es $(v - w)(2w - 6)$. En equilibrio, usted escogerá w para maximizar esta cantidad.

Econ 37. Continuando el ejercicio anterior, demostrar que el precio esperado de venta es 3 1/2 cuando se usan las estrategias de equilibrio. (Si se usa el mismo método que en el Ejercicio 11.10.29, será necesario demostrar que la probabilidad de que ambos compradores pujen w o menos es $P(w) = (2w - 6)^2$, si $3 < w < 3\ 1/2$. Si $w > 3\ 1/2$, $P(w) = 1$.)

Econ 38. Bajo las mismas hipótesis sobre los compradores que en el Ejercicio 11.10.35, los últimos ejercicios han demostrado que el precio esperado de venta será el mismo para las subastas de licitación en sobre cerrado, inglesa, holandesa y de Vickrey. Este resultado se llama un teorema de *equivalencia de ingresos*. Por qué un principal neutral al riesgo que usa su subasta lo-toma-o-lo-deja óptima ha de pedir el valor de w que maximiza a $w\{1 - (w - 3)^2\}$? Demostrar que su precio esperado de venta es entonces menor que 3 1/2.

Econ 39. Si $0 < p < 1$, hallar una fórmula para $Q : [3, B] \to [0, 1]$ tal que $Q(3) = 0$, $Q(B) = 1$, y que hace $\{p + (1 - p)Q(b)\}(4 - b)$ constante para $3 \leqslant b \leqslant B$. Esto es útil para adaptar la técnica de la Sección 0.1.2 a la obtención de un equilibrio de Nash en el juego que los agentes juegan en la Sección 11.7.2 cuando el principal elige el mecanismo subastador de primer precio y licitación en sobre cerrado. Usar una técnica como la del Ejercicio 11.10.35 para demostrar que el precio esperado de venta es $3 + (1 - p)^2$ cuando se usa este equilibrio. El Ejercicio 11.10.38 menciona un teorema de equivalencia de ingresos. ¿Qué dice aquí el teorema de equivalencia de ingresos?

Econ 40. La Sección 11.7.2 consideró distintos mecanismos de subasta para vender una casa. Ninguno de los mecanismos consideraba la posibilidad de que el vendedor cargara a los compradores potenciales una cuota por participar en la subasta. ¿Se olvida también esta posibilidad en la Sección 11.7.4, donde se discute el diseño de un mecanismo subastador óptimo?

Econ 41. Los Ejercicios 11.10.35 a 11.10.38 tratan de subastas en las que todo el mundo es neutral al riesgo y las valoraciones de dos compradores potenciales son independientes y uniformemente distribuidas en $[3, 4]$. Los siguientes cuatro ejercicios se ocupan del diseño de una subasta simétrica *óptima* cuando estos hechos son conocimiento común. Como en la Sección 11.7.4, el principio de revelación nos dice que sólo es necesario considerar los equilibrios de Nash sinceros de mecanismos *directos* en los que cada comprador potencial anuncia una valoración v. En la Sección 11.7.4, las valoraciones solamente podían ser 3 ó 4, pero aquí v puede ser cualquier número de $[3, 4]$. Después de anunciar v, un comprador espera pagar (v) y ganar la subasta con probabilidad $p(v)$. (Supondremos hasta el final que las funciones f y p son continuas en $[3, 4]$ y derivables en $(3, 4)$.)

a) Explicar por qué las restricciones de *compatibilidad con los incentivos*

$$vp(v) - f(v) \geqslant vp(w) - f(w) \tag{11.16}$$

deben satisfacerse para todo v y w de $[3, 4]$. Recordar (11.6) y (11.7) de la Sección 11.7.4) Deducir que $v(p(v) - f(v))$, $p(v)$ y $f(v)$ son todas crecientes[60].

b) La desigualdad (11.16) dice que $vp(w) - f(w)$ alcanza un máximo en $w = v$. Deducir que una condición necesaria para la compatibilidad con los incentivos es que

$$vp'(v) = f'(v), \tag{11.17}$$

para cada v en $(3, 4)$.

Econ 42. Continuar el ejercicio anterior demostrando que las restricciones de *racionalidad individual* que corresponden a (11.9) y (11.10) en la Sección 11.7.4 son

$$vp(v) - f(v) \geqslant 0, \tag{11.18}$$

[60] Recordemos que *creciente* no significa lo mismo que *estrictamente creciente*. El método por el que se prueban estos resultados sobre «monotonicidad» es muy útil en el diseño de mecanismos.

para todos los v de [3, 4]. Explicar por qué (11.18) se satisface necesariamente cuando las restricciones de compatibilidad con los incentivos (11.16) se satisfacen y si sabemos que (11.18) se satisface para $v = 3$.

¿Por qué tiene que ser efectiva para un mecanismo óptimo la restricción de racionalidad individual $3p(3) - f(3) = 0$ para un comprador potencial con la menor valoración posible?[61]. Resulta que $p(3) = f(3) = 0$, pero $p(v) > 0$ para todo $v > 3$. Para que el álgebra no se haga inmanejable, supondremos estas propiedades del mecanismo óptimo en los siguientes ejercicios[62].

Mates 43. Siguiendo la Sección 11.7.4, el siguiente paso para continuar con el problema del diseño óptimo de los ejercicios anteriores es considerar las restricciones que corresponden a (11.11), (11.12) y (11.13) y que gobiernan los valores que pueden asumir las probabilidades $p(v)$. Escribamos

$$P(v) = \int_3^v p(w)\,dw.$$

Supongamos que alguien le dice al principal que un agente determinado tiene una valoración menor que v, pero carece de cualquier otra información. ¿Por qué le asigna la probabilidad $P(v)/(v - 3)$ al suceso que este agente gane la subasta?[63]. Explíquese por qué $P(4) \leqslant 1/2$ significa que es imposible que ambos agentes puedan ganar (recuérdese que sólo se admiten mecanismos *simétricos*). Explíquese por qué $P(v)/(v - 3) \geqslant 1/2\,(v - 3)$ significa que es imposible que ambos agentes pierdan, dado que ambas valoraciones son menores que v.

Mates 44. Este ejercicio continúa el problema del diseño óptimo de los ejercicios anteriores observando que el principal espera obtener

$$F = \int_3^4 f(v)\,dv.$$

[61] Considérese el resultado de sustituir f por $f - \varepsilon$.

[62] La sustitución de la hipótesis $p(3) = f(3) = 0$ por $3p(3) - f(3) = 0$ implica pocos cálculos suplementarios. Sin embargo, la última frase del ejercicio siguiente depende del hecho de que un comprador con una valoración por encima del mínimo puede llegar a ganar la subasta. Si no escierto que $p(v) > 0$ para $v > 3$, tomemos m igual a la mayor valoración tal que $p(m) = 0$. Los ejercicios siguientes se pueden entonces contestar sustituyendo [3, 4] por [m, 4] donde sea necesario. Entonces es necesario un paso extra para determinar m.

[63] La Sección 12.2 explica cómo calcular probabilidades condicionales en estas circunstancias.

de cada uno de los dos agentes (en lugar de (11.8), como en la Sección 11.7.4). Integrar por partes (Ejercicio 11.10.17), y usar entonces (11.17). Integrar el resultado *dos veces* por partes[64] para obtener que

$$F = 4P(4) - 2\int_3^4 P(v)\,dv.$$

Deducir del ejercicio anterior que $2F \leqslant 3\ 1/3$. Sin embargo, el Ejercicio 11.10.35 nos dice que se puede conseguir un precio esperado de venta de 3 1/3. ¿Por qué se sigue de aquí que las subastas de oferta en sobre cerrado, inglesa, holandesa y de Vickrey, son todas óptimas para el principal?

45. Hallar *todos* los equilibrios de Nash en el caballo de Selten de la Sección 11.8.1, incluyendo los de estrategias mixtas. ¿Qué equilibrios de Nash se pueden asociar a un sistema de creencias para producir un equilibrio de evaluación? (Ya que cada jugador tiene un único conjunto de información, las estrategias mixtas y las de comportamiento coinciden en este juego.)

Mates 46. Este problema ilustra los problemas planteados por el riesgo moral. Un encargado neutral al riesgo es responsable de dos trabajadores que pueden funcionar a dos niveles de esfuerzo: perezoso ($E = 0$) y activo ($E = 8$). Sus niveles de esfuerzo no pueden ser controlados directamente. Por tanto el encargado construye un esquema de incentivos basado en la producción del trabajador. Cada trabajador puede producir un objeto satisfactorio que vale 10 dólares, o un objeto defectuoso que vale 0 dólares. En el primer caso, el encargado paga X dólares al trabajador e Y dólares en el segundo. Cuando el salario de un trabajador es W y su nivel de esfuerzo es E, su utilidad es $U(W, E) = 10\sqrt{W} - E$. Cada trabajador tiene una utilidad de reserva de 10.

La Figura 11.13 muestra cómo los niveles de esfuerzo de los trabajadores están relacionados con su producción. Los valores en las casillas son probabilidades que reflejan factores incontrolables del proceso de producción. Hallar los valores óptimos de X dólares e Y dólares para el principal, dado que su objetivo es inducir a los dos trabajadores a continuar trabajando para ella al nivel de esfuerzo activo[65]. Comparar el pago esperado del principal al usar el esquema óptimo con el pago «óptimo absoluto» que podría obtener si pudiera controlar directamente los niveles de esfuerzo de los trabajadores.

[64] ¡Es sorprendente que la integración por partes sea útil tan a menudo!

[65] Esto es una invitación a escribir restricciones de racionalidad individual y de compatibilidad con los incentivos. La forma de la función de utilidad de los trabajadores impone las restricciones adicionales implícitas $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$.

		Perezoso $0	Perezoso $10	Activo $0	Activo $10
Perezoso	$0	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$
Perezoso	$10	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
Activo	$0	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
Activo	$10	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$

Figura 11.13. Tabla para el Ejercicio 11.10.46.

Econ

47. El «mercado de cacharros» de Akerlof es un famoso ejemplo del funcionamiento de la selección adversa (Sección 11.7.2). En la siguiente versión simplificada, un coche de segunda mano es vendido en una subasta de lo-toma-o-lo-deja. El coche puede ser bueno o un cacharro[66], pero no se puede saber hasta que no se es propietario del coche. Todo el mundo es neutral al riesgo. Trabajando con unidades de miles de dólares, los vendedores valoran los coches buenos a 9k dólares y los cacharros a 3k dólares. Todos los (muchos) compradores potenciales valoran los coches buenos a 12k dólares y los cacharros a 6k dólares. Todo esto es conocimiento común.
   a) Si es conocimiento común que la probabilidad de que un coche sea un cacharro es p, ¿por qué se vende el coche por $6(2 - p)$?
   b) ¿Por qué un valor de $1/2 < p < 1$ niega la racionalidad de algún participante?
   c) Si las circunstancias son tales que se ofrecen a la venta en estas subastas más cacharros que coches buenos, ¿qué se puede decir del número de coches buenos que se subastarán de esta forma?

[66] [En el original, este caso se denomina el «mercado de limones de Akerlof» (*N. del T.*)] Para quienes la lengua materna no es el inglés, «que te endosen un limón» (*being left with a lemon*) significa que uno termina adquiriendo algo inesperadamente malo. Presumiblemente, se dice así por que a veces es difícil distinguir una naranja de un limón antes del primer mordisco. ¿Pero, por qué «que te vendan un perrito» (*being sold a pup*) significa lo mismo?

48. Este ejercicio ofrece una versión más dramática del problema del «mercado de cacharros» estudiado en el Ejercicio 11.10.47. Como antes, todo el mundo es neutral al riesgo y no se sabe el tipo de un coche hasta que no se ha comprado. Pero ahora hay muchas clases de coche. Muchos compradores potenciales, en una subasta de lo-toma-o-lo-deja estarían dispuestos a pagar $(1 + \varepsilon)xk$ dólares por un coche que vale xk dólares para su actual propietario, si estuvieran seguros de lo que compran. Para que las cosas sean interesantes, supondremos que $\varepsilon > 0$ y que nadie atribuye una valoración negativa a un coche.
   a) Si se ofrece un coche al precio de yk dólares, escribir una fórmula para la valoración del coche esperada del comprador en términos de su función de densidad de probabilidad f de la valoración del propietario.
   b) Explicar por qué el coche no será comprado excepto si
$$(1 + \varepsilon)\int_0^y xf(x)\,dx \geqslant y\int_0^y f(x)\,dx.$$
   c) Considerar en esta fórmula $\varepsilon \to 0$, e integrar por partes el miembro de la izquierda de la fórmula obtenida.
   d) Si existe una probabilidad positiva de que el propietario valore el coche por debajo de yk dólares, demostrar que el coche no será vendido al precio yk dólares cuando ε es suficientemente pequeño.
   e) ¿Qué se puede decir sobre el tipo de un coche que será ofrecido en subasta, y sobre el precio al que se venderá cuando ε es pequeño? ¿Qué tiene esto que ver con los cacharros?
   f) ¿Qué hipótesis implícitas se han hecho sobre lo que es conocimiento común?
49. La Sección 10.8.1 estudió el dilema del prisionero de la Figura 7.3(b) repetido finitamente cuando el número de repeticiones no es conocimiento común. La Sección 11.9 explica por qué el modelo de la Sección 10.8.1 tiene la estructura de un juego sin raíz. La Sección 11.9.1 explica por qué las creencias de los actores en el equilibrio de evaluación considerado en la Sección 10.8.1 no son consistentes con la doctrina de Harsanyi. En este ejercicio, se asignan creencias distintas a los actores. Supongamos que un actor cuyo conjunto de información es $\{n, n + 1\}$ asigna la probabilidad $1/(1 + \delta)$ al nodo n y probabilidad $\delta/(1 + \delta)$ al nodo $n + 1$.
   a) ¿Por qué estas creencias son consistentes cuando $0 < \delta < 1$? Si se dispusiera de una jugada de reparto que le diera una raíz al juego, ¿con qué probabilidad escogería el azar a Mr. n?
   b) ¿Por qué el equilibrio cooperativo de la Sección 10.8.1 no sobrevive a este cambio de creencias?

c) Suponiendo que todos los 6 en la tabla de pagos del dilema del prisionero de la Figura 7.3(b) son sustituidos por 5, demostrar que el mismo equilibrio cooperativo es viable si las creencias modificadas tienen $\delta \geqslant 3/4$.

Filo 50. Una tienda solía vender grandes juegos de cartas que sólo contenían sotas y comodines. Es conocimiento común que la fracción p de comodines en un juego está uniformemente distribuida en [0, 1]. Con el paso de los años, todos los juegos salvo uno se pierden o destruyen. La moda actual decreta que el juego restante es valioso, pero que su valor es función del número de comodines que contiene. Antes de intentar vender el juego, el propietario visita a todos los coleccionistas de estas curiosidades. La premura de tiempo sólo permite a cada coleccionista inspeccionar un 10 por 100 de las cartas del juego seleccionadas aleatoriamente. Cada coleccionista usa esta información para revisar su probabilidad a priori de p. ¿Por qué la estructura de conocimiento de esta situación es similar a la de la Sección 11.5.1? Usar la analogía para discutir si el modelo de la Sección 11.5.1 es consistente con la doctrina de Harsanyi.

C A P I T U L O

12

Farolear

12.1. Póquer

Este último capítulo, que no contiene ideas nuevas, está concebido como una serie de ejercicios sobre cómo construir y analizar modelos de teoría de juegos[1]. Lo que queremos estudiar es el póquer. Hay varias razones detrás de esta elección. Una es sentimental. El segundo modelo para el póquer de Von Neumann fue lo que me hizo interesarme en la teoría de juegos. Yo creía saber que los buenos jugadores de póquer tienen que echarse muchos faroles, pero me asombró la cantidad de faroles que Von Neumann consideraba óptima.

La segunda razón para estudiar el póquer también es sentimental en alguna medida, porque proporciona la ocasión de rendir homenaje no solamente a Von Neumann, sino también a Borel, Nash y Shapley. El mérito de la creación de la teoría de juegos como disciplina ha de ser otorgado a Von Neumann, pero el matemático francés Borel inició el camino antes que él. Por ejemplo, Borel parece haber sido el primero en formular la noción de estrategia pura[2]. Nash, por supuesto, es un viejo conocido, pero no hemos oído casi nada acerca de Shapley. Esto es así porque sus contribuciones más conocidas pertenecen a la teoría de juegos cooperativos, de la que este libro apenas se ha ocupado.

La tercera razón para estudiar el póquer no es sentimental en absoluto. Tal vez lo más importante que la teoría de juegos puede ofrecer es un lenguaje con el cual cuestiones de información se pueden discutir de forma razonable. Lo que las personas saben y creen condiciona enormemente la forma de tratarse entre sí. Esto es particularmente cierto en economía. Hasta que no se dispuso de la teoría de juegos, sin embargo, quienes se ocupaban de estas cosas solamente podían trabajar con ayuda de su poco educada intuición. Pero, como mi propia experiencia con el segundo modelo del póquer de Von Neumann testifica, la intuición poco educada puede andar muy desencaminada. En el póquer, por otra parte, se dan algunos de los problemas importantes en una forma muy pura, sin las adulteraciones de origen empírico o político que suelen hacer muy difícil mantener un razonamiento lógico impecable en situaciones más complicadas. Es por algo que una mesa de jugadores de póquer se llama en inglés una *school.* Cuando se domina el juego racional en el póquer, se hace imposible cometer según qué errores en un contexto más amplio. Esto no solamente es válido para el póquer, sino también para muchos otros juegos de salón. Es particularmente obvio en el caso de juegos de mesa como el gallina y el dilema del prisionero.

La gente que no entiende cómo avanza el conocimiento humano suele reaccionar desdeñosamente ante afirmaciones así. ¿Qué interés puede tener

---

[1] Los que han trabajado asiduamente en los ejercicios de los capítulos anteriores advertirán con alivio que este capítulo no contiene su propia sección de ejercicios.

[2] Borel pensaba, sin embargo, que el teorema del minimax era probablemente falso. Afortunadamente, Von Neumann desconocía el trabajo de Borel; de no haber sido este el caso, se hubiera podido desanimar antes de empezar.

—dicen— estudiar un juego de salón tan tonto como el póquer, si lo que queremos es profundizar en nuestra comprensión de los problemas sociales y humanos en general? Me gusta caracterizar a esta gente como *positivistas ingenuos*. Raramente han recibido una buena educación matemática. En caso contrario hubieran aprendido que los problemas difíciles no se rinden habitualmente ante un ataque frontal. Hay que sitiarlos. Los estudiantes de doctorado en matemáticas aprenden a considerar primero versiones simples de los problemas. Los ejemplos sirven para liberar la mente de incomprensiones y para clarificar cuáles son las dificultades. También se les enseña a a buscar analogías entre el problema planteado y otros problemas ya resueltos o que se pueden resolver. Esta búsqueda de la idea esclarecedora le puede llevar a uno muy lejos. Un especialista en ciencia política puede terminar estudiando el dilema del prisionero. Los economistas tal vez han de estudiar la literatura sobre modelos del póquer. Los positivistas ingenuos pensarán que estos esfuerzos son ridículos, pero esto es porque los positivistas ingenuos no entienden que nadie, nunca, resolvió un problema difícil, si antes no había aprendido a resolver problemas fáciles.

12.1.1. Cómo se juega el póquer

El póquer es un juego de cartas en el que son necesarios alrededor de siete jugadores para que las variantes que se juegan normalmente resulten divertidas. En las partidas familiares o entre amigos lo normal es jugar calderilla, pero jugar al póquer no tiene ningún interés si no están en juego cantidades de dinero que realmente duela perder. En caso contrario, es imposible marcarse faroles de forma efectiva, y el póquer no es sino farolear.

En la versión más ordinaria del póquer (el póquer *straight*), se reparte una *mano* de cinco cartas. Para nuestros propósitos basta con saber que unas manos son mejores que otras. Sin embargo, y para que la descripción sea completa, daremos una lista con las distintas manos en orden de menor a mayor valor:

Cinco cartas (sin rasgo característico)
Pareja
Doble pareja
Trío
Escalera (cinco cartas en sucesión; pueden ser de palos distintos)
Color (cinco cartas del mismo palo)
Full (un trío y una pareja)
Póquer (cuatro cartas del mismo número)
Escalera de color

La Figura 12.1 muestra ejemplos de las manos posibles. Dentro de cada categoría, las manos también están ordenadas. Por ejemplo, una pareja de reyes

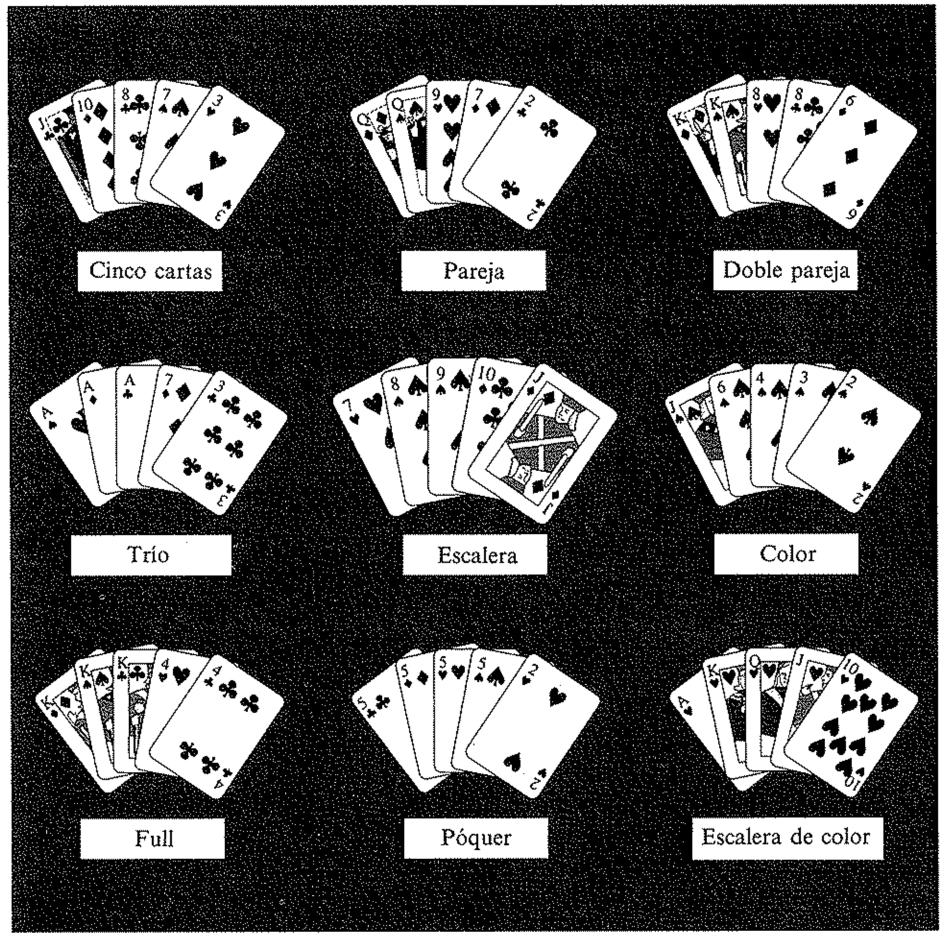


Figura 12.1. Las manos del póquer.

gana a una pareja de nueves[3]. Nunca me han servido una escalera de color, y es improbable que usted sea más afortunado. A menudo una pareja basta para ganar el pote en el póquer *straight*.

Después de repartir las cartas, empiezan las apuestas. Habitualmente, los jugadores compran *fichas* para usarlas en lugar de dinero. Las fichas apostadas constituyen el *pote*. En la mayoría de las *escuelas* o *mesas* de póquer, cada jugador ha de *marcar* el pote con una cantidad, llamada el *ante*, antes de hacer nada. El jugador a la izquierda del que ha repartido hace la primera apuesta. Después de cada apuesta, el siguiente jugador por

[3] Los ases, curiosamente, son la carta más alta. Así, la serie A, K, Q, J, 10 es la mejor escalera posible. Sin embargo, para no dejar que el as olvide completamente sus orígenes humildes, la serie A, 2, 3, 4, 5 es la menor escalera posible.

la izquierda debe *retirarse*, *seguir* o *subir*. Subir es apostar más que el último jugador. Seguir es apostar lo mismo que el último jugador[4]. Un jugador que no sigue ni sube debe retirarse. Este jugador ya no toma parte en el resto del juego y pierde todas las fichas apostadas hasta ese momento. Esto es cierto incluso cuando la mano retirada resulta ser mejor que la mano que finalmente gana el pote.

Una vez que todos los jugadores que no se han retirado tienen el mismo número de fichas en el pote, las apuestas han terminado. En un juego animado, esto puede requerir varias rondas de apuestas con numerosas subidas. Todos los que continúan en el juego enseñan ahora las cartas y la mejor mano se lleva el pote.

Habitualmente se imponen límites en la cantidad que se puede apostar. Apostando con el «límite del pote», nadie puede apostar más de lo que el pote contiene en aquel momento. Con el «límite de la mesa», nadie puede ser obligado a apostar un número de fichas superior al que los jugadores eligen mantener en la mesa. Algún tipo de límite es necesario para impedir que los jugadores ricos «compren el pote», pero, como hemos dicho anteriormente, el póquer es aburrido si los límites son demasiado bajos.

El póquer ordinario (*straight*) propiamente dicho no se juega casi nunca, pero existen muchas variantes enormemente populares. En el póquer con descarte hay dos rondas de apuestas, con la oportunidad de cambiar algunas cartas entre ambas. En el póquer descubierto la primera carta se sirve boca abajo. Cada una de las cartas siguientes, hasta un total de cinco, se sirve boca arriba, o descubierta, y es seguida por una ronda de apuestas (dando cuatro rondas en total). En el póquer descubierto de siete cartas algunas de ellas también se sirven descubiertas. A veces las reglas especifican que los jugadores se pasen cartas de unos a otros. A veces se incluyen comodines[5]. Actualmente son muy populares los juegos Hi-Lo. En ellos el pote se reparte entre los jugadores que tienen las manos mejor y peor.

Al contrario de lo que ocurre con el ajedrez, el póquer no es demasiado complejo para analizarlo con un ordenador. Sin embargo, los análisis detallados de las variantes del póquer que realmente se juegan son de un interés limitado. Son de un interés limitado para quienes quieren ganar mucho dinero rápidamente, porque la teoría de juegos se ocupa de lo que hay que hacer cuando los oponentes juegan óptimamente. Pero salvo algunas excepciones, como en el Campeonato Mundial de Póquer, el juego de los jugadores reales de póquer raramente se aproxima a lo que sería óptimo. Contra oponentes así se gana dinero explotando sus errores, y no suponiendo que no los cometen.

Un análisis en términos de teoría de juegos de una variante del póquer jugada en la vida real tampoco es de mucho interés para quienes, como nosotros, estamos interesados en entender qué debemos esperar de individuos

[4] Si nadie ha apostado previamente, seguir es apostar cero. A esto se le llama *pasar*.

[5] Un comodín vale por aquello que el jugador que lo tiene quiere que valga.

racionales en términos de faroles y engaños. Para ello es necesario estudiar modelos *simples*, en los que la comprensión de ideas importantes no se vea dificultada por una masa de detalles.

Una simplificación será eliminar el nombre, vistoso pero irrelevante, de las manos del póquer. Asignaremos un número a cada mano, entendiendo que los números mayores ganan a los menores. Una segunda simplificación será considerar partidas de póquer jugadas por sólo dos o tres jugadores. La tercera simplificación consistirá en tratar el póquer como un juego de suma cero. Como hemos dicho en la Sección 6.5.1, esta no es una hipótesis trivial. Es cierto que todo lo que gane un jugador deben perderlo los otros, pero esto sólo da un juego de suma cero si los jugadores son neutrales al riesgo y lo único que les importa es el dinero. Pero los jugadores de póquer de la vida real suelen estar más interesados en encontrar oportunidades de pavonearse y fanfarronear que en el dinero en sí mismo, y, si las apuestas son importantes, es improbable que sean neutrales al riesgo (incluso cuando ganar dinero es su objetivo principal). La cuarta simplificación, que es la más importante, consiste en restringir la forma en que los jugadores pueden apostar. Afortunadamente, esto se puede hacer de manera que las cuestiones estratégicas esenciales no resulten afectadas.

12.2. Densidades de probabilidad condicional

Revisión 12.3 ⟶

La Sección 11.4 explica qué significa decir que una variable aleatoria X tiene una función de distribución de probabilidad $P : \mathbb{R} \to [0, 1]$ y una función de densidad de probabilidad $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Si se obtiene alguna información suplementaria sobre X, estas funciones deben ser actualizadas. Supongamos que la nueva información es que $a < X \leqslant b$. ¿Cuáles serán la nueva función de distribución $Q : \mathbb{R} \to [0, 1]$ y la nueva función de densidad $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, condicionadas a esta nueva información?

Puesto que no podemos condicionar nada a un suceso de probabilidad cero, es necesario suponer que

$$c^{-1} = \text{prob}(a < X \leqslant b) = \int_a^b p(v)\,dv$$

no es cero. Una fórmula para $Q(x) = \text{prob}(X \leqslant x \mid a < x \leqslant b)$ se puede obtener ahora fácilmente usando la definición de probabilidad condicional de la Sección 2.1.4:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{\text{prob}(X \leqslant x \text{ y } a < X \leqslant b)}{\text{prob}(a < X \leqslant b)} \\ &= c\ \text{prob}(X \leqslant x \text{ y } a < X \leqslant b), \end{aligned}$$

y de aquí

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant a \\ c \text{ prob}(a < X \leqslant x), & \text{si } a < x \leqslant b \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

El intervalo interesante es, por tanto, $a < x \leqslant b$. Para valores de x en este intervalo,

$$Q(x) = c \int_a^x p(u)\, du.$$

Es fácil, por tanto, escribir una fórmula para la densidad de X condicionada a que $a < X \leqslant b$. Tenemos que $q(x) = 0$ excepto para $a < x \leqslant b$. Cuando $a < x \leqslant b$,

$$q(x) = cp(x) = p(x)\left\{\int_a^b p(u)\, du\right\}^{-1}. \qquad (12.1)$$

12.2.1. *La distribución uniforme*

Una variable aleatoria está uniformemente distribuida sobre [0, 1] si tiene la función de distribución de probabilidad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si I es un intervalo en [0, 1], entonces que X esté uniformemente distribuida en [0, 1] implica que la probabilidad de que X esté en I es simplemente igual a la longitud l del intervalo I. Así pues, dados dos intervalos cualesquiera I en [0, 1] de igual longitud, es tan probable que X se encuentre en uno como en otro. Esto es lo que significa la expresión de que X «tiene la misma probabilidad» de tomar cualquier valor en [0, 1].[6]

¿Cuál es la densidad de probabilidad condicional f_I de X cuando la información condicionante es que X se encuentra en un intervalo I de longitud $l > 0$ en [0, 1]? Esto se puede deducir de (12.1). Tenemos que $f_I(u) = 0$ cuando u no está en I. Si u está en I, entonces

$$f_I(u) = f(u)/l = 1/l. \qquad (12.2)$$

[6] No quiere decir que prob($X = x$) = prob($X = y$) para todos los x e y de [0, 1]. Esto es cierto siempre que X tiene una función de densidad de probabilidad, porque entonces la probabilidad de que X tome un valor particular cualquiera es cero.

12.3. El modelo de Borel para el póquer

Borel modelizó el póquer como un juego de suma cero con dos jugadores, y le dio el árbol, muy simple, que aparece en la Figura 12.2(a). La Figura 12.2(b) muestra el árbol para el segundo de los modelos de Von Neumann para el póquer. Lo que estos modelos nos dicen acerca de los faroles es muy instructivo, pero posponemos el comentario hasta la Sección 12.5, cuando analizaremos conjuntamente ambos modelos.

Reglas. Suponemos que ambos jugadores son neutrales al riesgo, de manera que las apuestas las podemos dar en dólares. Para empezar, cada jugador marca con un *ante* de 1 dólar. A continuación se reparten cartas. Se puede descubrir que este modelo está hecho por un matemático por el hecho de que una *mano* es simplemente un número real del intervalo [0, 1]. La mano del jugador I es el valor u de una variable aleatoria U, y la mano de la jugadora II es el valor v de una variable aleatoria V. Las variables aleatorias U y V son *independientes* y están *uniformemente distribuidas* en [0, 1].

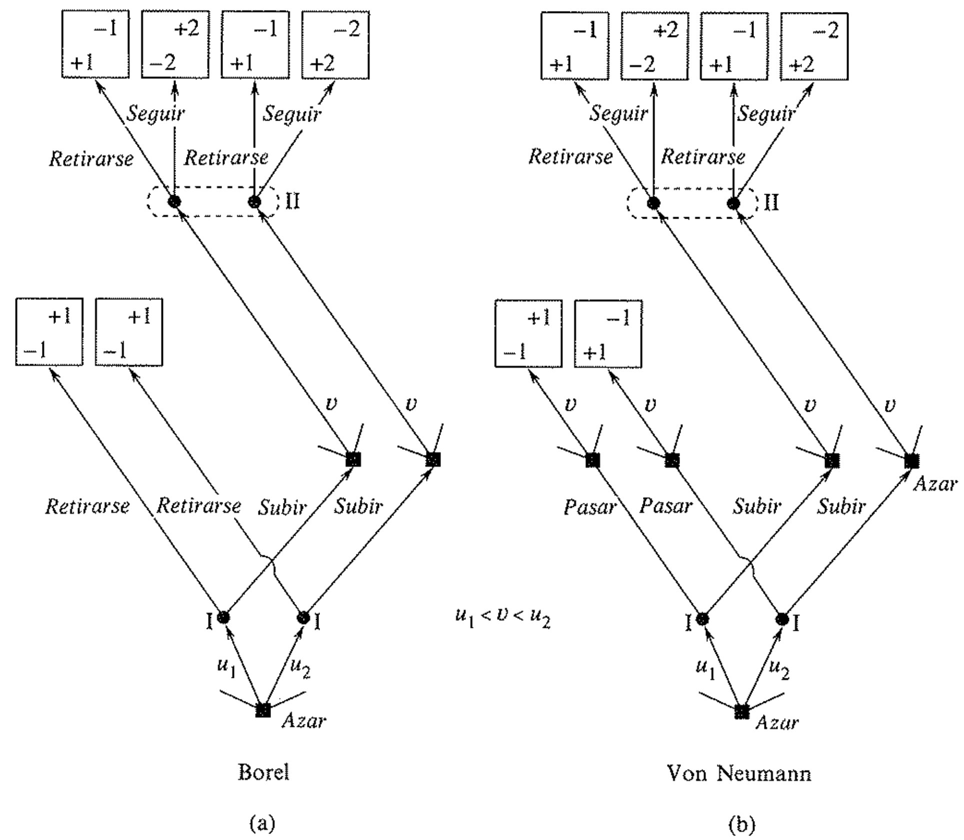


Figura 12.2. Modelos para el póquer.

La Figura 12.2 muestra dos manos posibles u_1 y u_2 para el jugador I. Resulta conveniente dibujar el árbol de forma que la jugadora recibe sus cartas, la mano v, después de que el jugador I ha decidido qué apostar. Obsérvese que v satisface $u_1 < v < u_2$, en la Figura 12.2.

En el modelo de Borel, el jugador I sólo puede *retirarse* o *subir* después de ver sus cartas. Si se retira, pierde su[7] *ante* de 1 dólar, que gana la jugadora II. Subir consiste en apostar 1 dólar. Cuando la jugadora II ha visto sus propias cartas, puede *retirarse* o *seguir*. Si se retira, pierde su *ante* de 1 dólar, que gana el jugador I. Para seguir, ha de poner 1 dólar en el pote. Con esto el juego ha terminado, y los jugadores enseñan sus cartas. Quien tiene la mejor mano, se lleva el pote[8]. El perdedor tiene 2 dólares menos, que ahora son del ganador.

12.3.1. Primer análisis del modelo de Borel

Este capítulo es un largo ejercicio sobre las técnicas de la teoría elemental de juegos. Por ello ofrecemos *dos* análisis del modelo de Borel. Aunque a uno no se le ocurriría pensar normalmente que el póquer es un juego de información incompleta, los dos análisis son primos hermanos de los dos planteamientos ofrecidos en la Sección 11.2.2.

En el primer análisis, podemos imaginar que un jugador espera hasta que se le ha servido una mano para decidir qué acción tomar. Puede ser útil pensar en el jugador I, con la mano u, en términos de Mr. u, y en la jugadora II, que tiene la mano v, en términos de Ms. v.

Para simplificar las cosas, buscaremos un equilibrio en el que las estrategias usadas son de las que el coronel Blotto apreciaría. Estas mandan apostar mucho cuando se tiene una buena mano, y poco cuando la mano es mala. Más exactamente, se trata de buscar valores x e y tales que el jugador I subiría si y sólo si $u > x$, y la jugadora II seguiría si y sólo si $v > y$.

Supongamos que el jugador I sube. Si la jugadora II tiene v, ¿debería seguir? La respuesta depende de su probabilidad w de ganar. Si se retira, su pago es -1. Si sigue, su pago es $2w - 2(1 - w)$. Para ella es óptimo, por tanto, seguir si y sólo si

$$w \geqslant 1/4. \tag{12.3}$$

[7] El posesivo *su* es equívoco aquí. Una fuente importante de equívocos para los jugadores de póquer novatos es suponer que el dinero puesto en el pote en cierto sentido todavía es de uno. No lo es. Pertenece a quienquiera que finalmente gane el pote, y esto también es cierto para todo el dinero que se llega a postar posteriormente para «proteger la inversión». Como dicen los economistas, el dinero apostado es un *coste irrecuperable*.

[8] Si las manos son iguales, supondremos que el pote se divide en partes iguales. Sin embargo, podemos suponer cualquier cosa para este suceso, porque ocurre con probabilidad cero.

Para calcular w, la jugadora II consulta un libro de teoría de juegos y descubre que el jugador I sube si y sólo si $u > x$. La probabilidad $w = \text{prob}\{U < v \mid x < U \leqslant 1\}$ se puede hallar usando (12.2). Viene dada por

$$w = \int_x^v \frac{du}{1 - x} = \frac{v - x}{1 - x} \quad (x \leqslant v \leqslant 1).$$

Sustituyendo este resultado en (12.3) obtenemos $4v \geqslant 3x + 1$ como condición necesaria y suficiente para que sea óptimo seguir, si el jugador II tiene la mano v. Se sigue que y viene dado por

$$4y = 3x + 1. \tag{12.4}$$

Consideremos ahora el jugador I. Si le fue servida una mano $u \leqslant y$, entonces sabe que perderá 2 dólares si sube y la jugadora II sigue. Por otra parte, ganará 1 dólar si sube y la jugadora II se retira. Puesto que ésta se retira con probabilidad y, su pago esperado al subir es $-2(1 - y) + y$. Su pago al retirarse es -1. Hemos de considerar tres casos, según que $-2(1 - y) + y$ sea mayor que, menor que, o igual a -1.

Caso 1: $y > 1/3$. En este caso es óptimo para el jugador I subir siempre que $u \leqslant y$. Esto implica que $x = 0$. Pero entonces (12.4) da que $y = 1/4$, que es incompatible con $y > 1/3$.

Caso 2: $y < 1/3$. En este caso es óptimo para la jugadora II retirarse siempre que $u \leqslant y$. Esto implica que $x \geqslant y$. Pero entonces (12.4) da que $y \geqslant 1$, que es incompatible con $y < 1/3$.

Caso 3: $y = 1/3$. En este caso el jugador I es indiferente entre subir y retirarse siempre que $u \leqslant y$. Puesto que los demás casos han sido eliminados, este es el caso que debe cumplirse para que nuestra búsqueda de un equilibrio tenga éxito.

El último paso es sustituir $y = 1/3$ en (12.4) para hallar x. Esto da

$$x = 1/9 \quad ; \quad y = 1/3. \tag{12.5}$$

Obsérvese que $0 < x < y$. Así pues, el jugador I es indiferente entre subir y retirarse cuando $u \leqslant y$, pero se retira cuando $0 \leqslant u \leqslant x$ y sube cuando $x < u \leqslant y$ en este equilibrio[9].

[9] Deberíamos comprobar que es óptimo para el jugador I subir cuando $u > y$, puesto que en el texto sólo hemos considerado el caso $u \leqslant y$. Sin embargo, ha de esperar más por subir cuando $u > y$ que cuando $u \leqslant y$, porque en el primer caso a veces ganará al comparar las manos.

Comentario. (1) El primer comentario es que la mejor mano a veces se retira. Exactamente, el jugador I retira la mejor mano con probabilidad 1/18, y la jugadora II retira la mejor mano con probabilidad 2/27. Se puede extraer una lección importante. Si nunca se retira con una mano que hubiera ganado, entonces debe estar jugando mal.

(2) El segundo comentario es que nada nos asegura que hemos encontrado todos los equilibrios de Nash. Es fácil ver que se puede modificar la estrategia del jugador I sin alterar el equilibrio. Este *tiene* que subir cuando $u > 1/3$, pero tiene mucha libertad cuando $u \leqslant 1/3$. La única limitación es que la probabilidad con que se retira, dado que $u \leqslant 1/3$, es igual a 1/3. La Sección 12.4 describe un método para hallar *todos* los equilibrios de Nash en estos modelos.

12.3.2. Segundo análisis del modelo de Borel para el póquer

En el modelo de la sección anterior, las decisiones optimizadoras se tomaban después de repartir cartas. Podemos pensar, por tanto, que cada mano distinta especifica un tipo particular de actor, como en el primer planteamiento de la Sección 11.2.2. En lo que sigue, sin embargo, las decisiones optimizadoras se tomarán antes de repartir las cartas. Si es necesario, podemos pensar que el jugador I es Von Neumann y la jugadora II es Morgenstern, como en la historia de la Sección 11.2.2. Más concretamente, se puede observar que nuestro plan consistirá en buscar equilibrios de Nash en la forma estratégica del modelo de Borel.

Forma estratégica. Para construir la forma estratégica es necesario, en primer lugar, especificar las estrategias puras del juego. Una estrategia pura para el jugador I es una función $g : [0, 1] \to \{retirarse, subir\}$. Una función así le dice al jugador I qué debe hacer con cada una de las manos u que le pueden servir. Si le sirven u, debería retirarse si $g(u) = retirarse$, y debería subir si $g(u) = subir$. Análogamente, una estrategia pura para la jugadora II es una función $h : [0, 1] \to \{retirarse, seguir\}$.

Como en la Sección 12.3.1, no intentaremos examinar todas las estrategias puras. Concentraremos nuestra atención en estrategias tipo coronel Blotto de la forma

$$g(u) = \begin{cases} retirarse, & \text{si } u \leqslant x \\ subir, & \text{si } u > x \end{cases} ; \quad h(v) = \begin{cases} retirarse, & \text{si } v \leqslant y \\ seguir, & \text{si } v > y. \end{cases}$$

Cada una de de las estrategias puras del jugador I que consideraremos, por tanto, corresponde a un número real x en $[0, 1]$. Análogamente, cada una de las estrategias puras de la jugadora II corresponde a un número real y en $[0, 1]$. Para hallar la forma estratégica del juego, necesitamos determinar la función de pagos del jugador I, $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. Puesto que el juego

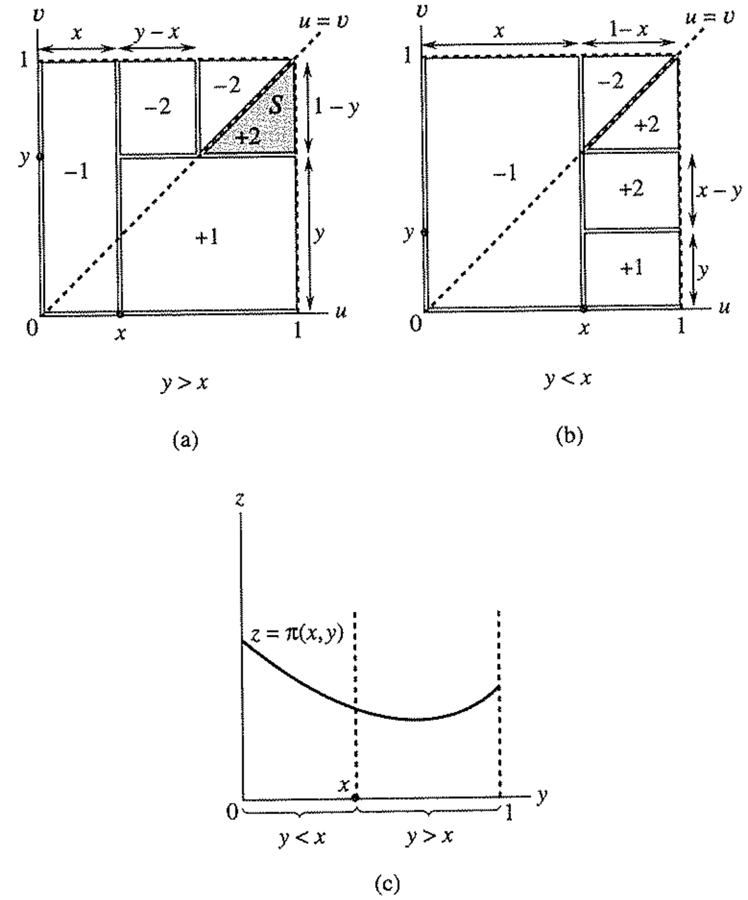


Figura 12.3. Pagos en el modelo de Borel para el póquer.

es de suma cero, la función de pagos de la jugadora II quedará determinada simultáneamente.

Las Figuras 12.3(a) y 12.3(b) quieren facilitar el trabajo de calcular una fórmula para $\pi(x, y)$. La Figura 12.3(a), que se aplica cuando $y > x$, muestra cuánto gana el jugador I cuando el par de manos (u, v) servido pertenece a distintas regiones del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Por ejemplo, si (u, v) pertenece a la región S de la Figura 12.3(a), entonces $u > x$ y $v > y$. Luego el jugador I sube y la jugadora II sigue. Entonces se enseñan las cartas. Obsérvese que la región S se encuentra por debajo de la recta $u = v$. Luego, cuando (u, v) pertenece a S, $u > v$ y el jugador I gana al mostrar las cartas. La cantidad que gana son 2 dólares.

Obviamente, antes del reparto de cartas nadie sabe qué cartas le van a servir. Así pues, $\pi(x, y)$ ha de ser calculada como una esperanza sobre todas las posibilidades. Recordemos que la Figura 12.3(a) se aplica cuando $y > x$.

Para calcular $\pi(x, y)$ cuando $x > y$, por tanto, necesitamos multiplicar cada una de las cantidades que el jugador I puede ganar por la probabilidad de ganarla. La esperanza $\pi(x, y)$ es la suma de los productos resultantes.

Afortunadamente, es bastante fácil calcular las probabilidades necesarias, porque U y V son independientes y están uniformemente distribuidas sobre $[0, 1]$. Así, la probabilidad de que (u, v) pertenezca a una región R de $[0, 1] \times [0, 1]$ es simplemente igual al área de R. Se sigue que, para $y > x$,

$$\pi(x, y) = -x + (1 - x)y - 2(1 - y)(y - x). \tag{12.6}$$

(Obsérvese que no es necesario calcular las areas de las regiones triangulares de la Figura 12.3(a), porque las cantidades que estas regiones contribuyen al total se anulan mútuamente al calcular la esperanza.) Procediendo del mismo modo con la Figura 12.3(b), obtenemos que, para $y < x$,

$$\pi(x, y) = -x + (1 - x)y + 2(1 - x)(x - y). \tag{12.7}$$

Maximín. Como sabemos por la Sección 1.8.1, un equilibrio de Nash en un juego finito, de dos jugadores y suma cero es un punto de silla de la matriz de pagos del jugador I. Podríamos buscar[10], por tanto, un par $(\tilde{x}, \tilde{y})$ para el cual $\pi(\tilde{x}, \tilde{y})$ es el mayor de su «columna» y el menor de su «fila» (de manera que $\pi(x, \tilde{y}) \geqslant \pi(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqslant \pi(\tilde{x}, y)$ para todos los x e y en $[0, 1]$). Pero es más fácil calcular el valor maximín del jugador I.

La Figura 12.3(c) muestra el gráfico[11] de $z = \pi(x, y)$ para un valor fijo de x. Puesto que el mínimo se da cuando $x < y < 1$, encontraremos el mínimo escribiendo

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0, \tag{12.8}$$

y usando la fórmula (12.6) para π. Esto da $4y = 3x + 1$, como en (12.4). La solución de esta ecuación es $y = y(x) = 1/4(3x + 1)$. Ahora necesitamos maximizar $w = \pi(x, y(x))$ para hallar el valor maximín del jugador I.

Teniendo presente (12.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ &= 1 - 3y(x). \end{aligned}$$

[10] Como se hace en *Game Theory for the Social Sciences*, de Moulin. Este libro proporciona abundantes e instructivos ejemplos.

[11] ¿Cómo sabemos que el gráfico tiene este aspecto? Derivar (12.7) respecto a y, dejando x constante. El resultado es $-(1 - x) \leqslant 0$. Luego $\pi(x, y)$ es decreciente cuando $0 \leqslant y \leqslant x$. También necesitamos saber que y, definida por (12.4), se encuentra entre x y 1. Si $x > y$, se sigue de (12.4) que $4x > 3x + 1$ y, por tanto, $x > 1$, que es imposible. Si $1 < y$, entonces se sigue de (12.4) que $4 < 3x + 1$ y, por tanto, de nuevo, que $x > 1$.

Las posibilidades $x = 0$ y $x = 1$ para el punto en que $w = \pi(x, y(x))$ alcanza un máximo se pueden eliminar, ya que sabemos que, por ser $4y(x) = 3x + 1$, dw/dx es positiva en el primero de estos valores y negativa en el segundo. Puesto que no hay soluciones de esquina, $w = \pi(x, y(x))$ alcanza el máximo donde $dw/dx = 0$. Luego, en el máximo, $y(x) = 1/3$ y el valor maximizador de x es $1/9$. Esto confirma los resultados (12.5).

Las conclusiones de la Sección 12.3.1, por tanto, han sido confirmadas por un método alternativo. La fórmula (12.6) facilita el cálculo del *valor* del juego. En juegos de dos jugadores y suma cero, este coincide con la estrategia de seguridad del jugador I (y lo que éste realmente consigue si ambos jugadores actúan óptimamente). Sustituyendo los valores $x = 1/9$, $y = 1/3$ en (12.6), obtenemos que el valor del juego es $-1/9$. Puesto que el valor es negativo, el jugador I preferiría no jugar, si pudiera evitarlo.

12.4. El modelo de Von Neumann para el póquer

Mates 12.5 ⟶

De los dos modelos que Von Neumann propuso para el póquer aquí describiremos el segundo, que es el más interesante. La Figura 12.2(b) muestra su árbol. Se diferencia del modelo de Borel en que ofrece al jugador I oportunidades de apostar más realistas. En el modelo de Borel, éste debe retirarse si no sube. Sin embargo, en el juego de póquer real retirarse en la primera ronda de apuestas es, para el jugador I, una estrategia débilmente dominada, porque siempre puede pasar y retirarase más tarde si es necesario. *Pasar* consiste simplemente en apostar cero fichas.

Aunque la situación del jugador I se hace más realista en el modelo de Von Neumann, la situación de la jugadora II continúa estando artificialmente limitada. Si el jugador I pasa, ella se ve *obligada* a seguir. Si el jugador I sube, a ella no le está permitido subir a su vez. Sólo puede elegir entre retirarse y seguir. A pesar de estas limitaciones, aparentemente muy severas, el modelo de Von Neumann expresa la esencia de lo que es importante acerca de los faroles, y lo hace de forma más fiel que el modelo de Borel.

Todos los equilibrios de Nash. En los análisis del modelo de Borel de la Sección 12.3 sólo consideramos algunas de las estrategias puras posibles. Las llamamos estrategias del coronel Blotto porque no requieren mucha creatividad. Allí no consideramos para nada las estrategias mixtas, pero esta sección es más ambiciosa. El análisis llega casi hasta el final en la determinación de *todos* los equilibrios del juego[12]. En parte esto es debido a que en el

[12] Se podría discutir lo que *todos* significa aquí. Por ejemplo, nosotros sólo consideramos estrategias de comportamiento que son funciones *medibles* de las manos que recibe un jugador. También ignoramos que lo que un jugador piensa hacer con un conjunto de manos servidas con probabilidad cero es irrelevante para sus ganancias esperadas. Por tanto, las funciones $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ de la Figura 12.4(c) y 12.4(d) se pueden modificar en un conjunto de medida nula sin alterar el hecho de que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un equilibrio de Nash.

modelo de Von Neumann no basta con estrategias de coronel Blotto. Pero es debido, principalmente, a que el análisis proporciona un ejercicio muy instructivo sobre el uso de estrategias de comportamiento.

Estrategias de comportamiento. Las estrategias puras en el modelo de Von Neumann son funciones $g : [0, 1] \to \{pasar, subir\}$ y $h : [0, 1] \to \{retirarse, seguir\}$, como las descritas en la Sección 12.3.2 para el modelo de Borel. Una estrategia mixta es por tanto un objeto matemático de considerable complejidad[13]. Por ello, las razones dadas en la Sección 10.4.3 para trabajar con estrategias de comportamiento en lugar de con estrategias mixtas son aquí especialmente relevantes.

Una estrategia de comportamiento para el jugador I en el modelo de Von Neumann para el póquer es una *función* $p : [0, 1] \to [0, 1]$ en la que $p(u)$ es la *probabilidad* con la que éste piensa subir si le sirven la mano u. Análogamente, una estrategia de comportamiento para la jugadora II es una función $q : [0, 1] \to [0, 1]$ en la que $q(v)$ es la probabilidad con la que ésta piensa seguir si le sirven la mano v.

Estas no son estrategias mixtas. Un ejemplo de estrategia mixta para la jugadora II sería que ella tirara una moneda al aire antes del reparto y usara una estrategia pura tipo coronel Blotto si sale cara y la otra estrategia pura tipo Blotto si sale cruz. Supongamos que la primera estrategia pura de Blotto consiste en seguir si y sólo si $v > 1/3$, y la segunda consiste en seguir si y sólo si $v > 2/3$. Una estrategia de *comportamiento* equivalente $Q : [0, 1] \to [0, 1]$ vendría dada por

$$Q(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v \leqslant 1/3 \\ 1/2, & \text{si } 1/3 < v \leqslant 2/3 \\ 1, & \text{si } v > 2/3. \end{cases}$$

Con esta estrategia de comportamiento, la jugadora II espera hasta que ya se han repartido las cartas para decidir qué hacer. Esto sugiere que se adoptará el primer planteamiento de la Sección 12.3. En particular, podemos pensar en el reparto de cartas como en una jugada de reparto de actores que completa una estructura de información incompleta. El actor Mr. u es ahora el jugador I provisto de la mano u, y la actriz Ms. v es la jugadora II provista de la mano v.

Pagos esperados. Supongamos que los jugadores usan las estrategias de comportamiento p y q. Después del reparto, un kibitzer que ve ambas manos puede calcular la ganancia esperada del jugador I, $z(u, v)$. Este valor depende de quién tiene la mejor mano.

[13] Muchas veces, sin embargo, en situaciones así es posible arreglárselas limitando la atención a estrategias mixtas de *soporte finito*. Estas estrategias mixtas asignan probabilidad positiva únicamente a un número finito de estrategias puras.

Supongamos en primer lugar que $u > v$. Entonces el jugador ha de conformarse con ganar el *ante* de 1 dólar de la jugadora II, excepto si él sube y ella sigue, en cuyo caso él ganará 2 dólares. Esto último ocurre con probabilidad $p(u)q(u)$. Luego, si $u > v$,

$$\begin{aligned} z(u, v) &= 1 - p(u)q(v) + 2p(u)q(v) \\ &= 1 + p(u)q(v). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $u < v$. (No consideramos el caso $u = v$ porque ocurre con probabilidad cero.) Si sube, el jugador I puede continuar ganando 1 dólar, porque el jugador se retirará con probabilidad $1 - q(v)$. En caso contrario, el jugador I pierde 1 dolar si pasa, y 2 dólares si sube y la jugadora II sigue. Se sigue que si $u < v$,

$$\begin{aligned} z(u, v) &= p(u)(1 - q(v)) - 2p(u)q(v) - (1 - p(u)) \\ &= 2p(u) - 1 - 3p(u)q(v). \end{aligned}$$

Aunque un kibitzer puede calcular $z(u, v)$, el jugador I no puede, porque desconoce qué cartas tiene en la mano la jugadora II. Por tanto, ha de calcular la esperanza

$$\begin{aligned} E_1(u) = \mathcal{E}_v z(u, v) &= \int_{v<u} z(u, v)\, dv + \int_{v>u} z(u, v)\, dv \\ &= \int_0^u (1 + pq)\, dv + \int_u^1 (2p - 1 - 3pq)\, dv, \end{aligned}$$

donde p y q no son constantes sino abreviaciones para $p(u)$ y $q(v)$. Se sigue que

$$E_1(u) = p(u)S_1(u) + T_1(u), \tag{12.9}$$

donde

$$S_1(u) = 2(1 - u) + \int_0^u q(v)\, dv - 3\int_u^1 q(v)\, dv, \tag{12.10}$$

$$T_1(u) = 2u - 1.$$

La misma serie de pasos da, para la jugadora II,

$$\begin{aligned} E_2(u) = -\mathcal{E}_u z(u, v) &= -\int_{u<v} z(u, v)\, du - \int_{u>v} z(u, v)\, du \\ &= -\int_0^v (2p - 1 - 3pq)\, du - \int_v^1 (1 + pq)\, du, \end{aligned}$$

y así

$$E_2(v) = q(v)S_2(v) + T_2(v), \tag{12.11}$$

donde

$$S_2(v) = 3\int_0^v p(u)\,du - \int_v^1 p(u)\,du, \tag{12.12}$$

$$T_2(v) = 2v - 1 - \int_v^1 p(u)\,du.$$

Aunque esta lista de fórmulas desanima, lo único que es importante al buscar un equilibrio de Nash $(\tilde{p}, \tilde{q})$ son los *signos* de las funciones $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ obtenidas al escribir $q(v) = \tilde{q}(v)$ y $p(u) = \tilde{p}(u)$ en (12.10) y (12.12). ¿Por qué?

Consideremos en primer lugar el jugador I. Este coge un libro de teoría de juegos y observa que aconseja a la jugadora II que use la estrategia de comportamiento $\tilde{q} : [0, 1] \to [0, 1]$. Esto es, ella debe seguir con probabilidad $\tilde{q}(v)$ cuando le sirven v. Se sigue entonces de (12.9) que el jugador I conseguirá un pago de $p(u)\tilde{S}_1(u) + \tilde{T}_1(u)$, si sube con probabilidad $p(u)$ cuando le sirven u. Después de mirar sus cartas, el jugador I puede escoger libremente el número $p(u)$ en el intervalo $[0, 1]$. Si $\tilde{S}_1(u) > 0$, es óptimo elegir $p(u) = 1$. Si $\tilde{S}_1(u) < 0$, es óptimo elegir $p(u) = 0$. Solamente cuando $\tilde{S}_1(u) = 0$ es óptimo elegir otros valores de $p(u)$. Puesto que consideraciones semejantes se aplican a la jugadora II, obtenemos los siguientes criterios para $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\tilde{S}_1(u) > 0 & \Rightarrow & \tilde{p}(u) = 1 \;; & & \tilde{S}_2(v) > 0 & \Rightarrow & \tilde{q}(v) = 1 \\
\tilde{S}_1(u) < 0 & \Rightarrow & \tilde{p}(u) = 0 \;; & & \tilde{S}_2(v) < 0 & \Rightarrow & \tilde{q}(v) = 0 \\
0 < \tilde{p}(u) < 1 & \Rightarrow & \tilde{S}_1(u) = 0 \;; & & 0 < \tilde{q}(v) < 1 & \Rightarrow & \tilde{S}_2(v) = 0.
\end{array}$$

La Figura 12.4(a) muestra qué aspecto tiene el gráfico de $z = \tilde{S}_2(v)$. Para comprobarlo, empecemos derivando (12.2), como se ha explicado en la Sección 11.4.2, para obtener que[14]

$$\tilde{S}_2'(v) = 4\tilde{p}(v). \tag{12.13}$$

Puesto que la parte derecha de la igualdad es no negativa, se sigue que la función $\tilde{S}_2$ *crece*. Haciendo $v = 0$ en (12.13) descubrimos que $\tilde{S}_2(0) \leqslant 0$. Haciendo $v = 1$, descubrimos que $\tilde{S}_2(1) \geqslant 0$. Puesto que $\tilde{S}_2$ es necesariamente continua en $[0, 1]$, se sigue que existe un número ξ en $[0, 1]$ que es el menor de los que cumplen $\tilde{S}_2(\xi) = 0$, y un número η en $[0, 1]$ que es el mayor de los que cumplen $\tilde{S}_2(\eta) = 0$. (Por tanto, excepto si $\xi = \eta$ la función $\tilde{S}_2$ no es *estrictamente* creciente.)

[14] Aquí, y en todas partes, el rigor exigiría añadir «casi en todas partes».

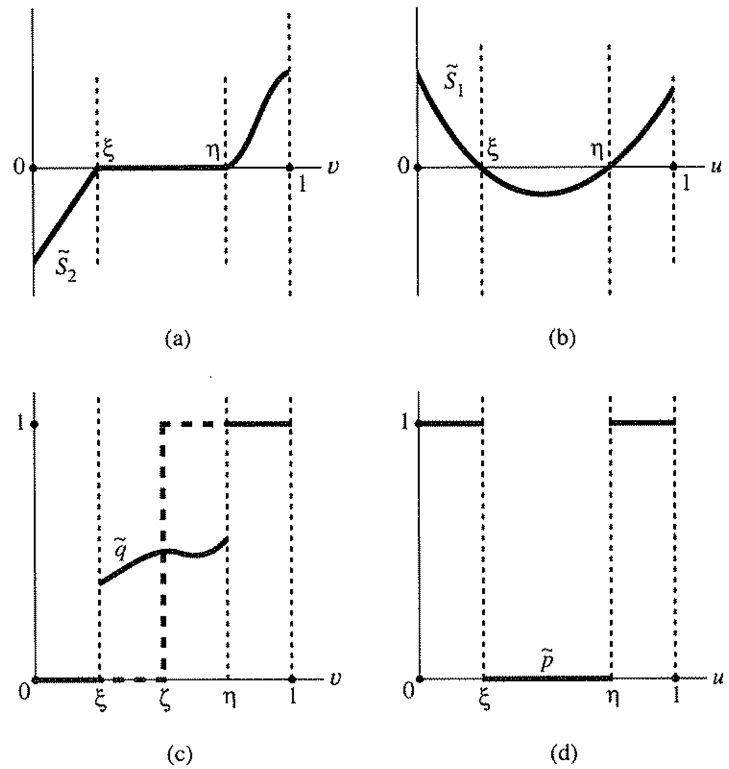


Figura 12.4. La determinación de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ en el modelo de Von Neumann.

La información sobre $\tilde{S}_1$ resumida en la Figura 12.4(a) nos dice muchas cosas sobre la función $\tilde{q}$. Lo que sabemos sobre $\tilde{q}$ queda resumido en la Figura 12.4(c).

La Ecuación (12.13) contiene información sobre la función $\tilde{p}$. Puesto que $\tilde{S}_2(v) = 0$ para $\xi \leqslant v \leqslant \eta$, se sigue que $\tilde{S}_2'(v) = 0$ para $\xi < v < \eta$ y, por tanto, que $\tilde{p}(v) = 0$ en el intervalo (ξ, η). Sin embargo, $\tilde{p}(v)$ no puede ser cero en un intervalo mayor *abierto* I, porque (12.13) implica que $\tilde{S}_2(v)$ sería entonces constante sobre I. Esta constante tendría que ser cero porque $\tilde{S}_2(v) = 0$ sobre $[\xi, \eta]$. Pero esto es una contradicción, porque $[\xi, \eta]$ es el mayor intervalo en el que $\tilde{S}_2(v) = 0$.

Lo que hemos aprendido acerca de $\tilde{p}$ nos dice algo acerca de $\tilde{S}_1$. No es posible que $\tilde{S}_1(u) < 0$ inmediatamente a la izquierda de ξ, porque en este caso sería $\tilde{p}(u) = 0$ inmediatamente a la izquierda de ξ. Puesto que $\tilde{S}_1$ es continua, se sigue que $\tilde{S}_1(\xi) \geqslant 0$. Por razones análogas, $\tilde{S}_1(\eta) \geqslant 0$. Sin embargo, al derivar (12.10) obtenemos que

$$\tilde{S}_1'(u) = -2 + 4\tilde{q}(u). \tag{12.14}$$

Pero la Figura 12.4(c) nos dice que $\tilde{q}(u) = 0$ para $0 < u < \xi$, y $\tilde{q}(u) = 1$ para $\eta < u < 1$. Luego $\tilde{S}_1(u) < 0$ para $0 < u < \xi$, y $\tilde{S}_1(u) > 0$ para $\eta < u < 1$. En consecuencia, $\tilde{S}_1$ decrece en $[0, \xi]$ y crece en $[\eta, 1]$, como indica la Figura 12.4(b).

La Figura 12.4(b) permite determinar completamente $\tilde{p}$. Ya sabíamos que $\tilde{p}(u) = 0$ para $\xi < u < \eta$. Pero ahora sabemos que $\tilde{S}_1(u) > 0$ en $[0, \xi)$ y $(\eta, 1]$. Luego $\tilde{p}(u) = 1$ en estos intervalos, como muestra la Figura 12.4(d).

Esto completa la parte interesante del análisis. Se puede comprobar que

$$\xi = 1/10 \quad ; \quad \eta = 7/10$$

usando que $\tilde{S}_1(\xi) = \tilde{S}_1(\eta) = \tilde{S}_2(\xi) = \tilde{S}(\eta) = 0$. Luego $\tilde{p}$ está determinada unívocamente. Sin embargo, $\tilde{q}$ no está determinada unívocamente. Para $\xi \leqslant \eta$, $\tilde{q}(v)$ se puede elegir libremente, sujeta a las condiciones

$$\frac{1}{\eta - \xi}\int_{\xi}^{\eta} \tilde{q}(v)\,dv = 1/2 \quad ; \quad \frac{1}{\eta - u}\int_{u}^{\eta} \tilde{q}(v)\,dv \geqslant 1/2.$$

La forma más simple para $\tilde{q}$ es la estrategia de Blotto que aparece en la Figura 12.4(c), donde

$$\zeta = 2/5.$$

Comentario. El resultado más interesante que se deduce del análisis precedente es cómo esclarece la naturaleza de los faroles. Esto lo discutiremos en la Sección 12.5. Por ahora nos limitaremos a llamar la atención sobre un aspecto menor. Obsérvese que existen equilibrios de Nash con estrategias *puras* tanto en el modelo de Borel como en el de Von Neumann[15]. Pero en el póquer se trata, por encima de todo, de no dejar que el oponente adivine el propio juego. Entonces, ¿cómo puede ser que se pueda evitar el uso de estrategias *mixtas*? La respuesta nos retrotrae al tema de la «purificación», que mencionamos por última vez en la Sección 11.5. Dicho brevemente, en el póquer el reparto es un «instrumento natural de purificación». En los modelos estudiados, el jugador I no necesita ponerle las cosas difíciles a la jugadora II aleatorizando, porque la ignorancia de ésta acerca de la mano que le han servido a él es más que suficiente. Sin embargo esto no es cierto en todos los modelos del póquer. En particular, el modelo de Nash y Shapley descrito en la Sección 12.6 utiliza estrategias mixtas[16].

[15] En ambos casos, también existen equilibrios de Nash en los que uno de los jugadores usa una estrategia mixta, pero esto aquí es irrelevante.

[16] Y también en el primer modelo de Von Neumann, que es más simple que el segundo modelo descrito aquí.

12.5. ¿Por qué farolear?

El modelo de Von Neumann para el póquer es particularmente interesante porque muestra que un análisis en términos de teoría de juegos exige una conducta rígida por parte del jugador I. Como muestra la Figura 12.4(d), el juego en el equilibrio de Nash requiere que el jugador I suba decididamente *cuando su mano es suficientemente mala.* Es difícil llegar a apreciar esta conducta manirrota, pero es importante hacerlo porque esta conducta no es un producto secundario de la simplificación que Von Neumann introdujo en las realidades estratégicas del póquer. Por el contrario, su modelo expresa lo que es esencial en esta situación. En particular, un análisis con ayuda de ordenador del póquer ordinario, con dos jugadores y pote limitado, muestra que el jugador que abre las apuestas *siempre* debe subir cuando recibe la peor de las manos[17].

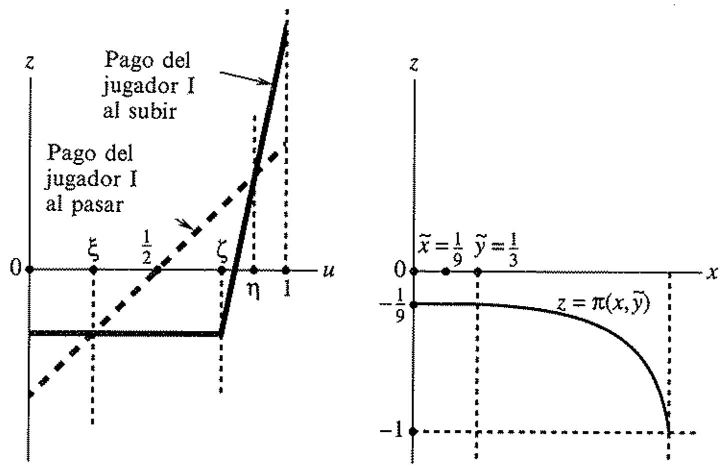
La mayoría de jugadores de póquer se conducen de forma muy distinta en partidas familiares. Saben que deben echarse faroles, pero lo hacen poco atrevidamente. Les cuesta mucho farolear cuando la mano es realmente mala, e intentan proteger sus apuestas «faroleando» con manos intermedias, porque se imaginan que con una mano así podrían ganar incluso si llegara a ser necesario comparar las manos. ¿Por qué son erróneas estas ideas, si es conocimiento común que los jugadores son racionales?

En un sentido, el modelo de Von Neumann proporciona una respuesta muy directa a esta pregunta. La Figura 12.5(a) muestra las ganancias esperadas del jugador I para cada una de las manos que puede recibir y para cada una de las opciones que puede adoptar apostando. En el diagrama se supone que la jugadora II adopta la estrategia de Blotto de subir si y sólo si $v > \zeta$. Como muestra el diagrama claramente, cuando $u = 0$ el jugador I consigue más subiendo que pasando.

La Figura 12.5(a) ilustra la motivación más elemental para farolear. Esta consiste en que se puede esperar que una subida induzca al oponente a retirarse con una buena mano, con lo cual el farolero se puede llevar el pote.

Pero sería un error mayor pensar que esta motivación es la única razón por la que un jugador racional se marcará faroles. Un jugador no sólo farolea con la esperanza de ganar dinero con una mano mala, sino también porque los faroles con manos malas son necesarios pra poder ganar dinero cuando se tiene una mano buena. Los jugadores que nunca suben cuando su mano es mala señalan abiertamente su buen juego en aquellas ocasiones en que se deciden a subir. En éstas, los demás jugadores se retirarán, excepto cuando dispongan de una mano excepcionalmente buena.

[17] En este análisis, como también ocurre en el modelo de Von Neumann, este jugador *siempre* debería seguir con una mano mediocre (como una pareja de doses) y retirarse ante una subida. También se dan otras sorpresas. Contra un oponente racional, el juego racional con una mano realmente buena (como tener un póquer) le parece a la intuición no educada increíblemente prudente. El autor de este análisis, Cutler, observa que el póquer jugado racionalmente es tan aburrido como contemplar una ostra.



(a) (b)

Figura 12.5. Pagos del póquer.

Esto se ve más fácilmente en el modelo de Borel que en el de Von Neumann. La Figura 12.5(b) muestra el pago del jugador I, $z = \pi(x, \tilde{y})$, cuando la jugadora II usa su estrategia de equilibrio de Nash, $\tilde{y} = 1/3$. El gráfico es horizontal para $0 \leqslant x \leqslant \tilde{y}$. En este intervalo, por tanto, cualquier cosa es una respuesta óptima a $\tilde{y}$. Entonces, ¿por qué el jugador I selecciona $\tilde{x} = 1/9$, como muestra la Figura 12.5? La respuesta es, por lo que *ocurriría* si seleccionara otro valor[18]. Según sabemos por la Sección 12.3, la respuesta óptima $y(x)$ de la jugadora II a la elección de x por el jugador I viene dada por $4y(x) = 3x + 1$. Luego, si el jugador I faroleara menos de lo que requiere el equilibrio de Nash en $\tilde{x}$, y escogiera $x > \tilde{x}$, entonces la jugadora II respondería escogiendo $y > \tilde{y}$. Esto es, la jugadora II usaría un criterio más exigente para seguir una subida del jugador I. Por tanto, el jugador I ganaría menos en las buenas manos, porque sus subidas serían seguidas con menos frecuencia.

12.6. El modelo de Nash y Shapley para el póquer

Mates 12.7⟶

Este es un modelo con tres jugadores en el que las reglas que rigen las apuestas son mucho más realistas que en los modelos anteriores. Sin embargo, para evitar que el análisis se haga demasiado difícil, hay que ser menos realista sobre las manos con que se juega.

Al analizar este modelo tendremos en cuenta un nuevo tipo de engaño. Un jugador se echa un *farol* cuando, con una mano mala, por medio de una subida intenta engañar a los demás jugadores haciéndoles pensar que su mano es buena. Un *ataque a traición*[19] ocurre cuando un jugador con una mano buena *no* sube, e intenta así engañar a los demás jugadores haciéndoles pensar que su mano es mala.

[18] Es obvio que si el modelo de Borel sólo se juega una vez, entonces la jugadora II no percibiría que el jugador I se desvía. Sin embargo, la historia que viene a continuación supone implícitamente que el juego se juega repetidamente y que los jugadores aprenden «por tanteo», según lo dicho en el Capítulo 9.

Reglas. Como antes, suponemos que todos los jugadores son neutrales al riesgo y podemos dar las apuestas en dólares. Para empezar, cada jugador aporta un *ante* de 2 dólares al pote. A continuación se reparte. Supondremos que la baraja sólo contiene dos clases de cartas, H (alta) y L (baja). Cada jugador recibe una mano que consiste en una carta. Supondremos que la probabilidad de recibir una H o una L es la misma, y que la mano de cada jugador es independiente de las de los demás.

Ahora empiezan las apuestas. La oportunidad de apostar va pasando de un jugador a otro, empezando por el jugador I. Cada jugador puede apostar (B) o pasar (P). Una apuesta consiste en poner 8 dólares en el pote. Pasar consiste en no poner nada en el pote. Los jugadores sólo pueden apostar una vez, pero el haber pasado en la primera oportunidad no les impide apostar posteriormente.

La Figura 12.6 muestra qué gana cada cual después de cada una de las posibles series de apuestas. Esto se determina según las reglas habituales del póquer, exceptuando que, si todos pasan, cada uno recupera el *ante* que había depositado en el pote sin enseñar las cartas. (Obsérvese que si al enseñar las cartas hay más de un ganador, los ganadores se reparten el pote a partes iguales.)

Estrategias puras. Son ocho, los conjuntos de información en los que el jugador I puede tener que tomar una decisión. Una estrategia pura debe especificar si escogerá B o P en cada uno de estos conjuntos de información. Dispone, por tanto, de $8 \times 2 = 16$ estrategias puras. La Figura 12.7(a) muestra dos de estas estrategias puras, r_1 y r_2. Por ejemplo, en el conjunto de información en el que el jugador I sabe que le han servido H y que las apuestas hasta ahora han sido PPB, entonces r_2 especifica que el jugador I debe escoger B. Análogamente, las Figuras 12.7(b) y 12.7(c) muestran cada una dos estrategias puras para los jugadores II y III.

Dentro de poco explicaremos los complementos que adornan las tablas de la Figura 12.7. Por ahora, observemos únicamente que las acciones rodeadas por un círculo indican en qué se diferencian las dos estrategias puras de cada jugador.

Plan de ataque. El objetivo de este análisis es localizar los *equilibrios de Nash* en el modelo de Nash y Shapley. Resulta, de hecho, que existe un *único*

[19] [*Sandbagging*, en el original (*N. del T.*)]. En épocas menos duras, los asaltantes callejeros esperaban en rincones oscuros con un calcetín lleno de arena. Este arma incapacita a la víctima sin causar daños permanentes.

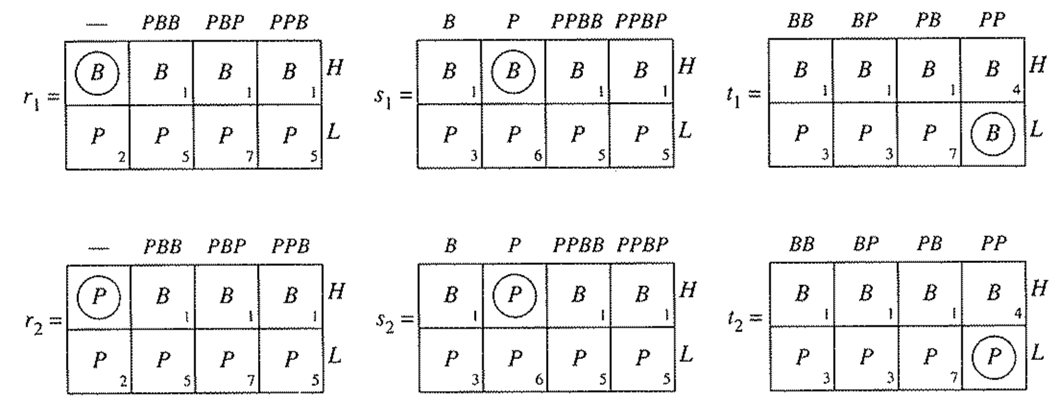
					Series de apuestas			
	BBB *PBBB* *PPBBB*	*BBP* *PBPB*	*BPB* *PPBBP*	*BPP*	*PBBP* *PPBPB*	*PBPP*	*PPBPP*	*PPP*
Repartos de cartas: *HHH*	0 / 0 / 0	−2 / 1 / 1	1 / −2 / 1	−2 / −2 / 4	1 / 1 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
HHL	−10 / 5 / 5	−2 / 1 / 1	−10 / −2 / 12	−2 / −2 / 4	−10 / 12 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
HLH	5 / −10 / 5	−2 / −10 / 12	1 / −2 / 1	−2 / −2 / 4	12 / −10 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
HLL	−10 / −10 / 20	−2 / −10 / 12	−10 / −2 / 12	−2 / −2 / 4	1 / 1 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
LHH	5 / 5 / −10	−2 / 12 / −10	12 / −2 / −10	−2 / −2 / 4	1 / 1 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
LHL	−10 / 20 / −10	−2 / 12 / −10	1 / −2 / 1	−2 / −2 / 4	−10 / 12 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
LLH	20 / −10 / −10	−2 / 1 / 1	12 / −2 / −10	−2 / −2 / 4	12 / −10 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0
LLL	0 / 0 / 0	−2 / 1 / 1	1 / −2 / 1	−2 / −2 / 4	1 / 1 / −2	−2 / 4 / −2	4 / −2 / −2	0 / 0 / 0

Figura 12.6. Pagos en el modelo de Nash-Shapley.

equilibrio de Nash. Sin embargo, toda vez que la forma estratégica es muy grande, los problemas técnicos son en principio considerables. Las dimensiones de aquella son $16 \times 16 \times 16$.

Sin embargo, puesto que podemos usar el método de la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas, según lo dicho en la Sección 4.6.1, la situación se reduce a un problema $2 \times 2 \times 2$. Recordemos que por el camino no perderemos ningún equilibrio de Nash, a condición de resistir la tentación de eliminar estrategias *débilmente* dominadas.

La eliminación de estrategias dominadas. Las únicas estrategias puras que sobreviven la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas son las que aparecen en la Figura 12.7. Los números en cada una de las casillas de la Figura 12.7 indican el paso en que la alternativa a la acción que aparece en la casilla es eliminada.



(a) (b) (c)

Figura 12.7. Dos estrategias puras para cada jugador.

Paso 1. Todas las estrategias puras que requieren que un jugador se retire cuando tiene una H están fuertemente dominadas. Un jugador que se retira pierde su ante. Pero un jugador que tiene una H y que continúa hasta que se enseñan las cartas siempre recupera su ante, y a veces gana algo.

Después de eliminar estas estrategias fuertemente dominadas, a cada jugador le quedan $5 \times 2 = 10$ estrategias puras.

Paso 2. Supongamos que el jugador I recibe una L. La probabilidad inicial de que los otros dos jugadores también tengan una L es $1/2 \times 1/2 = 1/4$. Por tanto, la probabilidad de que por lo menos uno de los oponentes tenga una H es $1 - 1/4 = 3/4$. Este oponente nunca se retirará, por lo dicho en el paso 1. Luego el jugador I, si abre escogiendo B, a lo sumo conseguirá

$$3/4 \times -10 + 1/4 \times 4 = -6\ 1/2.$$

(Si el jugador I apuesta y uno de los oponentes tiene una H, pierde $2 + 8 = 10$. Si apuesta y ambos oponentes tienen L, entonces éstos pueden retirarse o no. Si el jugador I tiene suerte y ambos se retiran, se llevará sus antes, es decir $2 + 2 = 4$.)

Puesto que el jugador I puede conseguir -2 pasando, se sigue que cualquier estrategia pura que le haga abrir con B cuando le han servido una L está fuertemente dominada. Después de eliminar estas estrategias, al jugador I le quedan $4 \times 2 = 8$ estrategias puras.

Paso 3. Teniendo en cuenta el paso 2, los jugadores II y III deben revisar sus creencias acerca de lo que tiene el jugador I cuando abre con B. Entonces saben con seguridad que le han servido una H. Un oponente que tiene una L ya no puede esperar nada, porque el paso I establece que el jugador I nunca se retirará. Por tanto, cualquier estrategia pura que dice a los jugadores II o III que elijan B cuando tienen una L y el jugador I ha abierto con B está fuertemente dominada.

Después de eliminar estas estrategias, a la jugadora II le quedan $4 \times 2 = 8$ estrategias puras y al jugador III le quedan $3 \times 2 = 6$ estrategias puras.

Paso 4. Supongamos que al jugador III le han servido una H, y que las apuestas previas han sido PP. Si el jugador III elige P, obtiene 0 (porque la mano queda en pase). Sin embargo, si elige B tendrá una probabilidad positiva de ganar algo, suponiendo que la serie PP no asegure que ambos jugadores I y II tienen H. Hay que reconocer que esta posibilidad parece poco probable, pero hay que estar seguros de que no se puede dar para estar seguros de que sólo eliminamos estrategias *fuertemente* dominadas. Afortunadamente, el paso 2, que demuestra que el jugador I siempre abre con P cuando le sirven L, nos da esta seguridad.

Paso 5. Los pasos 1 a 4 establecen que el jugador III nunca apuesta si tiene una L. Esto dice algo a los demás jugadores sobre la probabilidad prob $(H \mid B)$ de que tenga una H cuando juega B. Puesto que $\text{prob}(H) = \text{prob}(L) = 1/2$, la regla de Bayes (Sección 2.1.4) nos da que

$$\text{prob}(H \mid B) = \frac{\text{prob}(B \mid H)\ \text{prob}(H)}{\text{prob}(B \mid H)\ \text{prob}(H) + \text{prob}(B \mid L)\ \text{prob}(L)}$$

$$= \frac{1}{1 + \text{prob}(B \mid L)} \geqslant 1/2.$$

Se sigue que un oponente que tiene una L y pasó en la primera oportunidad, si sigue puede esperar, en el mejor de los casos,

$$1/2 \times -10 + 1/2 \times 1 = -4\ 1/2.$$

Por otra parte, retirándose se asegura un pago de -2. Así pues, cualquier estrategia que le dice a un jugador que tiene una L que elija B después de que el jugador III ha elegido B está fuertemente dominada.

Después de eliminar estas estrategias, a cada uno de los jugadores I y II le quedan $2 \times 2 = 4$ estrategias puras.

Paso 6. Supongamos que sirven una L a la jugadora II, y que el jugador I abre con P. La probabilidad de que ambos oponentes han recibido una L cumple ciertamente que $\pi \leqslant 1/2$, ya que $1/2$ es la probabilidad de que sirvan una L al jugador III. Por tanto, al elegir B la jugadora II puede esperar a lo sumo

$$4\pi + (-10)(1 - \pi) = -10 + 14\pi \leqslant -3.$$

Por otra parte, si sigue y luego se retira si alguien sube, se asegura -2. Luego cualquier estrategia que le dice a la jugadora II que cuando tiene una L elija B, después de que el jugador I abre las apuestas con P, está fuertemente dominada.

Después de eliminar estas estrategias, a la jugadora II le quedan $1 \times 2 = 2$ estrategias puras.

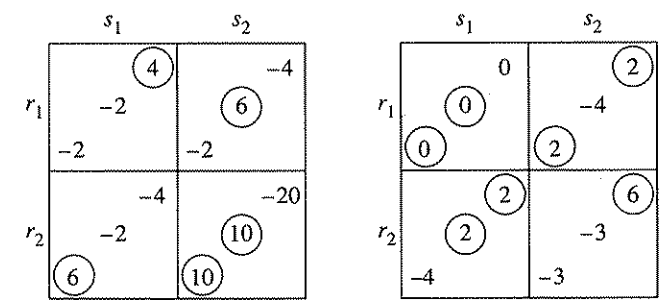
Paso 7. Hemos establecido que la jugadora II nunca elige B cuando tiene L. Luego, si elige B, ha de tener H. Se sigue que, cuando la jugadora II juega B, las estrategias que dicen a sus oponentes que cuando tienen L han de seguir están fuertemente dominadas.

Después de eliminar estas estrategias fuertemente dominadas, a cada uno de los jugadores I y III le quedan $1 \times 2 = 2$ estrategias puras.

Forma estratégica reducida. Es importante que todas las eliminaciones que hemos hecho hayan sido de estrategias *fuertemente* dominadas. Como explica la Sección 4.6.1, esto nos asegura que no hemos eliminado ningún equilibrio de Nash.

Ahora nos falta analizar la forma estratégica reducida de la Figura 12.8. Los pagos en esta forma estratégica se calculan usando la tabla de la Figura 12.9. Las casillas de la tabla indican lo que cada jugador o jugadora obtiene para cada perfil estratégico y cada reparto de cartas. Cuando se usa el perfil estratégico (r, s, t), el pago esperado de un jugador antes de que se repartan las cartas se obtiene sumando sus pagos en la columna correspondiente a (r, s, t) y multiplicando el resultado por $1/8$. Sin embargo, en los pagos de la Figura 12.8 hemos omitido el factor $1/8$ para evitar fracciones.

Los pagos rodeados por un círculo en la Figura 12.8 señalan respuestas óptimas. Puesto que ninguna casilla tiene todos los pagos dentro de un círculo, se sigue que el juego no tiene un equilibrio de Nash con estrategias puras. Por tanto hemos de tomar en consideración estrategias mixtas.



El jugador III escoge t_1. El jugador III escoge t_2

Figura 12.8. Una forma estratégica reducida.

Perfiles estratégicos

Repartos de cartas	(r_1,s_1,t_1)	(r_1,s_1,t_2)	(r_1,s_2,t_1)	(r_1,s_2,t_2)	(r_2,s_1,t_1)	(r_2,s_1,t_2)	(r_2,s_2,t_1)	(r_2,s_2,t_2)
HHH	*BBB* 0, 0, 0	*BBB* 0, 0, 0	*BBB* 0, 0, 0	*BBB* 0, 0, 0	*PBBB* 0, 0, 0	*PBBB* 0, 0, 0	*PPBBB* 0, 0, 0	*PPBBB* 0, 0, 0
HHL	*BBP* 1, 1, −2	*BBP* 1, 1, −2	*BBP* 1, 1, −2	*BBP* 1, 1, −2	*PBPB* 1, 1, −2	*PBPB* 1, 1, −2	*PPBBB* 5, 5, −10	*PPP* 0, 0, 0
HLH	*BPB* 1, −2, 1	*BPB* 1, −2, 1	*BPB* 1, −2, 1	*BPB* 1, −2, 1	*PPBBP* 1, −2, 1	*PPBBP* 1, −2, 1	*PPBBP* 1, −2, 1	*PPBBP* 1, −2, 1
HLL	*BPP* 4, −2, −2	*BPP* 4, −2, −2	*BPP* 4, −2, −2	*BPP* 4, −2, −2	*PPBBP* 12, −2, 10	*PPP* 0, 0, 0	*PPBBP* 12, −2, 10	*PPP* 0, 0, 0
LHH	*PBBP* −2, 1, 1	*PBBP* −2, 1, 1	*PPBPB* −2, 1, 1	*PPBPB* −2, 1, 1	*PBBP* −2, 1, 1	*PBBP* −2, 1, 1	*PPBPB* −2, 1, 1	*PPBPB* −2, 1, 1
LHL	*PBPP* −2, 4, −2	*PBPP* −2, 4, −2	*PPBPB* −2, 12, −10	*PPP* 0, 0, 0	*PBPP* −2, 4, −2	*PBPP* −2, 4, −2	*PPBPB* −2, 12, −10	*PPP* 0, 0, 0
LLH	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPBPP* −2, −2, 4
LLL	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPP* 0, 0, 0	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPP* 0, 0, 0	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPP* 0, 0, 0	*PPBPP* −2, −2, 4	*PPP* 0, 0, 0
Pagos esperados × 8	−2, −2, 4	0, 0, 0	−2, 6, −4	2, −4, 2	6, −2, −4	−4, 2, 2	10, 10, −20	−3, −3, 6

Figura 12.9. El cálculo de pagos para la forma estratégica reducida.

Estrategias mixtas. La siguiente etapa en el análisis del modelo de Nash y Shapley es buscar los equilibrios de Nash de la forma estratégica reducida de la Figura 12.8 en los que los jugadores I, II y III usan sus segundas estrategias puras con probabilidades a, b y c, respectivamente. Nos interesaremos particularmente por la probabilidad a con la que el jugador I abre pasando cuando tiene una H.

Paso 1. En un equilibrio de Nash, el jugador III ha de usar una estrategia completamente mixta. Esto significa que cada estrategia pura se usa con probabilidad positiva; se está afirmando por tanto que $0 < c < 1$. La Figura 12.8 ayuda a demostrarlo. Si $c = 0$, de forma que el jugador III usa t_1, entonces la dominación fuerte en el juego que resulta entre los jugadores I y II exige que éstos usen r_2 y s_2, respectivamente. Pero (r_2, s_2, t_1) no es un equilibrio de Nash. Análogamente, si $c = 1$, de forma que el jugador III usa t_2, entonces los jugadores I y II deben usar r_1 y s_1, respectivamente. Pero (r_1, s_1, t_2) no es un equilibrio de Nash.

Paso 2. Puesto que el jugador III usa una estrategia completamente mixta, tiene que ser indiferente entre t_1 y t_2 (Sección 7.1.2). Luego

$$[1 - a \quad a]\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - b \\ b \end{bmatrix} = $$
$$= [1 - a \quad a]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - b \\ b \end{bmatrix},$$

porque el lado izquierdo es lo que consigue usando t_1, y el lado derecho usando t_2. Se sigue que

$$[1 - a \quad a]\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & -26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - b \\ b \end{bmatrix} = 0. \qquad (12.15)$$

Paso 3. Todavía no podemos afirmar que los jugadores I y II también usan estrategias completamente mixtas. Sin embargo, cuando hayamos establecido este resultado sabremos que

$$[1 - a \quad a]\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - c \\ c \end{bmatrix} = 0, \qquad (12.16)$$

porque la jugadora II será indiferente entre s_1 y s_2. Puesto que la Figura 12.8 trata a los jugadores I y II simétricamente, (12.16) también se cumplirá al sustituir a por b.

Paso 4. No es posible que $a = 1$ porque esto haría el lado izquierdo de (12.15) negativo. ¿Puede ser que $a = 0$? Si así fuera, entonces (12.15) implica que $b = 3/5$. Luego la jugadora II está usando una estrategia completamente mixta y se cumple (12.16). Puesto que $a = 0$, se sigue que $c = 2/3$. Sin embargo, la respuesta óptima[20] del jugador I a la elección de $b = 3/5$ por la jugadora II y de $c = 2/3$ por parte del jugador III es $a = 1$.

Este razonamiento establece que $0 < a < 1$. Por simetría, también se sigue que $0 < b < 1$.

[20] No es necesario calcular nada. A partir de la Figura 12.8 es evidente que si el jugador III usa t_1 con más frecuencia que t_2, entonces r_2 es óptima para el jugador I, haga lo que haga la jugadora II.

Paso 5. Hemos demostrado hasta ahora que un equilibrio de Nash para la forma estratégica reducida de la Figura 12.8 requiere que cada jugador use una estrategia completamente mixta[21]. Así pues, se cumple (12.16), y también se cumple la misma ecuación cuando b sustituye a a. Se sigue que $a = b$. La ecuación cuadrática

$$5a^2 + 10a - 2 = 0$$

se obtiene haciendo $a = b$ en (12.15). Sus soluciones son $a = -1 \pm \pm \sqrt{(7/5)}$. De ellas, solamente $a = -1 + \sqrt{(7/5)} \approx 0{,}18$ se puede aceptar como valor para una probabilidad. Sólo tenemos que sustituir este valor en (12.16) para obtener

$$c = \frac{4a + 8}{5a + 12} \approx 0{,}68.$$

Resumen. Hemos demostrado que el modelo de Nash y Shapley para el póquer tiene un único equilibrio de Nash y éste requiere que los tres jugadores usen estrategias mixtas. Estas estrategias mixtas asignan probabilidad cero a todas las estrategias puras excepto a las listadas en la Figura 12.7. El jugador I usa r_2 con probabilidad $a \approx 0{,}18$. La jugadora II usa s_2 con probabilidad $b \approx 0{,}18$. El jugador III usa t_2 con probabilidad $c \approx 0{,}68$. Nuestra última tarea es considerar que lección debe extraerse de estas conclusiones.

12.6.1. Ataque a traición

Observemos, en primer lugar, que el jugador III tiene ventaja en el modelo de Nash y Shapley. (En equilibrio, éste espera ganar alrededor de 80 centavos, y sus oponentes esperan perder alrededor de 40 centavos cada uno.) El jugador III tiene ventaja porque es el último en apostar. A veces explota esta ventaja *marcándose un farol* cuando sus oponentes ya han pasado, anunciando, aparentemente, que su mano es débil. Como hemos visto, en esta situación farolea mucho. Cuando tiene una L, aproximadamente dos terceras partes de las veces sube después de la serie PP. En mesas de póquer de la vida real, a veces esta conducta es despectivamente calificada de un intento de «comprar el pote».

Sin embargo no todo son ventajas para el jugador III. Los jugadores I y II también se han leído el libro de teoría de juegos, y por ello saben que el

[21] Se puede deducir inmediatamente del Ejercicio 7.9.9 que el juego tiene un único equilibrio de Nash. Se sigue entonces, vía el Ejercicio 7.9.8, que $a = b$. Sin embargo, el texto no usa estas simplificaciones.

jugador III con frecuencia sube, teniendo una mano mala, después de la serie PP. Ambos jugadores, por tanto, tienen incentivos para tender una trampa al jugador III. A veces, cada uno de ellos abre pasando, cuando tienen una H. Esto es *atacar a traición.* Si los jugadores I y II siempre subieran cuando tienen una H, el jugador III nunca seguiría la subida cuando tiene una L.

¿Cuántas veces es atacado a traición el jugador III? La probabilidad prob($L \mid P$) de que el jugador I tiene una L cuando abre apuestas con P se puede calcular por la regla de Bayes (Sección 2.1.4). Puesto que las probabilidades a priori de H y L son prob(H) = prob(L) = 1/2,

$$\text{prob}(L \mid P) = \frac{\text{prob}(P \mid L)\text{prob}(L)}{\text{prob}(P \mid L)\text{prob}(L) + \text{prob}(P \mid H)\text{prob}(H)}$$

$$\approx \frac{1}{1 + 0{,}18} \approx 0{,}85.$$

Un cálculo idéntico muestra que, cuando el jugador I ha abierto con P, la probabilidad de que la jugadora II tenga una L, si ella también juega P, también es 0,85. Luego, tras la serie de apuestas PP, la probabilidad de que o bien el jugador I o bien la jugadora II estén atacando a traición es $1 - (0{,}85)^2 = 0{,}28$. Cuando el jugador III se echa un farol, espera llevarse un palmetazo algo más de una vez de cada cuatro.

12.7. Conclusión

Como se dijo en la Seción 12.1, este capítulo no tiene una sección de ejercicios. Por tanto ha llegado el momento de despedirme, y de presentar mis disculpas a quienquiera que haya llegado hasta aquí por atacarle a traición tan despiadadamente. Le tenté con promesas de juegos y diversión, pero encontró sudor y lagrimas. Desearía que el esfuerzo se viera compensado por los resultados. La teoría de juegos se encuentra actualmente en su infancia, pero si alguna vez llegamos a dominar las problemas de racionalidad limitada planteados en el Capítulo 9, puede que revolucionemos la manera de dirigir nuestras sociedades. Tal vez sea optimista contemplar un tiempo futuro en el que la estupidez, la ignorancia y los prejuicios con los que actualmente resolvemos nuestros problemas se hayan marchitado y hayan desaparecido bajo la fría luz de la razón. Si lo es, no me importa reconocer que soy un optimista.

Respuestas

Ejercicios escogidos

Este capítulo contiene las respuestas que Bruce Linster ha dado a diez ejercicios seleccionados de cada uno de los Capítulos 1 al 11. La tabla adjunta enumera los ejercicios de los que se ofrece una respuesta. Las preguntas de los primeros capítulos a las que se dan respuestas son básicamente del nivel que uno podría razonablemente exigir a estudiantes de licenciatura. Estas respuestas básicas están complementadas con algunas pistas para resolver los come-cocos ocasionales con los que se han sazonado los ejercicios. No hay coincidencia entre los ejercicios que aquí se responden y los que se sugieren como deberes en la Guía Didáctica.

Sección	Ejercicios								
1.10	1	4	5	8	9	11	12	14	17	18
2.6	1	3	6	8	10	12	18	22	25	26
3.7	1	2	3	7	10	17	18	19	20	21
4.8	1	4	8	9	17	18	19	20	29	30
5.9	2	4	6	7	8	11	12	18	20	26
6.10	5	6	17	20	21	22	28	37	38	40
7.9	2	3	5	6	10	15	17	26	37	41
8.6	1	4	6	9	13	14	19	20	22	28
9.8	5	8	10	12	14	20	22	24	25	26
10.9	7	9	13	14	18	28	29	32	33	36
11.10	5	6	7	8	9	10	26	35	39	46

Ejercicios 1.10

Ejercicio 1.10.1

a) El jugador I tiene 3 × 2 × 2 = 12 estrategias puras. El jugador II tiene 3 × 3 = 9 estrategias puras.

b)

lll	*llr*	*lrl*	*lrr*	*LL*	*LM*	*LR*
mll	*mlr*	*mrl*	*mrr*	*ML*	*MM*	*MR*
rll	*rlr*	*rrl*	*rrr*	*RL*	*RM*	*RR*

c) [*rM*]

d) (*rll*, *LR*), (*rrl*, *LR*), (*rll*, *MR*), (*rrl*, *MR*), (*rll*, *RR*), (*rrl*, *RR*)

e) Véase la Figura A.1.

	LL	*LL*	*LR*	*ML*	*MM*	*MR*	*RL*	*RM*	*RR*
lll	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$
llr	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$
lrl	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$
lrr	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$
mll	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
mlr	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
mrl	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
mrr	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
rll	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$
rlr	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
rrl	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$
rrr	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$

Figura R.1. La forma estratégica del juego *G* del Ejercicio 1.10.1*e*).

f) Los puntos de silla son de la forma (*mxy*, *XM*), donde *x* e *y* son elementos del conjunto $\{l, r\}$ y *X* pertenece al conjunto $\{L, R, M\}$.

Ejercicio 1.10.4. Véase la Figura A.2. La partida aquí reproducida se llama el «mate del pastor».

Ejercicio 1.10.5. Véase la Figura A.3.

Ejercicio 1.10.8. El jugador I siempre tiene una estrategia vencedora porque el juego no es equilibrado. Con $n = 3$, el jugador I empieza tomando una cerilla del montón mayor. A partir de ahí el juego sigue como en la Sección 1.5.

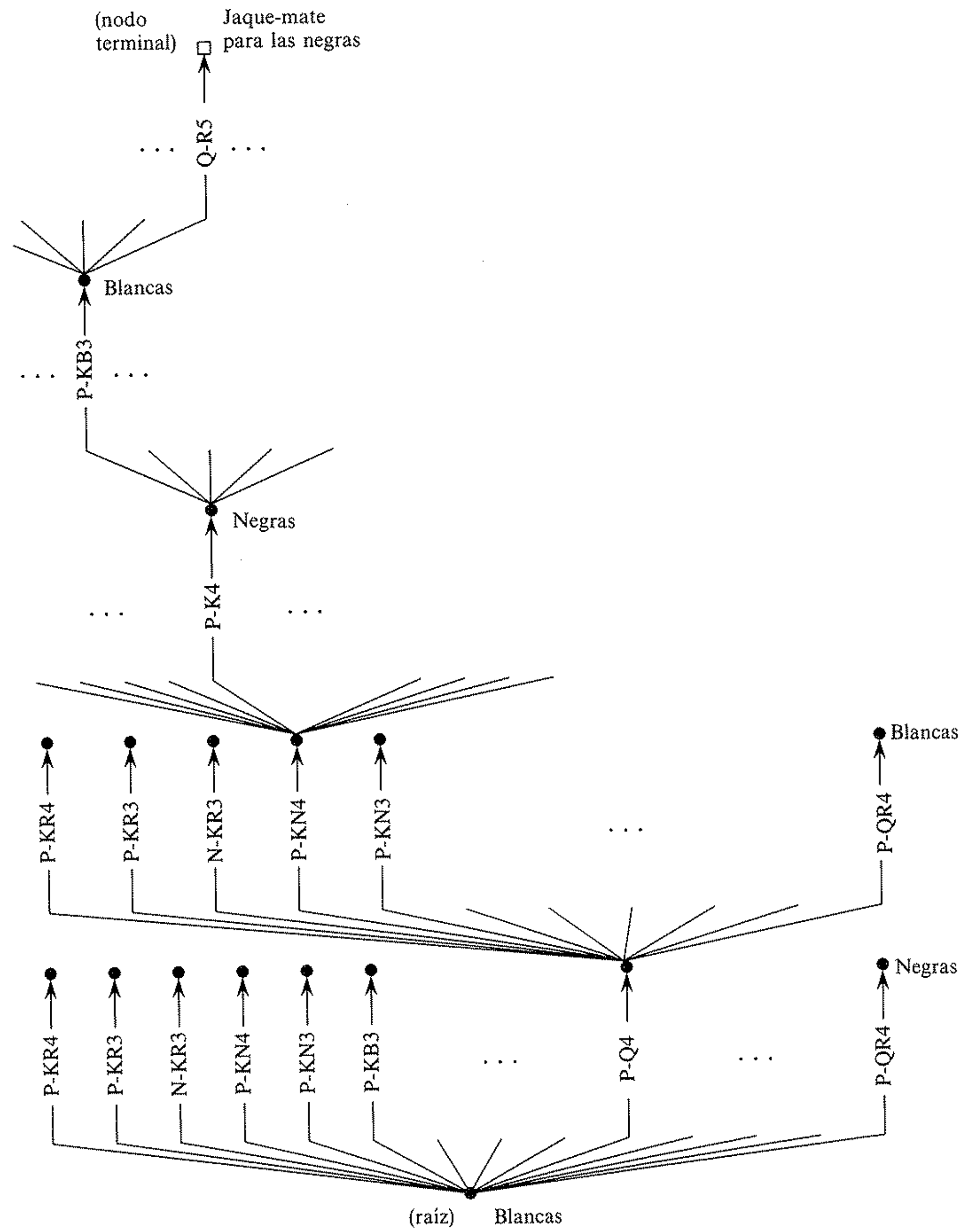


Figura R.2. El principio del árbol del ajedrez.

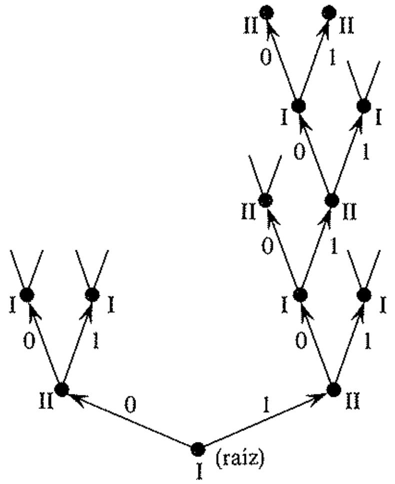


Figura R.3. El árbol del juego del Ejercicio 1.10.5.

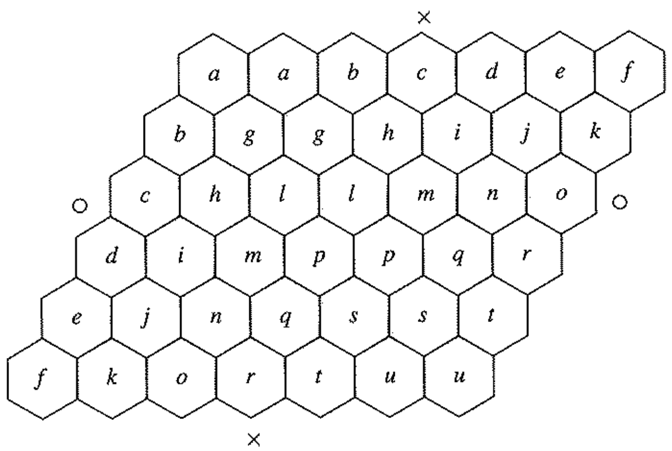


Figura R.4. Un tablero asimétrico para los hexágonos.

Ejercicio 1.10.9. El jugador II siempre tiene una estrategia ganadora porque el juego es equilibrado.

Ejercicio 1.10.11. En los hexágonos de 3 × 3 y de 5 × 5, el círculo debería abrir ocupando el hexágono central. En los hexágonos de 4 × 4, con el tablero orientado como en la Figura 1.2(a), debería ocupar el hexágono más alto que no esté en la frontera.

Ejercicio 1.10.12. La cruz siempre deber replicar al círculo ocupando el hexágono marcado en la Figura A.4 con la misma letra que el que acaba de

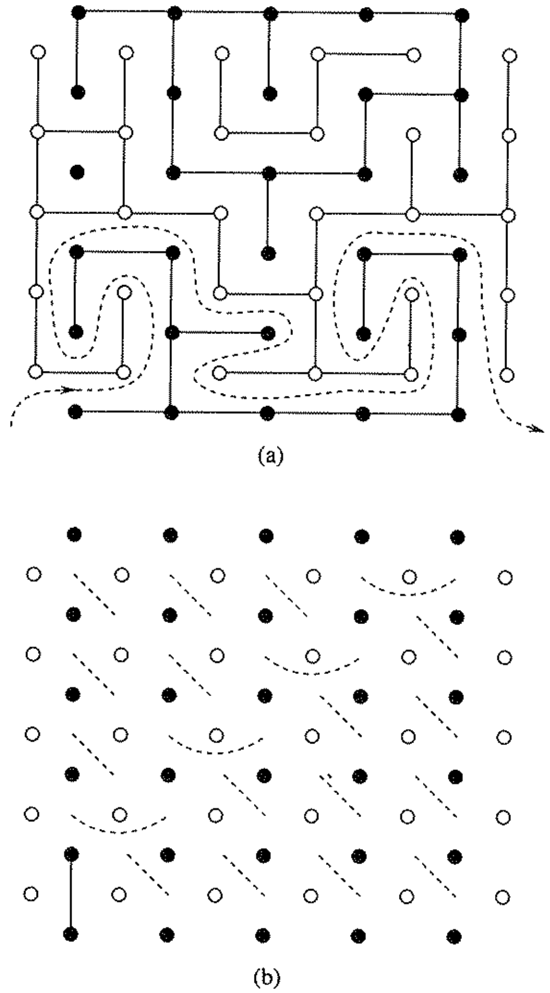


Figura R.5. Los diagramas para bridgit.

ocupar el círculo. Esta estrategia de bloqueo hace imposible que el círculo gane, con lo cual la cruz gana necesariamente[1].

Ejercicio 1.10.14.

a) La figura A.5(a) muestra un tablero de bridgit en el que no es posible hacer nuevas conexiones sin violar las reglas. El resultado es como un laberinto. Alguien que entrara en el laberinto por el extremo inferior

[1] Esta solución y la siguente han sido tomadas de la ahora tristemente extinta columna de Martin Gardner en *Scientific American*.

izquierdo saldría finalmente por el extremo inferior derecho, habiendo mantenido las conexiones de las blancas siempre a su izquierda. Por tanto las blancas tienen que haber ganado.

b) Puesto que el resultado D es imposible, el valor de bridgit es o $\mathcal{W}$ o $\mathcal{L}$.

c) Sirve un argumento de «robar la estrategia» como el dado para los hexágonos.

d) Si las negras juegan primero, deberían empezar jugando como se indica en la Figura A.5(b). No tiene sentido que ningun jugador intente conectar dos nodos situados en el extremo del tablero. Si las blancas evitan estos movimientos sin sentido, sus conexiones siempre tocarán un extremo de una de las rectas quebradas de la Figura A.5(b). Las negras deben responder siempre haciendo una conexión que toque el otro extremo de esta línea quebrada.

Ejercicio 1.10.17. Cuando $E = \{x : x > 1/2\}$, el jugador I puede asegurarse la victoria elegiendo 1 tanto en la primera como en la segunda oportunidad. Para ganar cuando $E = \{x : x \geqslant 2/3\}$, el jugador I debe elegir 1 en todas las ocasiones. La jugadora II puede asegurarse la victoria cuando $E = \{x : x > 2/3\}$, eligiendo 0 en cualquier oportunidad. El desarrollo decimal de un número racional es periódico, y lo mismo es cierto para su desarrollo binario. Para vencer cuando E es el conjunto de todos los números racionales, todo lo que tiene que hacer la jugadora II es meramente destruir cualquer posible periodicidad que pueda parecer que se establece. Si le basta con ganar con probabilidad 1 puede hacer esto simplemente jugando al azar.

Ejercicio 1.10.18. Puesto que (s, t) es un punto de silla, $v(a, t) \succeq_1 v(s, t) \succeq_1 v(s, b)$, para todo a de S y b de T. Análogamente, $v(c, t') \succeq_1 v(s', t') \succeq_1 v(s', d)$, para todo c de S y d de T. Para probar que (s, t') es un punto de silla, basta tomar $a = s'$ y $d = t$. Entonces $v(c, t') \succeq_1 v(s', t') \succeq_1 v(s', t) \succeq_1 v(s, t) \succeq_1 v(s, b)$.

Ejercicios 2.6

Ejercicio 2.6.1. La primera carta de una mano puede ser elegida de 52 formas. Esto deja 51 opciones para la segunda carta, 50 para la tercera, etcétera. Por tanto, el número de manos distintas que usted puede recibir es $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$. Pero esto tiene en cuenta el *orden* en el que se distribuyen las cartas. Para encontrar la respuesta a la pregunta, hay pues que dividir por el numero de ordenaciones en que 5 cartas pueden recolocarse. La primera carta puede recolocarse en 5 posiciones. Esto deja 4 posiciones para la segunda, 3 para la tercera, etc. El número de ordenaciones posibles de su mano es entonces $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Por tanto el número posible de manos es $N = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48/5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Solamente hay 4 escaleras reales, por tanto, la probabilidad de recibir una escalera real es $4/N$.

Ejercicio 2.6.3. No. Puesto que está dispuesto a apostar por Punter's Folly, cree que la probabilidad de que Punter's Folly gane es por lo menos 1/3. Análogamente, cree que la probabilidad de que gane Gambler's Ruin es por lo menos 1/4. Por tanto, debe creer que la probabilidad de que ambos ganen es por lo menos $1/12$[2].

Ejercicio 2.6.6. $1/2(-2) + 1/12(12) + 1/4(3) = 3/4$.

Ejercicio 2.6.8. Acepte la apuesta solamente si le ofrecen apuestas 1 : 2, o mejores, en contra de que la moneda salida de la caja es de oro. Esto significa que usted cree que la probabilidad de que la moneda sea de oro es 2/3. El hecho de que le muestre a usted una moneda de plata no aumenta las posibilidades de que la segunda moneda sea de oro. El hombre le mostrará a usted una moneda de plata sea cual sea el par que salga. Las cosas son distintas si la moneda que usted ve es elegida al azar entre el par que ha salido. En tal caso la regla de Bayes le indica que usted debería aceptar la apuesta si se le ofrecen una apuesta de 1 : 1 o mejor.

Ejercicio 2.6.10. No es necesario ningun cálculo para ver que la respuesta es $\text{prob}(1 \mid L) = L_1/L$, donde $L = L_1 + \cdots + L_n$. Para comprobar esto usando la regla de Bayes, obsérvese que

$$\text{prob}(1 \mid L)\text{prob}(L) = \text{prob}(L \mid 1)\text{prob}(1) = \frac{L_1}{M_1} \times \frac{M_1}{M} = \frac{L_1}{M},$$

donde $M = M_1 + \cdots + M_n$. Pero

$$\begin{aligned}\text{prob}(L) &= \text{prob}(L \mid 1)\text{prob}(1) + \cdots + \text{prob}(L \mid n)\text{prob}(n)\\ &= \frac{L_1}{M} + \cdots + \frac{L_n}{M} = \frac{L}{M}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.6.12. Puesto que cada jugador siempre tiene la misma probabilidad de ser situado en una posición ganadora, $v = 1/2$.

Ejercicio 2.6.18. 5/32.

Ejercicio 2.6.22. 49/78.

[2] Una respuesta mas cuidadosa debería tener en cuenta el carácter averso al, o amante del, riesgo de las preferencias (Sección 3.4.3). Dicho brevemente, es necesario que las funciones de utilidad sean suaves, y hay que considerar solamente apuestas pequeñas.

Ejercicio 2.6.25.

a) Las ruedas se pueden parar de 16 formas distintas. El jugador I gana directamente si las ruedas se paran mostrando (2, 1), (4, 1), (6, 1), (6, 5), (9, 1), (9, 5), (9, 6) o (9, 8). Por tanto, gana directamente con probabilidad 1/2. Pero con probabilidad 1/16 las ruedas se paran mostrando (6, 6). En este caso, las ruedas se hacen girar de nuevo, de forma que el jugador I gana con probabilidad $p = 1/2 + 1/16p$, por tanto, $p = 8/15$.

b) El jugador I debería elegir la rueda 1, en cuyo caso gana con probabilidad 8/15.

Ejercicio 2.6.26.

a) Abrir una puerta que no esconde un premio.

b) El premio eatá detrás de cualquiera de las puertas con la misma probabilidad. Sabía, antes de tomar su decisión, que el presentador le mostraría una caja vacía y, por tanto, no tiene razón alguna para revisar su probabilidad de que la caja que ha elegido tenga premio una vez que se la enseñan. Después de que le enseñen una caja vacía, una persona ingenua puede argumentar que hay la misma probabilidad de que el premio esté en cualquiera de las otras cajas.

c) Puesto que la probabilidad de ganar si no cambia de caja es 1/3, su probabilidad de ganar si cambia es necesariamente 2/3. Una persona ingenua argumentaría como en el apartado *b*).

d) Si el concursante sabe que el presentador abre cualquiera de las cajas al azar, entonces la probabilidad de ganar después de que se ha abierto una caja vacía es 1/2, tanto si cambia como si no.

Ejercicios 3.7

Ejercicio 3.7.1. La propiedad de totalidad dice que $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Cuando los matemáticos escriben «P o Q» quieren decir que solamente una de las siguientes afirmaciones es cierta «P y Q», «P y (no Q)»,«(no P) y Q». La primera de estas posibilidades da lugar a la definición de $a \sim b$, la segunda $a \prec b$ y la tercera $a \succ b$.

Ejercicio 3.7.2. Tómese $a = b$ en la fórmula de totalidad $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Ejercicio 3.7.3. Puesto que totalidad y transitividad se aplican tanto a $\preceq$ como a $\succeq$, también se aplican a $\sim$. Si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces por la transitividad de $\preceq$, $a \preceq c$. Pero no puede ser también que $c \preceq a$, puesto que entonces podríamos usar la transitividad para demostrar que $b \preceq a$. Para demostrar que $\prec$ no satisface totalidad, aplíquese el Ejercicio 3.7.1 con $a = b$.

Ejercicio 3.7.7.

x	a	b	c	d	e	f
$U(x)$	0	0	1/2	3/4	1	1
$V(x)$	−100	−100	20	21	1.000	1.000

Ejercicio 3.7.10. Con $a < 0$, la persona prefiere más dinero a menos. Con $a = 0$, no le importa si tiene más o menos dinero. Cuando $0 \leqslant a \leqslant 1$, $u''(x) \leqslant 0$ y, por tanto, la persona es aversa al riesgo. Cuando $a \geqslant 1$, $u''(x) \geqslant 0$ y, por tanto, la persona es amante del riesgo. Si $a = 2$, $\mathcal{E}u(\mathbf{K}) = 0{,}01 \times 0^2 + 0{,}89 \times 1^2 + 0{,}1 \times 5^2 = 3{,}39$, donde el dinero se ha contado en unidades de un millón. Esto debe compararse con la utilidad $u(1) = 1^2 = 1$ de obtener un millón con seguridad. Puesto que $3{,}39 > 1$, la persona preferiría participar en la lotería a poseer 1 dólar. El equivalente en dólares X de la lotería $\mathbf{K}$ se halla resolviendo la ecuación $u(X) = \mathcal{E}u(\mathbf{K})$. Por tanto, $X = \sqrt{3{,}39}$.

Ejercicio 3.7.17. La función de utilidad del organizador u es estrictamente creciente cuando $u'(x) > 0$ para todo x. Es estrictamente cóncava cuando $u''(x) < 0$ para todo x. La función u' es estrictamente decreciente porque su derivada es u''.

a) $M - p(y - z)$. «Actuarialmente justo» significa que la compañía de seguros obtiene beneficio esperado cero.

b) Su utilidad es $u(y - Mf)$ si hace sol, y $u(z + (y - z)f - Mf)$ si llueve. Diferenciando su utilidad esperada, se obtiene

$$E = -M(1 - p)u'(y - Mf) + p(y - z - M)u'(z + (y - z)f - Mf).$$

c) y *d*) Si $f = 1$, entonces $E = 0$ si y solo si $M = p(y - z)$[3].

e) Si $f \geqslant 1$, entonces $s = y - Mf \leqslant z + (y - z)f - Mf = r$. Por tanto, $u'(s) \geqslant u'(r)$, y así $E \leqslant u'(r)\{-M(1 - p) + p(y - z - M)\} = u'(r)\{-M + p(y - z)\} < 0$.

Ejercicio 3.7.18.

a) No.

b) Necesariamente se arrepentirá de cualquier elección que haga.

c) Sí.

[3] La concavidad de u implica que no debemos preocuparnos de las condiciones de segundo orden.

d) El multimillonario ha establecido que el número entero j se elija con probabilidad p_j. cuando Pandora abre su caja y encuentra 2^k dólares, sabe que j es o bien $k - 1$ o bien k. Por tanto, ha ocurrido el suceso $B = \{k - 1, k\}$. El suceso de que la otra caja contenga 2^{k+1} dólares es $A = \{k\}$. Por tanto, la probabilidad condicional que necesitamos es $\text{prob}(A \mid B) = \text{prob}(A \cap B)/\text{prob}(B) = \text{prob}(A)/\text{prob}(B) = p_k/(p_{k-1} + p_k)$.

e) Si el multimillonario tuviera razón, entonces $p_k/(p_{k-1} + p_k) = 1/2$ para todo k. Pero entonces todas las probabilidades p_j son iguales y no pueden sumar 1.

Ejercicio 3.7.19. Si Pandora abre la caja y encuentra M_1 dólares dentro, seguro que se arrepentirá de su elección porque $M_1 < M_2$. Si encuentra M_k dólares con $k \geqslant 2$, asignará probabilidad $p_{k-1}/(p_{k-1} + p_k)$ al suceso de que la otra caja contenga M_{k-1} y $p_k/(p_{k-1} + p_k)$ al suceso de que contenga M_{k+1}. Por tanto, el valor esperado del contenido de la caja es $(M_{k-1}p_{k-1} + M_{k+1}p_k)/(p_{k-1} + p_k)$. Esto debe ser más que M_k, si se arrepiente de su elección. Basta, por tanto, sustituir los valores de M_k y p_k en la desigualdad.

Ejercicio 3.7.20. La fórmula se justifica calculando la probabilidad de que Pandora obtenga M_k. Cuando $k \geqslant 2$, puede obtener M_k solamente cuando el multimillonario selecciona k ó $k - 1$. Su probabilidad de obtener M_k condicionada a que él elija k es 1/2, y también es 1/2 condicionada a que él elija $k - 1$. La probabilidad de obtener M_k es, pues, $1/2(p_k + p_{k-1})$.

Si su utilidad esperada inicial es finita, tiene sentido sumar ambos lados de la fórmula del Ejercicio 3.7.19 entre K e infinito, y cancelar los términos idénticos en cada lado[4]. Esto deja $M_{K-1}p_{K-1} > M_K p_{K-1}$. No obstante, el multimillonario necesita $M_2 > M_1$ para que este truco funcione. El ejercicio muestra que la teoría de Von Neuman y Morgenstern no elimina todos los problemas del tipo planteado por la paradoja de San Petersburgo.

Ejercicio 3.7.21. Sean $p_k > 0$ las probabilidades. Habiendo elegido adecuadamente $M_1, M_2, ..., M_k$, el multimillonario debe elegir M_{k+1} para que satisfaga la fórmula del Ejercicio 3.7.19, si quiere jugar el truco. Si la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern de Pandora $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ no está acotada, esto se hace fácilmente, puesto que solamente tiene que calcular la cantidad de dinero X dólares que hace $M_{k+1} = u(X)$ suficientemente grande. Pandora no puede ser siempre amante del riego, porque u no puede ser estrictamente creciente y acotada si es convexa.

[4] Es necesario que las sumas sean finitas para que esta cancelación funcione. Por ejemplo, no podemos deducir que $1 = 0$ del hecho que $1 + 1 + 1 + \cdots = 0 + 1 + 1 + \cdots$.

Ejercicios 4.8

Ejercicio 4.8.1. Véase la Figura A.6.

	d_9	d_7	d_5	d_3	d_1
d_{10}	0.0, 1.0	0.0, 1.0	0.0, 1.0	0.0, 1.0	0.0, 1.0
d_8	0.81, 0.19	0.36, 0.64	0.36, 0.64	0.36, 0.64	0.36, 0.64
d_6	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.64, 0.36	0.64, 0.36	0.64, 0.36
d_4	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.84, 0.16	0.84, 0.16
d_2	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.81	0.96, 0.04
d_0	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.81	0.01, 0.99

Figura R.6. La forma estratégica para el Ejercicio 4.8.1.

Ejercicio 4.8.4.

a) Para que MN tenga sentido, la matriz M debe tener el mismo número de columnas que filas tenga N.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) BC y CB tienen sentido porque ambas B y C son matrices 2×2. $BC \neq CB$.

c) $$(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = A(BC)$$

d) $(BC)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}.$

Ejercicio 4.8.8.
a) $x^{\mathrm{T}}x = 14$ *b*) $x^{\mathrm{T}}y = -9$ *c*) $x^{\mathrm{T}}z = -1$
d) $y^{\mathrm{T}}z = 0$ *e*) $\|x\| = \sqrt{15}$ *f*) $\|x - y\| = \sqrt{46}$

Ejercicio 4.8.9.
a) $\sqrt{14}$ *b*) $\sqrt{46}$ *c*) y y z

Ejercicio 4.8.17. El perfil de estrategias (d_6, d_7) es un equilibrio subjuego-perfecto porque es lo que queda después de eliminar las estrategias dominadas en el mismo orden en que se eliminarían por el algoritmo de Zermelo.

Ejercicio 4.8.18. Los dos equilibrios subjuego-perfectos son (l, L) y (r, R). No hay estrategias dominadas que puedan ser eliminadas en este juego.

Ejercicio 4.8.19. El resultado de equilibrio de Nash (100, 100) desaparece al eliminar estrategias débilmente dominadas. Sí.

Ejercicio 4.8.20. Si la fila de la estrategia débilmente dominada del jugador se elimina primero, nos queda la fila de abajo. Si eliminamos primero la columna de la estrategia débilmente dominada del jugador, nos queda la columna de la derecha.

Ejercicio 4.8.29.
a) El equilibrio subjuego-perfecto es (*DDDDD*, *DDDDD*). El resultado sería el mismo por eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadas.
b) No. Si se ofrecen 100.000 dólares al rector de Yaleton, éste puede pensar que juega contra un jugador irracional y seguir adelante.

Ejercicio 4.8.30.
a) Basta con doblar las aristas en la Figura 4.23 de la forma habitual.
b) En cada etapa, la elección óptima de I es *l*, con independencia de lo que hagan los otros.
c) El entrante aspirante probablemente concluiría que la empresa establecida es irracionalmente agresiva y por tanto decidiría no entrar. No obstante, en un equilibrio subjuego-perfecto, el entrante aspirante entraría.
d) Yo resistiría en las primeras etapas esperando convencer a los aspirantes a entrar de que soy irracional. Solamente es irracional no jugar de acuerdo con el equilibrio subjuego-perfecto si nadie puede ser persuadido de que los otros jugadores pueden ser irracionales en el futuro, independientemente de lo que hayan hecho en el pasado.

Ejercicios 5.9

Ejercicio 5.9.2. Véase la Figura A.7(a).

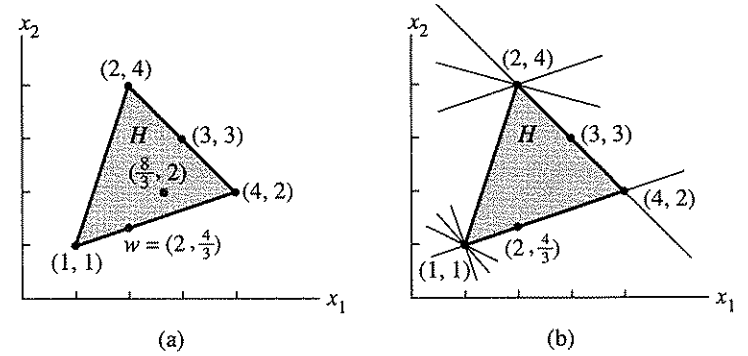


Figura R.7. Los diagramas para los Ejercicios 5.9.2 y 5.9.4.

Ejercicio 5.9.4. Véase la Figura A.7(b).

Ejercicio 5.9.6. Véase la Figura A.8(a).

Ejercicio 5.9.7. Véase la Figura A.8(b).

Ejercicio 5.9.8. Véase la Figura A.8(c).

Ejercicio 5.9.11. El conjunto de puntos Pareto-eficientes de Y es el segmento que une (1, 3) y (3, 0). El conjunto de negociación para Y cuando el punto de desacuerdo es $e = (1, 0)$ es el mismo. Cuando el punto de desacuerdo es $d = (0, 1)$, el conjunto de negociación es el segmento que une (1, 3) y (2 1/3, 1). El conjunto de puntos Pareto-eficientes de Z es toda la recta de ecuación $x_1 + x_2 = 4$. El conjunto de negociación para Z cuando el punto de desacuerdo es $d = (0, 1)$ es el segmento que une (3, 1) y (0, 4). Cuando el punto de desacuerdo es $e = (1, 0)$, el conjunto de negociación es el segmento que une (1, 3) y (4, 0).

Ejercicio 5.9.12. (1 2/3, 2), (1 1/2, 2 1/2), (2, 1 1/2), (2 1/2, 1 1/2).

Ejercicio 5.9.18. Para la primera frase, véase la Figura A.9. No.

Ejercicio 5.9.20. La solución de negociación de Kalai-Smorodinsky no satisface el Axioma 5.3. Por ejemplo, (X, d) puede ser casi cualquier cosa,

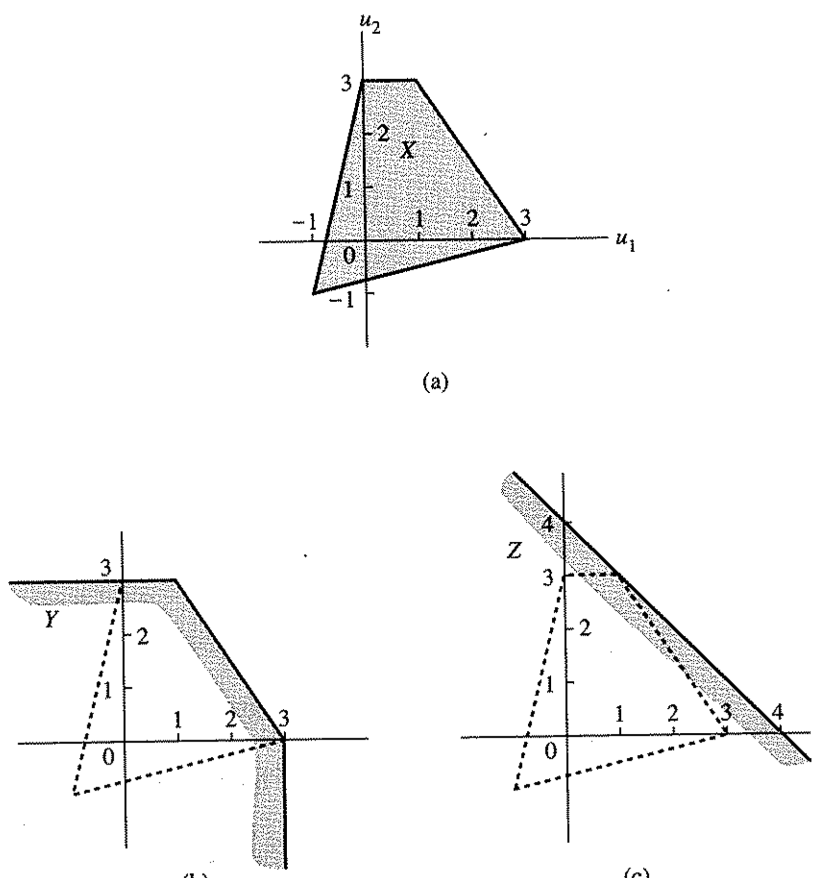


Figura R.8. Los diagramas para los Ejercicios 5.9.6, 5.9.7 y 5.9.8.

e Y puede ser el conjunto que se obtiene eliminando cualquier parte de X a la derecha de la solución de Kalai-Smorodinsky.

Ejercicio 5.9.26.

a) John piensa pedir siempre todo el dólar y rechazar excepto si se le ofrece todo el dólar. Mary piensa ofrecer siempre todo el dólar y aceptar si no se le ofrece nada.

b) Aquí John y Mary intercambian las estrategias del apartado *a*). El comportamiento que piensa seguir John es siempre óptimo dada la estrategia de Mary, puesto que no obtendrá nada haga lo que haga. ¿Por qué no funciona el mismo argumento en la Sección 5.8.6?

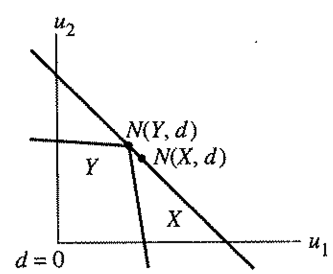


Figura R.9. La solución de negociación de Nash no es monótona.

Ejercicios 6.10

Ejercicio 6.10.5. He aquí un argumento formal:

$$\begin{aligned}
&\text{maximín } (-A^{\mathrm{T}}) \\
&\quad = \text{máx } \{\text{mín } \{-a_{11}, \ldots, -a_{1n}\}\}, \ldots, \{\text{mín } \{-a_{m1}, \ldots, -a_{mn}\}\} \\
&\quad = \text{máx } \{-\text{máx } \{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}\}, \ldots, \{-\text{máx } \{a_{m1}, \ldots, a_{mn}\}\} \\
&\quad = -\text{mín } \{\text{máx } \{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}\}, \ldots, \{\text{máx } \{a_{m1}, \ldots, -a_{mn}\}\} \\
&\quad = -\text{minimax } (A).
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.10.6. $A : (s_2, t_2)$; B y C: no tienen punto de silla; $D : (s_3, t_4)$.

Ejercicio 6.10.17. Si la jugadora II usa t_1, t_2 o t_3, entonces el jugador I obtiene un pago esperado de 4 usando p. Si la jugadora II usa t4, el jugador I obtiene 3 con seguridad, haga lo que haga. El nivel de seguridad del jugador I es 3 y p es una estrategia de seguridad.

Ejercicio 6.10.20. La afirmación formal solamente dice que, para algún q, $\tilde{p}$ es por lo menos tan bueno como cualquier p. La afirmación $\forall\, p(\tilde{p}^{\mathrm{T}}Aq \geqslant p^{\mathrm{T}}Aq)$ es equivalente a $\forall\, p((p - \tilde{p})^{\mathrm{T}}Aq \leqslant 0)$. Esto es equivalente a $\text{máx}_p\,(p - \tilde{p})^{\mathrm{T}}Aq \leqslant 0$. Ahora anteponga a la última fórmula $\exists\, q$ y exprese lo que resulta en términos de mín_q.

Ejercicio 6.10.21. La primera afirmación formal dice que algún p es mejor para el jugador I que $\tilde{p}$, cualquiera que sea el q que elija II. La segunda afirmación formal es equivalente, por la razón dada en la nota a pie de página número 33 del Capítulo 6. La última afirmación se deriva usando la metodología del Ejercicio 6.10.20.

Ejercicio 6.10.22. El minimax que concluye el Ejercicio 6.10.20 es igual al maximín que concluye el Ejercicio 6.10.21.

Ejercicio 6.10.28.

a) $v = 1, \tilde{p} = (0, 1)^{\mathrm{T}}, \tilde{q} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$

b) $v = 1, \tilde{p} = (1/2, 1/2)^{\mathrm{T}}, \tilde{q} = (a, b, a)^{\mathrm{T}}$

c) $v = -2, \tilde{p} = (a, b, 0)^{\mathrm{T}}, \tilde{q} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$

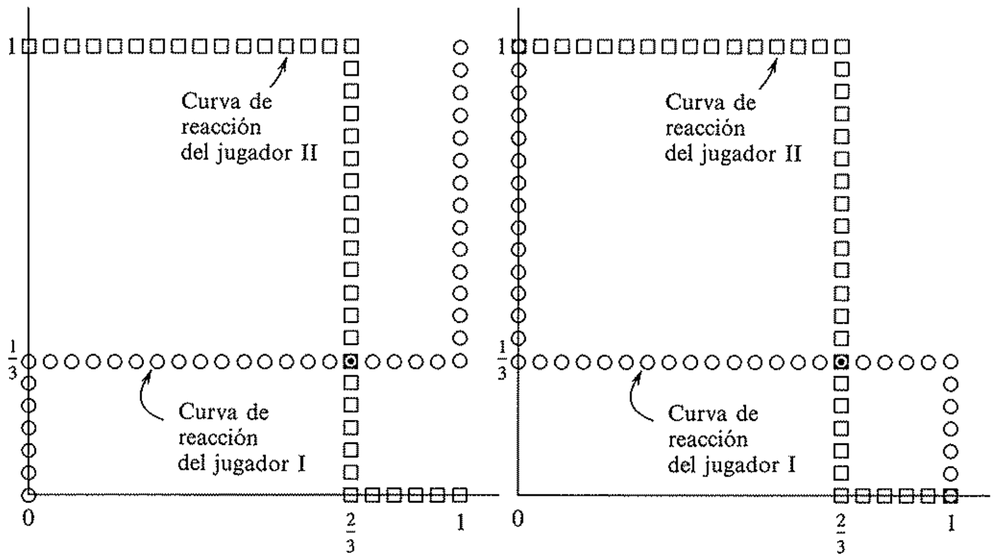
Ejercicio 6.10.37. Proceder como en la Sección 6.8, pero con la Figura 6.19 modificada de forma que la celda superior derecha sea v_{n-1} y la celda inferior izquierda sea u_{n-1}. Entonces $E_1(r) = 1 - 2r$ y $E_2(r) = (1 - r)v_{n-1} + ru_{n-1}$. La estrategia de seguridad del jugador I, $\tilde{r}$, se halla igualando estos valores. La fórmula para u_n se obtiene al escribir $u_n = E_1(\tilde{r})$. Puesto que $u_2 = 1$, se sigue que $u_3 = 1/3$ y, por tanto, $u_4 = 0$. La agencia debería inspeccionar con probabilidad 1/2 el primer día.

Ejercicio 6.10.38. Las estrategias óptimas para el coronel Blotto son mandar 1 ó 2 compañías, cada una con probabilidad 1/2. El conde Baloney manda 0 ó 1 compañías, cada una con probabilidad 1/2. El pago esperado del coronel Blotto es v_n, donde $v_n = 1/2(1 + v_{n-1})$. Puesto que $v_0 = 0$, se sigue que $v_n = 1 - (1/2)^n$.

Ejercicio 6.10.40. La única estrategia de seguridad es elegir *cara* y *cruz* con la misma probabilidad. Es un equilibrio de Nash si todos los jugadores eligen *cara*. Para un juego de suma cero de dos jugadores, un perfil de estrategias es un equilibrio de Nash si y sólo si cada jugador o jugadora usa una de sus estrategias de seguridad.

Ejercicios 7.9

Ejercicio 7.9.2. Véase la Figura A.10.



(a) (b)

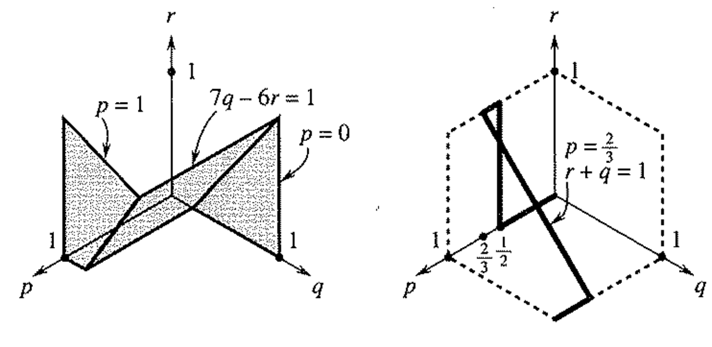
Figura R.10. Curvas de reacción para el Ejercicio 7.9.2.

Ejercicio 7.9.3. Sea E_i una matriz con unos en la columna i-ésima y ceros en las demás posiciones. Entonces $p^{\mathrm{T}}(A + kE_i)q = p^{\mathrm{T}}Aq + kq_i$. Puesto que el término kq_i no depende de p, se sigue que la misma p maximiza $p^{\mathrm{T}}(A + kE_i)q$ y $p^{\mathrm{T}}Aq$.

La segunda versión del gallina (Figura 7.17(a)) se obtiene de la primera (Figura 7.3(c)) sumando 1 al pago del jugador I en la primera columna y 1 al pago de la jugadora II en la primera fila. Por tanto, las dos versiones tienen la misma correspondencia de respuesta óptima, y en consecuencia los mismos equilibrios de Nash.

Ejercicio 7.9.5.

a) Véase la Figura A.11(a).
b) Véase la Figura A.11(b).



La correspondencia $R_1(q, r)$ La correspondencia $R_2(p)$

(a) (b)

Figura R.11. Una superficie de reacción y una curva de reacción para el Ejercicio 7.9.5.

c) El equilibrio de Nash es (2/3, 7/13, 6/13). Los valores para q y r se obtienen resolviendo las ecuaciones $q + r = 1$ y $7q - 6r = 1$ simultáneamente. El resultado del equilibrio es (96/13, 4/3).
d) (9,03, 2,97).

Ejercicio 7.9.6.

a) (A, A, A); (B, B, B)
b) (1/2, 1/2, 3/4)
c) Deberían ponerse de acuerdo en jugar (A, A). A la jugadora II no le interesaría retirarse del acuerdo. Los jugadores I y II deberían cambiar a (B, B), si estuvieran seguros de que el jugador III cree que jugarán (A, A).

Ejercicio 7.9.10. Si $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un equilibrio de Nash, entonces $\tilde{p}$ es una respuesta óptima a $\tilde{q}$. Se sigue que $\Pi_1(\tilde{p}, \tilde{q}) = \text{máx}_p\, \Pi_1(p, \tilde{q}) \geqslant \text{mín}_q\, \text{máx}_p\, \Pi_1(p, q)$. El resto de la desigualdad se sigue del Teorema 6.4.1. La desigualdad correspondiente al jugador II es $\text{máx}_q\, \text{mín}_p\, \Pi_2(p, q) \leqslant \text{mín}_p\, \text{máx}_q\, \Pi_2(p, q) \leqslant \Pi(\tilde{p}, \tilde{q})$. El lado izquierdo de la última desigualdad es el nivel de seguridad de la jugadora II. Por tanto, recibe por lo menos esto en un equilibrio de Nash. Análogamente para el jugador I. Para ver esto no son necesarios cálculos, porque los jugadores pueden asegurarse su nivel de seguridad independientemente de lo que haga el oponente. Por tanto, deben obtener al menos tanto como dando una respuesta óptima a cualquiera que sea la estrategia que el contrario use en realidad.

Ejercicio 7.9.15.

a) Véase la Figura A.12.

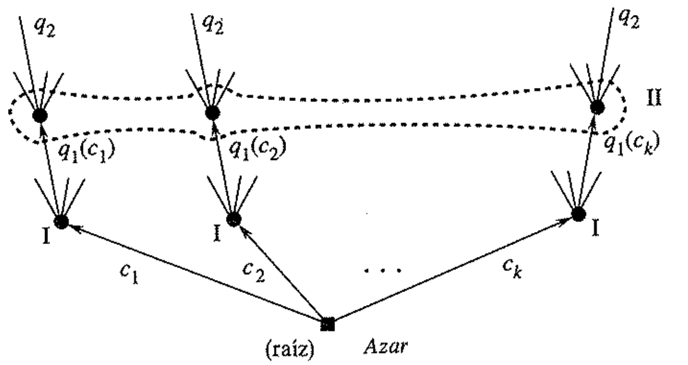


Figura R.12. Un árbol esquemático para el Ejercicio 7.9.15.

b) La cantidad producida por el jugador I depende del coste unitario con el que le dota el azar.

c) El pago esperado del jugador II es $\mathcal{E}\pi_1 = (M - c - \bar{q}_1 - q_2)q_2$, donde $\bar{q}_1 = \mathcal{E}q_1 = r_1 q_1(c_1) + r_2 q_1(c_2) + \cdots + r_k q_1(c_k)$. Su respuesta óptima a q_1 es $q_2 = 1/2(M - c - \bar{q}_1)$.

d) Si la jugadora II produce q_2, entonces el jugador I debería producir $1/2(M - c_i - q_2)$. Así, la estrategia pura que es una respuesta óptima del jugador I a la elección de q_2 por la jugadora II es la función $q_1 : C \to [0, M]$ definida por $q_1(c_i) = 1/2(M - c_i - q_2)$. La producción esperada del jugador I cuando usa esta estrategia de respuesta óptima es $\bar{q}_1 = 1/2(M - \bar{c} - q_2)$, donde $\bar{c} = \mathcal{E}c_i = r_1 c_1 + r_2 c_2 + \cdots + r_k c_k$.

e) Para hallar un equilibrio de Nash, resuelva las ecuaciones $q_2 = 1/2(M - c - \bar{q}_1)$ y $\bar{q}_1 = 1/2(M - \bar{c} - q_2)$ para q_2. Sustituya entonces este valor en $q_1(c_i) = 1/2(M - c_i - q_2)$. Las producciones de equilibrio son $q_1(c_i) = 1/6(M - 3c_i + 2c - \bar{c})$ y $q_2 = 1/3(M - 2c + \bar{c})$.

Ejercicio 7.9.17. Supongamos que $p_1 > c$. Entonces la jugadora II puede hacerse con todo el mercado (con beneficios) eligiendo p_2 ligeramente por debajo de p_1. Análogamente, el jugador I puede hacerse con todo el mercado (con beneficios) escogiendo p_1 ligeramente por debajo de p_2, si $p_2 > c$. Así pues, para un equilibrio de Nash con dos empresas en el mercado que producen cantidades positivas debe darse el caso que $p_1 = p_2 = c$. El beneficio de cada una de ellas será entonces cero —como en el caso de la competición perfecta—. Si las empresas no tienen los mismos costes unitarios, la empresa con precio unitario menor puede hacerse con todo el mercado (con beneficios) fijando un precio ligeramente por debajo del coste unitario de su rival. No existen equilibrios de Nash en los que ambas empresas producen cantidades positivas. La empresa de costes altos se verá obligada a salir del mercado, y la empresa de costes bajos fijará un precio igual al coste de su rival potencial para asegurar que no es provechoso para este volver a entrar.

Ejercicio 7.9.26.

a) El beneficio del k-ésimo granjero es $\pi_k = e^{-W}W_k$. Esto tiene un máximo estricto en $W_k = 1$ sea cual sea la producción de los otros granjeros. Si todos los granjeros producen una unidad, $W = n$ y, por tanto, $\pi_k = e^{-n}$.

b) Un monopolista que controlara toda la producción de harina maximizaría beneficios tomando $W = 1$. Si los granjeros forman un cartel y producen conjuntamente lo misno que un monopolista, el producto individual de cada granjero será $1/n$. El acuerdo de cartel debería de ser vinculante porque para cada individuo es estrictamente dominante producir 1, hagan lo que hagan los demás.

c) Si cada granjero produce 1, entonces cada uno obtiene un beneficio e^{-n}. Si cada uno produce $1/n$, cada uno obtiene un beneficio e^{-1}/n. Este último es mayor que el primero si y sólo si $ne^{-n} < 1e^{-1}$.

d) Si todos los granjeros usan sus estrategias estrictamente dominantes, el resultado es Pareto-inferior.

Ejercicio 7.9.37.

a) $\tilde{\pi}_1 = 1/2(\pi_1 + \tilde{\pi} - \pi_2)$, $\tilde{\pi}_2 = 1/2(\pi_2 + \tilde{\pi} - \pi_1)$, donde $\tilde{\pi} = 1/4(M - c)^2$.

b) $\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}$. El juego es, por tanto, de suma constante, y en consecuencia estratégicamente equivalente a un juego de suma cero. $\pi_1 - \pi_2 = 2\pi_1 - \tilde{\pi}$.

c) $\pi_1 - \pi_2 = (M - c - q_1 - q_2)(q_1 - q_2)$. El nivel de seguridad del jugador I es 0.

d) La estrategia de seguridad de cada jugador es producir lo que el monopolista eligiría.

Ejercicio 7.9.41. Las respuestas a las preguntas entre paréntesis son:

1. y_k maximiza beneficios a precios p_k.
2. La función $f : \mathbf{R}_+^{2n} \to \mathbf{R}$ definida por $f(p, y) = p^{\mathrm{T}}y$ es continua.
3. y maximiza beneficio a precios p.

El fallo en el razonamiento es que nada asegura la convergencia de la sucesión y_k. Para apañar la prueba hay que usar la compacidad de Y. Entonces está garantizado que y_k tiene una *subsucesión* convergente. Podemos seguir como antes, usando esta subsucesión en lugar de la sucesión original.

Ejercicios 8.6

Ejercicio 8.6.1. Véase la Figura A.13.

	t_1t_1	t_1t_2	t_2t_1	t_2t_2
s_1s_1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
s_1s_2	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
s_2s_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1
s_2s_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

(a)

	t_1t_1	t_1t_2	t_2t_1	t_2t_2
s_1s_1	1	0	0	0
s_1s_2	0	1	0	0
s_2s_1	0	0	0	1
s_2s_2	0	0	0	1

(b)

Figura R.13. Formas estratégicas para el Ejercicio 8.6.1.

Ejercicio 8.6.4. El algoritmo de Zermelo requiere que en la última etapa se juegue el único equilibrio de Nash. Considere ahora la penúltima etapa, y razone como en la Sección 8.3.

Ejercicio 8.6.6. Considere un perfil de estrategias puras que conduzcan a una partida P en el juego repetido. Sea j la última etapa en la partida P en la que alguien no ha jugado *halcón*. Entonces un jugador que había elegido *paloma* en la etapa j podría mejorar su pago en el juego repetido jugando *halcón* en la etapa j y todas las subsiguientes. Por tanto, s no puede ser un

equilibrio de Nash, excepto si no existe una tal j[5]. Considere una estrategia pura e para el dilema del prisionero repetido dos veces en la que cada jugador piensa jugar *halcón* en la primera etapa, y *halcón* en la segunda etapa si el oponente juega *halcón* en la primera etapa. Si algo distinto a (*halcón*, *halcón*) ocurriera en la primera etapa, la estrategia establece que se juegue *paloma* en la segunda etapa. Entonces (e, e) es un equilibrio de Nash que no es subjuego-prefecto.

Ejercicio 8.6.9. Si cada jugador usa IMPLACABLE, entonces cada uno obtendrá en media un pago de 3. Un jugador que se desviara de IMPLACABLE obtiene su mejor resultado jugando *paloma* hasta la última etapa, y solamente entonces cambiando a *halcón*. Si su contrincante sigue jugando IMPLACABLE, el que se desvía recibirá un pago medio de $(3(n - 1) + 6)/n = 3 + 3/n$. Para que (IMPLACABLE, IMPLACABLE) sea un equilibrio de Nash aproximado, se requiere por tanto que $3/n \leqslant \varepsilon$. Para la versión del dilema del prisionero de la Figura 8.13(a), la condición es $1/n \leqslant \varepsilon$.

Ejercicio 8.6.13. Una máquina de Moore con 100 estados no puede contar hasta 101 porque necesita un estado nuevo para cada número que cuenta. Si el jugador I usa IMPLACABLE, la jugadora II solamente puede obtener un resultado mejor que el que obtiene jugando también IMPLACABLE si usa *paloma* hasta la última etapa y entonces usa *halcón*. Pero este resultado mejor no está disponible si tiene que usar una máquina con sólo 100 estados, porque esta máquina no puede contar hasta 101 y, por tanto, no puede identificar la última etapa.

Ejercicio 8.6.14. TIT-FOR-TAT.

Ejercicio 8.6.19. $U_2(a, b) = (6 + \delta + \delta^2)/(1 - \delta^4)$. Pero $1 - \delta^4 = (1 - \delta)(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3)$, y así $(1 - \delta)U_2(a, b) = (6 + \delta + \delta^2)/(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3) \to 1/4(6 + 1 + 1) = 2$ cuando $\delta \to 1$.

Ejercicio 8.6.20. La Figura A.14 muestra la forma estratégica requerida. Las casillas correspondientes a los equilibrios de Nash tienen ambos pagos rodeados por un círculo.

Ejercicio 8.6.22.

a) y *b*) Véase la Figura A.15.

c) Los resultados de equilibrio de Nash con estrategias puras son densos en el conjunto de todos los pares (r_1, r_2) tales que $r_1 + r_2 \leqslant 10$, $r_1 \geqslant x$ y $r_2 \geqslant x$. Este conjunto es vacío si $x > 5$.

d) Si $x > 10$, entonces sólo (x, x) es un resultado de equilibrio de Nash. Si $x < 0$, sólo $(10, 10)$ es un resultado de equilibrio de Nash.

[5] Si hay que considerar estrategias mixtas, defínase j como la última etapa en la que alguien juega *paloma* con probabilidad positiva.

	HALCÓN	PALOMA	IMPLACABLE	TIT-FOR-TAT	TAT-FOR-TIT
HALCÓN	0, 0	3, -1	0, 0	0, 0	$\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$
PALOMA	-1, 3	2, 2	2, 2	2, 2	2, 2
IMPLACABLE	0, 0	2, 2	2, 2	2, 2	3, $-\frac{1}{2}$
TIT-FOR-TAT	0, 0	2, 2	2, 2	2, 2	1, 1
TAT-FOR-TIT	$-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$	2, 2	$-\frac{1}{2}$, 3	1, 1	2, 2

Figura R.14. La forma estratégica reducida para el Ejercicio 8.6.20.

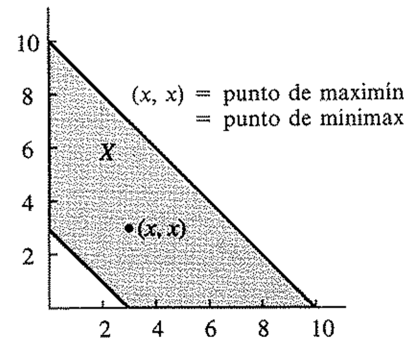


Figura R.15. El uso del teorema folk en el Ejercicio 8.6.22.

Ejercicio 8.6.28.

a) No es beneficioso desviarse por primera vez en la última etapa, porque elegir *paloma* y *halcón* con igual probabilidad es un equilibro de Nash del juego de una etapa. Tampoco es beneficioso desviarse en una etapa anterior porque el primero en desviarse es castigado en todas las etapas subsiguientes.

b) Los subjuegos del juego repetido se alcanzan de tres formas posibles. Si (*paloma, halcón*) o (*halcón, paloma*) no se han jugado nunca en etapas anteriores, entonces (s, s) requiere que se juegue el equilibrio de Nash en el subjuego que resulta, por el apartado *a*). Si no es así, o bien (*paloma, halcón*) o bien (*halcón, paloma*) se jugó anteriormente. En el primer caso, el equilibrio de Nash (*paloma, halcón*) del juego de una etapa se juega a partir de entonces. En el segundo, se juega a partir de entonces el equilibrio (*halcón, paloma*) del juego de una etapa.

c) 3, 0, 2, 3, 0, 2, ..., 3, 0, 2, 1.

d) El gallina tiene múltiples equilibrios de Nash, de forma que quien se desvía puede ser castigado con un equilibrio de Nash del juego de una etapa que disguste a quien se desvió.

Ejercicios 9.8

Ejercicio 9.8.5. Sí. Véase la Figura A.16.

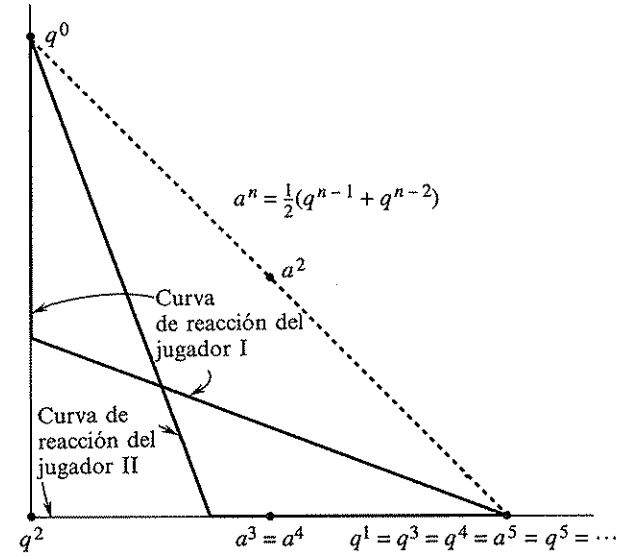


Figura R.16. Convergencia al equilibrio en el Ejercicio 9.8.5.

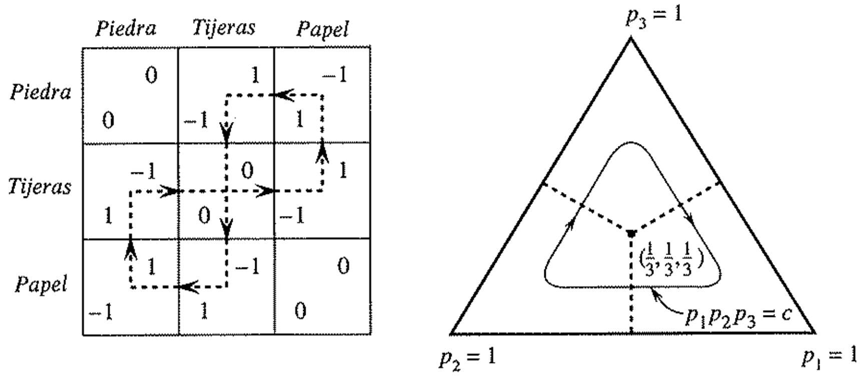
Ejercicio 9.8.8. Véase la Figura A.17(a).

Ejercicio 9.8.10. $p' = p(3 - 2p)(1 - p)$. Los puntos estacionarios son $p = 0$ y $p = 1$. Si $p(0) = 0$, entonces $p' = 0$. De otro modo $p' > 0$ y p crece hasta el límite 1.

Ejercicio 9.8.12.

a) Si sólo está presente una estrategia, la población no puede cambiar de composición. Así $(1, 0)$ es un punto estacionario. Si $a > c$ entonces existe un p cercano a 1 tal que $p' > 0$. Si $a = c$ y $b > d$, entonces $p' > 0$ para todo $p \in (0, 1]$.

b) El argumento es similar al de la parte *a*).



(a) (b)

Figura R.17. Diagramas para los Ejercicios 9.8.8 y 9.8.24*c*).

c) En este caso la población no se mueve de su punto inicial. Por tanto, cualquier punto es un punto estacionario, pero ninguno es un atractor asintótico.
d) Escriba $p_1 = \tilde{p}_1$ y $p_2 = \tilde{p}_2$ en el lado derecho de las ecuaciones del replicador.
e) Si $p_1 > \tilde{p}_1$, entonces $p_1' < 0$. Análogamente, si $p_1 < \tilde{p}_1$, entonces $p_1' > 0$.
f) Si estas desigualdades estrictas se cumplen, p_1' será negativo si p_1 es mayor que $\tilde{p}_1$ y positivo si es menor.

Ejercicio 9.8.14. Podemos deducir estas conclusiones de los Ejercicios 9.8.12*a*), 9.8.12*b*) y 9.8.12*f*) usando el Lema 9.6.1, pero es igualmente fácil usar directamente la definición de estrategia estable.

Ejercicio 9.8.20. Sustituya simplemente el pago esperado del jugador i por $(Ap)_i$, y el pago medio esperado por $p^{\mathsf{T}}Ap$.

Ejercicio 9.8.22.
a) Si $\tilde{p}$ es una estrategia evolutivamente estable, entonces $(\tilde{p}, \tilde{p})$ es un equilibrio de Nash. Por tanto cada estrategia pura a la que $\tilde{p}$ asigna probabilidad positiva debe ser una respuesta óptima a la elección de $\tilde{p}$ por parte del oponente. Pero, puesto que $\tilde{p}$ es completamente mixta, asigna probabilidad positiva a todas las estrategias puras. Así $(Ap)_i$ es la misma para todo i.
b) Cualquier p es una respuesta óptima alternativa, porque todas las respuestas dan el mismo pago.
c) Lema 9.6.1.
d) Puesto que $A^{\mathsf{T}} = -A$, tenemos que $-p^{\mathsf{T}}A\tilde{p} > -p^{\mathsf{T}}Ap$, tomando traspuestas. Así, $p^{\mathsf{T}}A\tilde{p} < p^{\mathsf{T}}Ap$. Pero $\tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{p} = p^{\mathsf{T}}A\tilde{p} = w$. En consecuencia $\tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{p} < p^{\mathsf{T}}Ap$, en contradicción con la hipótesis de que $\tilde{p}$ es evolutivamente estable.

Ejercicio 9.8.24. Sumando las tres ecuaciones obtenemos $d(p_1p_2p_3)/dt = 0$. Esta ecuación diferencial tiene la solución inmediata $p_1p_2p_3 = c$.
a) Un método gracioso para la maximización hace uso de la desigualdad de las medias aritméticas y geométricas: $\sqrt[3]{(p_1p_2p_3)} \leqslant 1/3(p_1 + p_2 + p_3)$, con igualdad si y sólo si $p_1 = p_2 = p_3$. Un atractor asintótico debería ser $\tilde{p}$ porque éste es el único punto estacionario. Pero no hay trayectorias que se aproximen a $\tilde{p}$.
b) Puesto que $p_1(c)$, $p_2(c)$ y $p_3(c)$ son todos cercanos a $\tilde{p}$ cuando c es cercano a 1/27, se sigue que toda la trayectoria $p_1p_2p_3 = c$ también debe ser cercana a $\tilde{p}$.
c) Véase la Figura R.17(b).

Ejercicio 9.8.25. $\Pi(s_1, s_1) = 0 > \Pi(s_2, s_1) = -3$ y $\Pi(s_1, s_1) = 0 >$ $> \Pi(s_3, s_1) = -1$. El perfil de estrategias $(\tilde{p}, \tilde{p})$ es un equilibrio de Nash, porque cualquier cosa es una respuesta óptima a la elección de $\tilde{p}$ por parte del oponente. No obstante, $\Pi(\tilde{p}, s_1) = -4/3 < \Pi(s_1, s_1)$ y, por tanto, $\tilde{p}$ no es una estrategia evolutivamente estable.

Ejercicio 9.8.26.
a) $(A\tilde{p})_i = \tilde{p}^{\mathsf{T}}A\tilde{p} = 2/3$.
b) Después de eliminar los términos cuadráticos de la ecuación del replicador, $q_i' \approx 1/3\{(Aq)_i - \tilde{p}^{\mathsf{T}}Aq - q^{\mathsf{T}}A\tilde{p}\}$.
c) Esto es fácil si sabe lo que es un valor propio.
d) $e^{\lambda t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, si la parte real de $\lambda < 0$. Así, $q \to \tilde{p}$ cuando $t \to \infty$, siempre que $q(0)$ esté lo suficientemente cerca de $\tilde{p}$.

Ejercicios 10.9

Ejercicio 10.9.7.
a) Por (K3), $\mathcal{K}(\mathcal{K}E) \supseteq \mathcal{K}E$. Por tanto $\mathcal{K}E$ es un truismo.
b) Demostrar que $\sim\mathcal{K}F$ es un truismo escribiendo $E = \sim F$ en (K4), y recordando la definición de P.
c) Usar (K4).
d) Poner $F = \sim E$, y usar que $\sim\mathcal{K}F$ es un truismo, según el apartado *b*).

Ejercicio 10.9.9. La primera inclusión viene implicada por (K2). La segunda se sigue de que el conjunto de todos los E es mayor que el conjunto de los E de la forma $E = \mathcal{K}F$. La siguiente identidad se sigue del Ejercicio 10.9.2*b*). Para la parte final, se usan las partes anteriores para demostrar que

$$\mathcal{P}\{\omega\} = \bigcap_{\omega \in T} T = \bigcap_{\omega \in \mathcal{K}(\mathcal{K}E)} \mathcal{K}E = \bigcap_{\omega \in \mathcal{K}E} \mathcal{K}E$$

según la primera parte del ejercicio.

Ejercicio 10.9.13. Nadie se ruboriza hasta el tercer segundo, y entonces todos se ruborizan simultáneamente. Véase la Figura A.18.

Ejercicio 10.9.14. Sea Alice la primera que tiene la oportunidad de ruborizarse, y supongamos entonces que Bob y Nanny pueden ruborizarse *simultáneamente* un segundo después. Entonces sea Alice la que puede ruborizarse, y así sucesivamente.

Ejercicio 10.9.18.

a) Las estrategias puras lL, lR, rL y rR deberían usarse con probabilidades $(1 - p)(1 - P)$, $(1 - p)P$, $p(1 - P)$ y pP.

b) La estrategia mixta dada asigna probabilidad 1/4 a cada una de las jugadas $[Hl]$, $[HrR]$, $[Tr]$ y $[TlL]$. Una estrategia de comportamiento en que la acción r se elige con probabilidad p y la acción R con probabilidad P asigna probabilidades $1/2(1 - p)$, $1/2pP$, $1/2P$ y $1/2(1 - p)(1 - P)$ a estas jugadas. No existen valores de p y P que hagan cada una de estas probabilidades igual a 1/4.

c) El teorema de Kuhn no se puede aplicar porque el juego tiene memoria imperfecta.

Ejercicio 10.9.28. Sólo considera el caso del Ejercicio 10.9.13. Véase la Figura A.18 para el conjunto comunal de posibilidades. El suceso para el que Bob y Nanny tienen las caras sucias es $D_{B,N} = \{7,8\}$. Si este suceso ocurre, entonces el estado verdadero es $\omega = 7$ ó $\omega = 8$. Eventualmente, $\mathcal{M}(7) = \{7\}$ y $\mathcal{M}(8) = \{8\}$. En ambos casos, $\mathcal{M}(\omega) \subseteq D_{B,N}$.

Ejercicio 10.9.29. En el caso general, $d(S)$ puede ser un *conjunto* de acciones porque puede que no haya un único óptimo. Sea $\mathcal{E}u(x|S)$ la utilidad esperada de x dado que ha ocurrido el suceso S. Cuando E y F son disjuntos, $\mathcal{E}u(x|E \cup F) = p\mathcal{E}u(x|E) + q\mathcal{E}u(x|F)$, donde $p = \text{prob}(E|E \cup F)$ y $q = \text{prob}(F|E \cup F)$. En consecuencia, $\mathcal{E}u(x|E \cup F) \leqslant p\mathcal{E}u(y|E) + q\mathcal{E}u(y|F) = \mathcal{E}u(y|E \cup F)$, para cada y en el conjunto $d(E) = d(F)$. Podemos deducir que $y \in d(E) \Rightarrow y \in d(E \cup F)$ cuando $d(E) = d(F)$. Se puede demostrar análogamente que $y \notin d(E) \Rightarrow y \notin d(E \cup F)$.

Ejercicio 10.9.32.

a) Véase la Figura A.19(a).

b) Véase la Figura A.19(b).

c) Lo mismo que en la Figura A.19(b).

d) 2

e) Véase la Figura A.20.

f) No.

g) Después del primer aviso.

h) Después del segundo aviso.

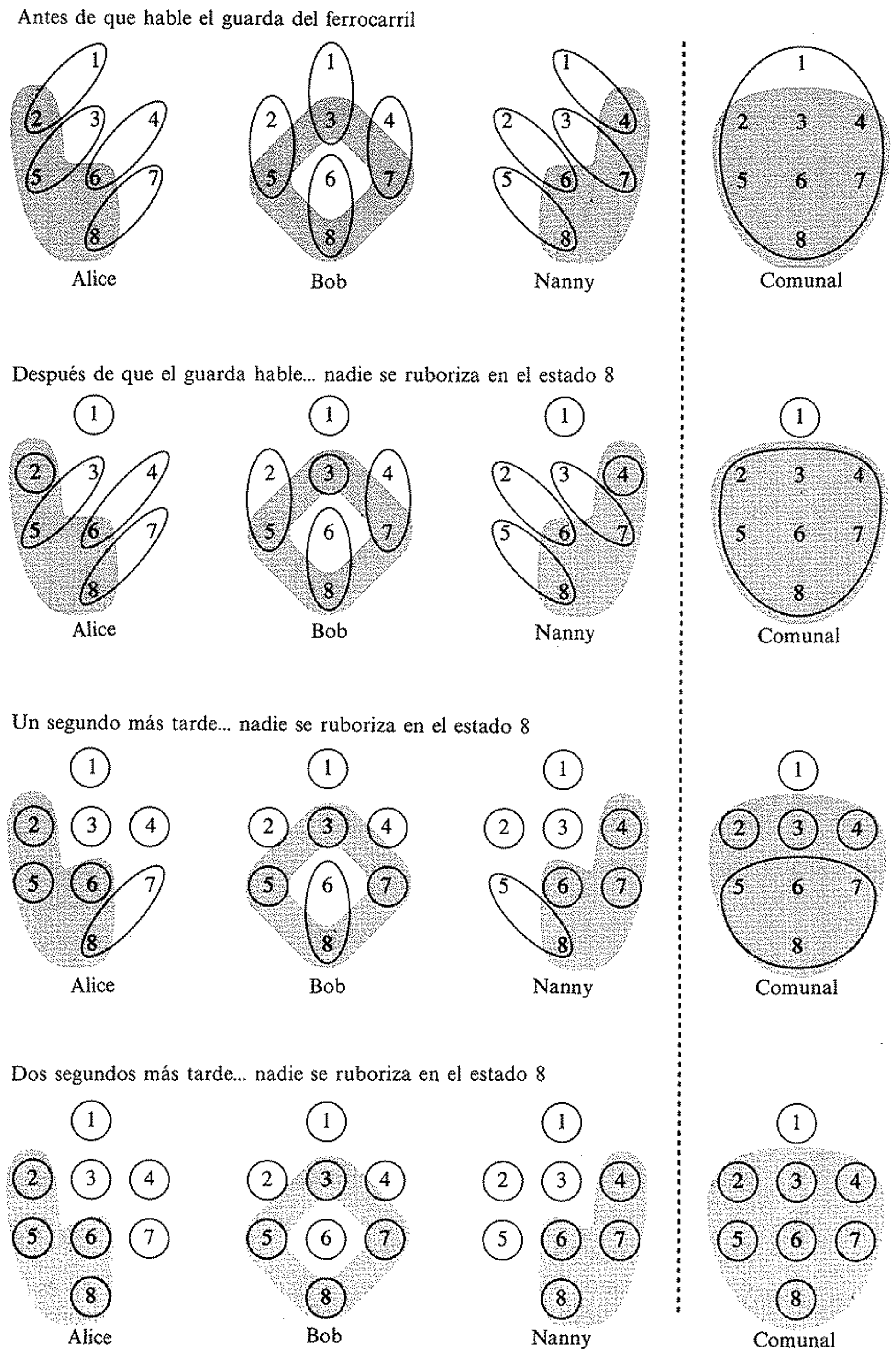
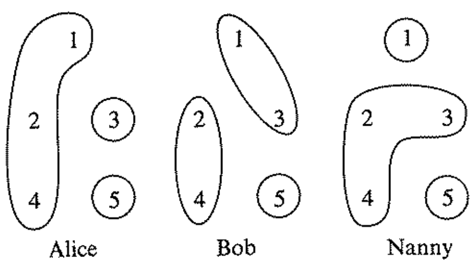
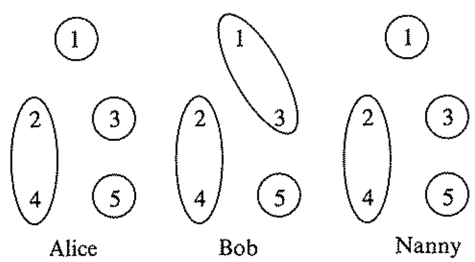


Figura R.18. Ruborizarse simultáneamente para el Ejercicio 10.9.13.



Estado	Alice	Bob	Nanny	Promedio
1	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{8}{9}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$
3	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$
5	0	0	0	0

(a)



Estado	Alice	Bob	Nanny	Promedio
1	1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	1	1	1
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	0	0	0	0

(b)

Figura R.19. Diagramas para el Ejercicio 10.9.32*a*) y *b*).

i) Las probabilidades a posteriori de todo el mundo serán iguales a la media.

Ejercicio 10.9.33. Los jugadores racional-bayesianos optimizan dada su información. Si cada uno conoce la elección de estrategia del contrario, entonces cada uno responderá óptimamente a la estrategia elegida por el contrario.

Ejercicio 10.9.36.

a) La segunda derivada de $\pi_1(q_1, q_2)$ con respecto a q_1 es -2. Si la empresa 1 elige el producto a con probabilidad α y el producto b con probabilidad β, su beneficio esperado es $\alpha\pi_1(a, q_2) + \beta\pi_1(b, q_2) < \pi_1(\alpha a + \beta b, q_2)$ porque π_1 es estrictamente cóncava.

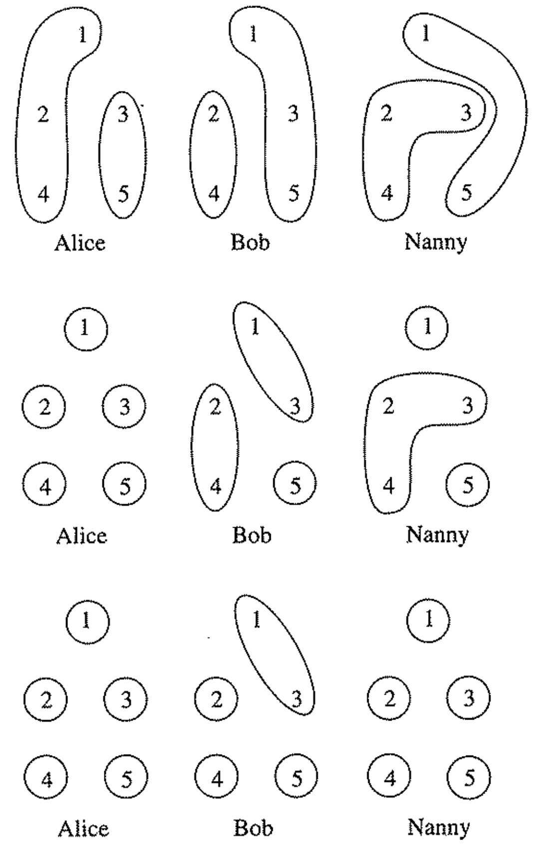


Figura R.20. Conjuntos de posibilidades para el Ejercicio 10.9.32*e*).

b) Véase la Figura A.21(a).
c) La función R es continua.
d) La curva de reacción del jugador i nunca supera la línea $q_i = x_1$. Véase la Figura A.21(b).
e) Por la misma razón que en el apartado *d*). Véase la Figura A.21(c).
f) Elimínese la parte sombreada de la Figura A.21(c).
g) La sucesión x_{2n} es creciente y la sucesión x_{2n+1} es decreciente.
h) Esto se sigue del apartado *g*) y la parte *c*).

Ejercicios 11.10

Ejercicio 11.10.5. Puesto que prob$(A \cap C) = 0{,}01$, prob$(A) = 0{,}01$ y prob$(C) = 0{,}1$, prob$(A \cap C) \neq$ prob(A)prob(C). Véase la Figura A.22. Mr. A y Ms. D sabrán con seguridad quién es su oponente.

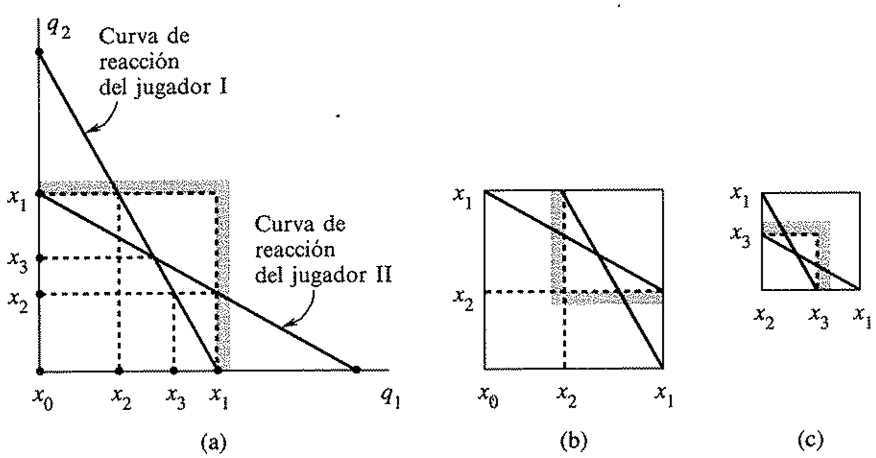


Figura R.21. Diagrama para el Ejercicio 10.9.36*b*), *d*), *e*) y *f*).

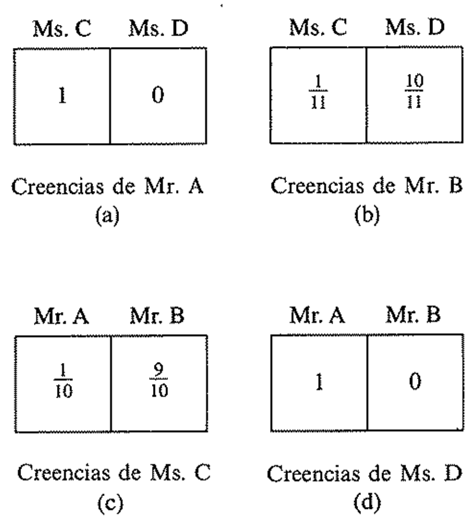


Figura R.22. Creencias en el Ejercicio 11.10.5.

Ejercicio 11.10.6.

a) Mr. A contra Ms. C: abajo a la derecha. Mr. A contra Ms. D: abajo a la izquierda. Mr. B contra Ms. C: arriba a la izquierda. Mr. B contra Ms. D: arriba-derecha.

b) (a_1, b_1, d_2, c_1)

c) Los pagos y las probabilidades para la jugada de reparto se suponen conocimiento común.

d) Mr. A sabe que, si es elegido para jugar, está jugando contra Ms. C, pero ella cree que es muy probable que esté jugando contra Mr. B.

Ejercicio 11.10.7.

a) Véase la Figura A.23.

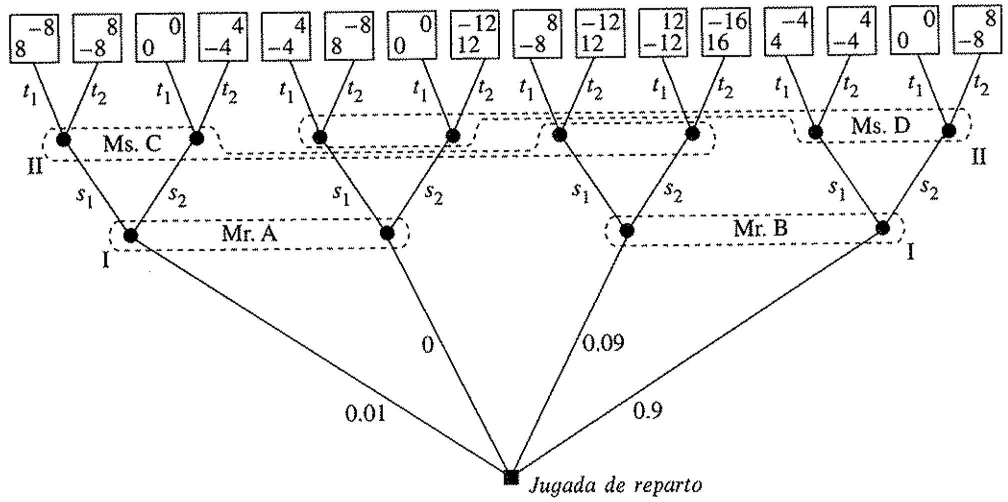


Figura R.23. El árbol del juego del Ejercicio 11.10.7*a*).

b) Von Neuman: s_1s_1, s_1s_2, s_2s_1 y s_2s_2. Morgenstern: t_1t_1, t_1t_2, t_2t_1 y t_2t_2.

c) Véase la Figura A.24.

	c_1d_1	c_1d_2	c_2d_1	c_2d_2
a_1b_1	2.91	4.6	−4.24	−2.6
a_1b_2	2.88	4.64	−4.32	−2.56
a_2b_1	−1	1.46	−8.2	−5.74
a_2b_2	−1.08	1.5	−8.28	−8.7

Figura R.24. La forma estratégica del Ejercicio 11.10.7*c*).

Ejercicio 11.10.8. Solamente en juegos de dos jugadores y suma cero es necesariamente cierto que un equilibrio de Nash requiera que un jugador use su estrategia de seguridad. Pero el juego del Ejercicio 11.10.6 es un juego de cuatro jugadores.

Ejercicio 11.10.9.

a) Borre las referencias a los jugadores I y II.

b) Se puede pensar en Mr. A y Ms. B como en los agentes de Von Neuman (como se ha explicado en la Sección 10.4.2).

Ejercicio 11.10.10.

a) Ms. D cree que que él tan sólo puede actuar como Mr. B y, por tanto, el director de reparto debería poner 0 en la casilla superior-derecha al construir la tabla correspondiente a la Figura 11.9(b). Pero entonces Mr. A tendría que creer con seguridad que juega contra Ms. C, lo que no es consistente con sus creencias.

b) y *c*) Procédase como en el Ejercicio 11.10.7*c*).

Ejercicio 11.10.26. Sea $\bar{w}_t$ el valor esperado de w que usa una empresa del tipo t. Si la empresa 1 es de tipo t, entonces su beneficio esperado es $q_1(\bar{w}_t - q_1 - \bar{Q}_2)$, siendo $\bar{Q}_2$ el producto esperado de la empresa 2. La empresa 1 entonces optimiza tomando $q_1 = Q_1(t) = 1/2(\bar{w}_t - \bar{Q}_2)$. Así, $\bar{Q}_1 = 1/2(\bar{\bar{w}} - Q_2)$. Por la misma razón $\bar{Q}_2 = 1/2(\bar{\bar{w}} - Q_1)$. Por tanto, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = 1/3\bar{\bar{w}}$.

Ejercicio 11.10.35. $\text{prob}(V_i > v) = 4 - v$. Así, $\text{prob}(V_i > v \text{ y } V_2 > v) = (4 - v)^2$. La función de densidad de probabilidad es $p(v) = P'(v) = 2(4 - v)$. El precio esperado de venta es $E(P) = \int_3^4 2t(4 - t)\,dt = 3\ 1/3$. La Sección 11.7.1 explica por qué el precio de venta esperado es el mismo en una subasta de Vickrey y en una subasta inglesa.

Ejercicio 11.10.39. $Q(b) = p(b - 3)/(1 - p)(4 - b)\ (3 \leqslant b \leqslant B)$, siendo $B = 4 - p$. Como en la Sección 0.1.2, los compradores Bajos ofrecen su verdadera valoración de 3m dólares, y los compradores Altos aleatorizan sus ofertas entre 3 y B de forma que la probabilidad de ofertar menos de b es precisamente $Q(b)$. Si ambos compradores resultan ser Altos, la probabilidad de que la mayor oferta sea menor que b es $R(b) = Q_2(b)$. El precio esperado de venta en el equilibrio es

$$3(1 - p)^2 + 2p(1 - p)\int_3^B bQ'(b)\,db + p^2\int_3^B bR'(b)\,db.$$

Este precio esperado de venta es el mismo que para las subastas inglesa, holandesa y Vickrey.

Ejercicio 11.10.46. Si ambos trabajadores son activos, el beneficio esperado del encargado es $2/12\,(0 - 2Y) + 2/12(10 - Y - X) + 8/12(20 - 2X)$. Maximizar equivale a minimizar $3x^2 + y^2$, siendo $x = 10\sqrt{X}$ e $y = 10\sqrt{Y}$. Sin embargo, los trabajadores dejarán de ser activos, si sus incentivos no son adecuados. Su restricción de compatibilidad con los incentivos es

$9/12(10\sqrt{X} - 8) + 3/12(10\sqrt{Y} - 8) \geqslant 4/12(10\sqrt{X} - 0) + 8/12(10\sqrt{Y} - 0)$, que se simplifica en $5x - 5y \geqslant 96$. La restricción de racionalidad individual es $9/12(10\sqrt{X} - 8) + 3/12(10\sqrt{Y} - 8) \geqslant 10$, que se simplifica en $3x + y \geqslant 8$. Estas restricciones para el problema de maximización del encargado se han de complementar con $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Las restricciones efectivas son la primera y la última, y los valores optimizadores de x e y son 19,2 y 0. Luego el encargado ha de pagar 3,69 dólares por un objeto satisfactorio y nada por un objeto defectuoso.

Indice analítico